Roland RINK, Lüneburg

# Strategien von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen

## 1. Einführung

Der Umgang mit Verhältnissen ist wesentlich für viele Bereiche des Alltags. Man nutzt Verhältnisse dabei hauptsächlich in zwei Funktionen. In ihrer Verwendung als Quotient können Verhältnisse wie Brüche genutzt und somit auch gekürzt und erweitert werden. In ihrer zweiten Funktion als „gestaltliches Beschreibungsmittel“ (vgl. FÜHRER, 2004) steht der Relationscharakter von Verhältnissen im Vordergrund. Der Fokus liegt hier eher auf dem pragmatischen Bezug und weniger auf einer Rechenoperation.

In der Schulmathematik der Sekundarstufe sind Verhältnisse beispielsweise für die Bruch- oder Prozentrechnung, den Dreisatz, Proportionalität und Antiproportionalität, die Ähnlichkeitslehre oder die Stochastik grundlegend. Auch in der Grundschule gehen Lernende bereits – allerdings eher implizit und wenig systematisch – mit dem Verhältnisbegriff um (z. B. Maßstab, Zufallsgeneratoren).

## 2. Theoretischer Rahmen

Eine mathematische Grundlegung des Verhältnisbegriffs ist auf verschiedene Arten möglich (z. B. STREHL, 1979). An dieser Stelle mag folgende Fassung genügen: Durch ein Verhältnis werden zwei Zahlen oder Größen (z. B. Längen, Gewichte, Zeitspannen) zueinander multiplikativ in Beziehung gesetzt.

Abhängig von der durch das Verhältnis beschriebenen Konstellation lässt sich zwischen verschiedenen **Verhältnisarten** unterscheiden, was die Vielseitigkeit der Verhältnisse (gegenüber den Bruchzahlen) deutlich werden lässt:

Ist die beschriebene Konstellation durch eine Teil-Ganzes-Struktur gekennzeichnet, liegt ein *Teil-Ganzes-Verhältnis (TG)* dann vor, wenn sich eine Komponente des Verhältnisses auf einen Teil, die andere auf das Ganze bezieht. Teil-Ganzes-Verhältnisse sind grundlegend für die Bruch- und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Entsprechend wird von einem *Teil-Teil-Verhältnis (TT)* gesprochen, wenn sich die beiden Komponenten auf verschiedene Teile eines gemeinsamen Ganzen beziehen. Diese Verwendung von Verhältnissen ist im Alltag typisch und findet sich beispielsweise bei Kochrezepten wieder.

Wird eine Konstellation ohne Teil-Ganzes-Struktur durch ein Verhältnis beschrieben, soll diese in Übereinstimmung mit der englischsprachigen Literatur mit dem Terminus *„rate problem“ (RP)* bezeichnet werden. Die Komponenten des Verhältnisses können dann demselben Größenbereich entstammen oder zu verschiedenen Bereichen gehören. Im zweiten Fall kommt es oft zu einer Reifikation der Relation (man denke beispielsweise an Geschwindigkeit, Dichte oder Druck. Dies lässt die grundlegende Bedeutung des Verhältnisbegriffes für viele Bereiche der Physik deutlich werden).

Im Umgang mit Verhältnissaufgaben kann man zwischen vier **Handlungsaufforderungen** (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1991) unterscheiden. Das **Herstellen** eines Verhältnisses, das **Vergleichen** zweier Verhältnisse hinsichtlich ihrer Gleichheit (Proportion) oder Ungleichheit, das **Identifizieren** äquivalenter Verhältnisse aus einer Menge verschiedener Verhältnisse und das **Konstruieren** äquivalenter Verhältnisse bzw. das Vervollständigen einer Proportion.

## 3. Einordnung der Studie und zentrale Fragestellungen

Zu Fähigkeiten im Umgang mit Verhältnissen gibt es bereits umfangreiche Untersuchungen (z. B. HART, 1980; KARPLUS et al., 1983). Allerdings waren die beteiligten Schülerinnen und Schüler stets mindestens 12 Jahre alt. In Anschluss an PIAGET, welcher Kindern unter 12 Jahren hinsichtlich ihrer kognitiven Entwicklung untersucht hat, galt bisher, dass jüngere Kinder nicht in der Lage seien, erfolgreich mit Verhältnissen umzugehen. Wenige unsystematische Studien (z. B. STREEFLAND, 1984) und eigene Voruntersuchungen zu dieser Studie (RINK & FRITZLAR, 2010) deuten aber darauf hin, dass Grundschulkinder durchaus in der Lage sind, erfolgreich mit Verhältnissen zu operieren. Es ist daher erforderlich, eine detaillierte Erkundung entsprechender Fähigkeiten bei Lernenden am Ende der (traditionellen) Grundschulzeit vorzunehmen. Weiterhin werden in bisherigen Untersuchungen Verhältnisse aus verschiedenen Größenbereichen zu verschiedenen Inhaltsbereichen verwendet. In dieser Studie wird sich auf Anzahlen bzw. Zählgrößen konzentriert.

