

Benjamin ROTT, Hannover

Erste Ergebnisse der Analyse der Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern

Problemlösen ist einer der zentralen Bereiche der Mathematik und daher – jenseits curricularer Vorgaben – auch für Unterricht von großer Bedeutung. Einzelnen Aufgaben lässt sich dabei nicht unabhängig von ihren Bearbeitern das Prädikat „*Problem*“ (im Gegensatz zu „*Routine*“) zuordnen; es bedarf einer personenspezifischen Barriere, damit eine Aufgabe für eine bestimmte Person zu einem Problem wird. Möchte man sich mit dem Problemlösen beschäftigen, ist es daher wichtig, nicht nur Aufgabenstellungen und Arbeitsergebnisse, sondern auch die zugehörigen Prozesse in den Blick zu nehmen. Die meisten Beschreibungen und Modelle des Problemlöseprozesses orientieren sich an den vier Phasen von Pólya (1949) (siehe Abb. 1). Studien zu Problemlöseprozessen ergaben u.a., dass viele Lösungsversuche schon an mangelnder Aufgabenanalyse scheitern (vgl. Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 100) und dass eine Rückschau im Sinne Pólyas nur selten auftritt (vgl. ebd.). Schoenfeld (1985; 1992) hat einen bestimmten Typ erfolgloser Problemlöseprozesse herausgearbeitet, den er „*wild goose chase*“ nannte und wie folgt umschreibt:

“[...] I had analyzed more than 100 protocols of students working nonstandard problems [...], where the context did not suggest standard techniques for solving the problem. Approximately 60 % of the protocols were of the type, where the students picked a solution direction, and then pursued that approach until they ran out of time. In contrast, successful attempts came in a variety of shapes – but they contained a significant amount of self-regulatory activity.” (Schoenfeld 1992, S. 195)

Die Studie

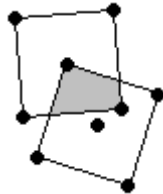
Ziel meines Dissertationsprojektes ist die Bereitstellung eines Verfahrens, das die Analyse von Problembearbeitungsprozessen ermöglicht, sowie die Beantwortung der **Fragen**, (1) wie die entsprechenden Prozesse von Fünftklässlern verlaufen, (2) ob sich das Schema von Pólya (1949) zur Beschreibung tatsächlicher Prozesse eignet und (3) ob diese Betrachtungen ausreichen, Erfolg / Misserfolg der SchülerInnen zu erklären.

Zur Beantwortung der Forschungsfragen dienen uns Videoaufnahmen, die im Rahmen der „**Mathe AG an der Leibniz Universität**“ (MALU) gewonnen werden. Es handelt sich dabei um ein seit November 2008 laufendes Enrichment-Projekt für interessierte Fünftklässler hannoveraner Gymnasien. Die SchülerInnen arbeiten etwa die Hälfte der 90-minütigen AG-Zeit in Paaren oder alleine an Problemaufgaben. Zwei der – insgesamt mehr als 30 – Aufgaben, die gut differenzieren, werden im Folgenden betrachtet:

Zwei Bierdeckel

Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.

Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche grau gekennzeichnet.]



Quelle: Schoenfeld (1985, S. 77)

Marcos Zahlenreihe

Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von *jedem* Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt:



Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6, 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen ($10+6=16$) als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl ($6+3=9$).

Quelle: Fürther Mathematikolympiade 2005/6, 1. Runde

Methoden

Die Bearbeitungsergebnisse – die *Produkte* – unserer SchülerInnen wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die einzelnen Aufgaben konkretisiert wurden: (1) *Kein Ansatz*, wenn überhaupt kein sinnvoller Ansatz festgestellt werden konnte. (2) *Einfacher Ansatz*, wenn die Aufgabe zu Teilen richtig bearbeitet wurde. (3) *Erweiterter Ansatz*, wenn das Problem zu großen Teilen korrekt bearbeitet wurde. Und (4) *Korrekt er Ansatz*, wenn das Problem vollständig begründet gelöst wurde.

Gaben zwei SchülerInnen eines Paares unterschiedliche Produkte ab – was durchaus vorkam –, wurden diese einzeln bewertet. Die Einteilung in die Erfolgskategorien erfolgte unabhängig von mir und einer anderen Doktorandin, wobei wir in allen Fällen übereinstimmten. Für die weitere statistische Auswertung wurden die ersten und die letzten beiden Kategorien zu *Kaum Erfolg* bzw. *Erfolg* zusammengefasst.

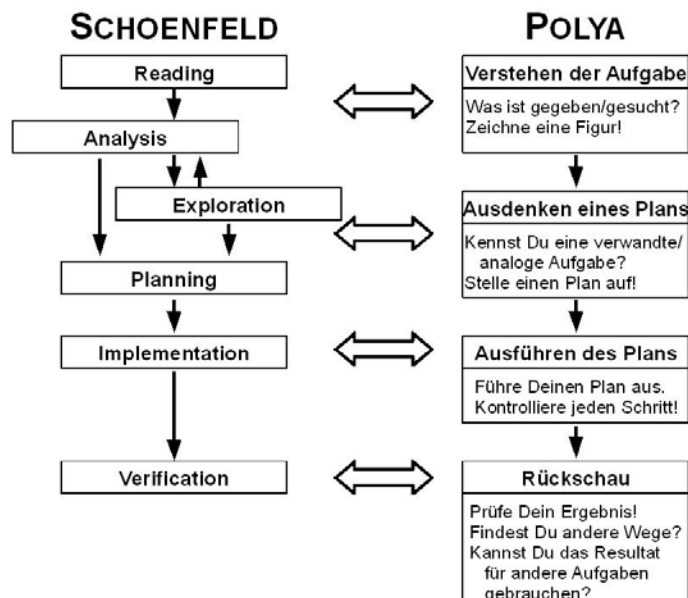


Abbildung 1: Zuordnung Schoenfeld – Pólya

Das Verhalten der SchülerInnen – die *Prozesse* – wurde mithilfe der für diese Studie adaptierten *Protocol Analysis* von Schoenfeld (1985, Kap. 9)

kodiert. Die Prozesse wurden eingeteilt in sog. *Episoden*, „period[s] of time during which an individual or a problem-solving group is engaged in one large task [...] or a closely related body of tasks in the service of the same goal“ (ebd., S. 292). Schoenfeld hat sechs Episodentypen beschrieben, die sich den vier Pólya’schen Phasen zuordnen und dadurch konkretisieren lassen (vgl. Abb. 1) und die bis auf *Reading* die inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Problem beschreiben. Im Rahmen unserer Studie wurden weitere Episodentypen wie *Abschweifung* identifiziert, die nicht-inhaltsbezogenes Verhalten unserer Schüler beschreiben (vgl. Rott 2010), auf die in diesem Artikel aber nicht weiter eingegangen wird. Diese Einteilungen wurden von Hilfskräften und mir unabhängig durchgeführt und anschließend konsensuell validiert. Auch hier kam es vor, dass bei in Paaren arbeitenden Kindern voneinander abweichende Episoden kodiert wurden.

Ergebnisse

Da die vorliegenden Daten teilweise nominalskaliert sind, erfolgte die statistische Auswertung mithilfe eines Chi-Quadrat-Tests (vgl. Rasch et al. 2006, S. 186 ff.). Zunächst wird der von Schoenfeld beschriebene Zusammenhang zwischen geringem Bearbeitungserfolg und unreflektiertem Arbeiten untersucht (s.o.): Als *wild goose chase* wurden dabei alle Prozesse gewertet, in denen nur *Exploration* oder *Analysis & Exploration* kodiert wurde; alle übrigen Prozesse (also diejenigen, in denen auch *Planning* und/oder *Verification* etc. auftrat) wurden als *Sonstiges* zusammengefasst. Aufgetragen wurden die zugehörigen Häufigkeiten gegen den Erfolg; in den Zellen stehen die beobachteten Werte sowie die (mithilfe der Randsummen ermittelten) erwarteten Werte in Klammern.

Zwei Bierdeckel – Prozessverlauf				Marcos Zahlenreihe -- Prozessverlauf			
	<i>Kaum Erf.</i>	<i>Erfolg</i>	Summe		<i>Kaum Erf.</i>	<i>Erfolg</i>	Summe
<i>wild goose</i>	18 (15,6)	7 (9,4)	25	<i>wild goose</i>	6 (3,1)	1 (3,9)	7
<i>Sonstiges</i>	2 (4,4)	5 (2,6)	7	<i>Sonstiges</i>	8 (10,9)	17 (14,1)	25
Summe	20	12	32	Summe	14	18	32
$\chi^2 = 4,401$; $df = 1$; $p = 0,036 (< 0,05)$				$\chi^2 = 6,411$; $df = 1$; $p = 0,011 (< 0,05)$			
78 % <i>Wild goose chase</i> , davon knapp 3/4 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufg.				22 % <i>Wild goose chase</i> , davon 6/7 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe.			

Obwohl die Prozessverläufe natürlich aufgabenabhängig sind, konnte der Typ *wild goose chase* bei beiden Problemen identifiziert werden. Die beobachteten Häufigkeiten in der Hauptdiagonalen sind bei beiden Aufgaben größer als die erwarteten Werte (und entspr. geringer in der Nebendiagonalen); der χ^2 -Test bestätigt diesen Zusammenhang auf dem 5%-Niveau.

Anschließend wird der Zusammenhang zwischen zu geringer *Analysis* und ausbleibendem Aufgabenerfolg auf dieselbe Weise geprüft:

Zwei Bierdeckel – Verstehen der Aufg.				Marcos Zahlenreihe – Verstehen der A.			
	<i>Kaum Erf.</i>	<i>Erfolg</i>	Summe		<i>Kaum Erf.</i>	<i>Erfolg</i>	Summe
keine <i>Ana</i>	12 (8,75)	2 (5,25)	14	<i>Ana</i> ≤ 2:00	6 (4,4)	2 (5,6)	8
<i>Analysis</i>	8 (11,25)	10 (6,75)	18	<i>Ana</i> > 2:00	8 (9,6)	16 (12,4)	24
Summe	20	12	32	Summe	14	18	32
$\chi^2 = 5,723$; $df = 1$; $p = 0,017 (< 0,05)$				$\chi^2 = 4,233$; $df = 1$; $p = 0,040 (< 0,05)$			
44 % zeigten keine Bemühungen, die Aufg. zu verstehen, davon 6/7 ohne Erfolg.				25 % zeigten kaum Bemühungen, die Aufg. zu verstehen, davon 3/4 ohne Erfolg.			

Auch hier zeigt sich aufgabenabhängiges Verhalten (bei der Zahlenreihe-Aufgabe haben alle Kinder zumindest kurz ein Verhalten gezeigt, das als *Analysis* kodiert wurde); aber bei beiden Problemen konnte ein signifikanter Zusammenhang zwischen keiner / kaum *Analysis* und geringem Bearbeitungserfolg nachgewiesen werden.

Abschließend noch eine kurze Betrachtung der Episode *Verification*:

Zwei Bierdeckel – Rückschau	Marcos Zahlenreihe – Rückschau
Nur gut 10 % (4/32) zeigten Bemühungen, die Aufgabe zu verifizieren; alle 4 erfolgreich.	Nur knapp 10 % (3/32) zeigten Verhalten der Verifikation; zwei davon vom Beob. beeinflusst, diese beidem kaum erfolgreich

Es lässt sich – den Erwartungen entsprechend – wenig Bedürfnis bei den Kindern feststellen, Rückschau (im Sinne Pólyas) zu halten. Diejenigen, die das freiwillig tun, sind hierbei ausnahmslos erfolgreich.

Geplant sind u.a. die Auswertungen zu Prozessen weiterer Aufgaben.

Literatur

- Pólya, George (1949): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.
- Rasch, B.; Frieze, M.; Hofmann, W.; Naumann, E. (2006): *Quantitative Methoden – Band 1 – Einführung in die Statistik*. Heidelberg: Springer. 2., erweiterte Auflage.
- Rott, Benjamin (2010): Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern. In: *BzMU 2010*.
- Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, Alan H. (1992): On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them to? In: *The Journal of the Learning Sciences* 2 (1992), Nr. 2. S. 179 – 214.
- Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred & Wolpers, Hans (2000): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Band 1*. Braunschweig: Vieweg. 2. durchgesehene Auflage.