Im Fokus stehen dabei folgende Fragestellungen:

- Welche Bedeutung hat die **Verhältnisart** für Lösungsrate und Strategieeinsatz?
- Welche Bedeutung hat die **Handlungsaufforderung** im Umgang mit Verhältnissen für Lösungsrate und Wahl der Lösungsstrategie?

– Welche Bedeutung hat die **Vorgabe der Verhältnisse** für Lösungsrate und Wahl der Lösungsstrategie?

## 4. Daten und Methode

Da es bisher keine systematischen Untersuchungen über das Verhältnisverständnis von Grundschulkindern gibt, muss das Herangehen, im Sinne qualitativer Forschung, einen explorativen Akzent haben und methodisch so angelegt sein, dass zuvor nicht Bekanntes wahrgenommen werden kann. Zudem lassen sich zentrale Fragestellungen nur qualitativ differenziert beantworten.

Daher wurden mit 40 Schülerinnen und Schülern (Durchschnittsalter 9,3 Jahre) aus fünf verschiedenen niedersächsischen Grundschulen halbstandardisierte Einzelinterviews von 30 bis 45 Minuten Länge geführt, in deren Rahmen die Kinder Verhältnisaufgaben im übergreifenden Kontext „Schulsportfest" bearbeiteten. Die Aufgabenstellungen wurden schriftlich vorgelegt, die Äußerungen der Kinder videografiert und durch die Kinder schriftlich fixiert.

## 5. Ergebnisse und Ausblick

Die Auswertung der Interviews ergab, dass sich die für die Bearbeitung genutzten Strategien der Kinder in drei Kategorien einteilen lassen: **multiplikative**, **additive** und **sonstige** Vorgehensweisen.

Dabei führen nur die „multiplikativen Strategien", welche ein Verhältnis zur Bearbeitung nutzen, zu einem richtigen Ergebnis. Die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler lassen sich näher spezifizieren und führen innerhalb dieser drei Kategorien zu folgenden Subkategorien:

| multiplikativ | additiv | sonstige |
|---|---|---|
| Inneres Verhältnis I | Absolutes Argumentieren | keine Lösung |
| Inneres Verhältnis II | Additionsstrategie I | falsch und ohne Erklärung |
| Äußeres Verhältnis I | Additionsstrategie II | Anschauliches Argumentieren |
| Äußeres Verhältnis II | | Anschauliches Berechnen |

Im Folgenden werden in der Reihenfolge ihrer Häufigkeit diejenigen Strategien näher erläutert, die mindestens 20% aller Antworten erfassen. Alle anderen Strategien waren weniger vertreten bzw. nur vereinzelt zu beobachten.

**Inneres Verhältnis I**: Das äquivalente Verhältnis zu x:y wird konstruiert bzw. identifiziert, indem ein ganzzahliger Multiplikator genutzt wird, der x in y überführt. Beispiel: Beim Tauziehen ist 1 Lehrer so stark wie 3 Kinder; dann sind 4 Lehrer so stark wie 12 Kinder, weil es **dreimal** so viele Kinder wie Lehrer sind.

**Äußeres Verhältnis II**: Zwei äquivalente Verhältnisse werden komponentenweise addiert um ein drittes äquivalentes Verhältnis zu bestimmen. Beispiel: Beim Studentenfutter schmeckt eine Mischung aus 6 Löffeln **R**osinen und 12 Löffeln **N**üssen genauso wie eine Mischung aus 2R:4N oder 4R:8N, da 2R+4R=6R und 4N+8N=12N.

**Falsche Additionsstrategie I**: Diese Fehlstrategie wird in der Literatur oft bei älteren Schülerinnen und Schülern beschrieben (z. B. HART, 1980). Zwei Verhältnisse werden als äquivalent bewertet, wenn die Differenz der jeweiligen Zahlenpaare gleich ist. Beispiel: Beim Torwandschießen hat eine 6er-Mannschaft das Tor dreimal getroffen (jedes Kind darf einmal schießen) und ist damit genauso gut wie eine 8er-Mannschaft, die fünfmal trifft, weil jede Mannschaft dreimal vorbei geschossen hat.

Der Kategorie „sonstige“ wurden Vorgehensweisen zugeordnet, bei denen Kinder „visuelle Merkmale“ („das erkennt man doch“), die dem Aufgabenkontext geschuldet sind, nutzen, um ein Ergebnis zu erklären oder bei denen sie Daten willkürlich miteinander verrechnen.

In den Interviews deutete sich außerdem an, dass nicht nur Zahleigenschaften der vorgegebenen Verhältnisse, sondern auch die Verhältnisart die Vorgehensweise der SuS beeinflussen. Um diese Eindrücke auf eine breitere empirische Basis zu stellen, wurden entsprechende schriftliche Tests mit etwa 300 Kindern durchgeführt, die sich derzeit noch in der Auswertung befinden.

## Literatur

Hart, K. (1980): Secondary School-Children´s Unterstanding of Ratio and Proportion. Dissertation. London. Chelsea College.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1991). Ratio in special education. In L. Streefland,

*Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht.

Karplus, R., Pulos, St., & Karplus, E. K. (1983): Early adolescents' proportional reasoning on ‘rate’ problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219 – 233.

Rink, R., Fritzlar, T. (2010): Zu Fähigkeiten von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 693 – 696. Münster

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg.