Thomas ROYAR, Liestal (Schweiz)

Zum Operationsverständnis der Grundrechenarten

Problem der Definition

Obwohl in der Literatur wiederholt von „Operationsverständnis“ gesprochen wird (z. B. Gaidoschik 2003, Schipper 2003, Schäfer 2005, Kaufmann & Wessolowski 2006, Schütte 2008), fällt auf, dass eine genauere Definition fehlt. Stattdessen finden sich Beschreibungen, wozu es befähigt („Operation sense enables students to apply and use operations with meaning and flexibility.” Huinker 1993, S. 80) oder wie man es erkennt („Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen „Sprachen“ hin- und herübersetzen zu können, also Verbindungen herstellen zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-)Situationen und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen.“ (Gerster & Schultz o. J. , S. 388).

Verständnis von Mathematik offenbart sich im Gebrauch von Sprache

Alle Ausdrucksmittel, derer man sich bedient, um mathematische Zusammenhänge auszudrücken, also zum Beispiel Handlungen und Prozeduren, Zeichnungen und Skizzen, Umgangssprache und Formelsprache, lassen sich in einem erweiterten Sinne als „Sprachen“ bezeichnen, so wie ja auch von „Gebärdensprache“ oder „Zeichensprache“ die Rede ist. Ob jemand eine Sprache „beherrscht“, offenbart sich nur im Dialog. Für die Mathematik gilt: Kommunikationspartner, die sich mathematischer Sprachen bedienen, müssen, um sich verständigen zu können, in ihrer Einschätzung darüber übereinstimmen, worauf sich das Gesprochene oder Geschriebene bezieht. „Für fundamentale Wissenskonstruktionen“ bedarf es des „konstruktiven Austausch(s) mit anderen Personen“. (Brandt & Nührenbörger 2009, S. 30)

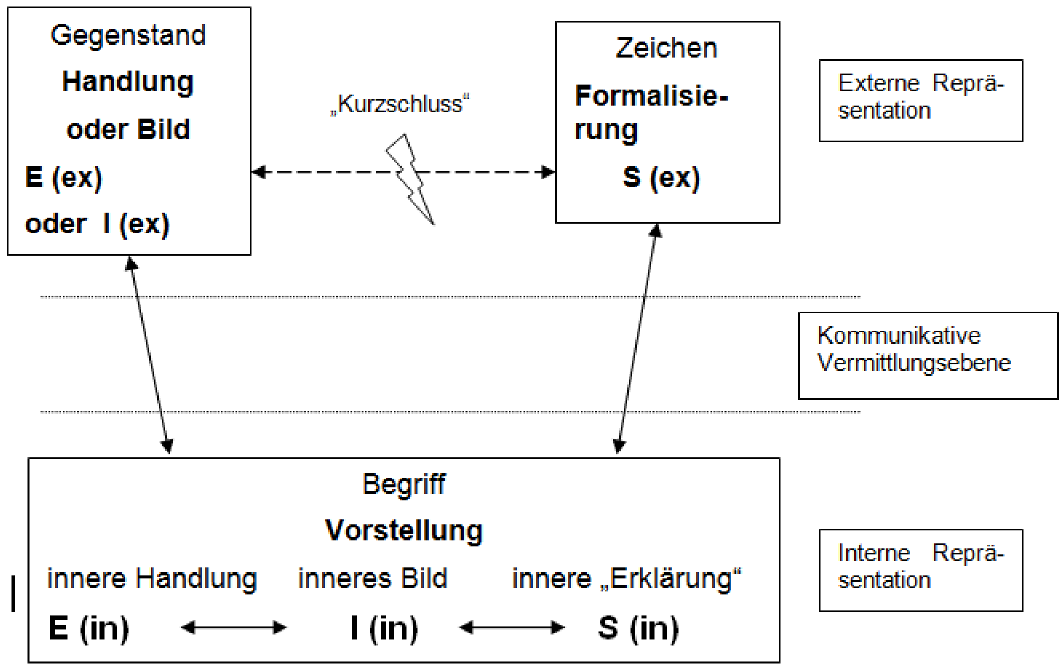
Es erscheint dabei vernünftig anzunehmen, dass normalerweise während des Lernprozesses dieser Austausch zunehmend besser gelingt, auch durch den Gebrauch mehrerer „Sprachen“. „In verschiedenen Darstellungen sind unterschiedliche Beziehungen kodiert, durch den Wechsel kann ein mathematisches Problem tiefer und umfassender durchdrungen werden.“ (Böttinger 2007, S. 295)

Verschiedene „Sprachen“ und die „Übersetzungen“ zwischen ihnen

Sprache ist gleichfalls Mittel zur Vorstellungsbildung als auch zur Darstellung eigener Vorstellungen. In der Mathematik ist in Anlehnung an BRUNER der Begriff der „Repräsentation“ gebräuchlich. Problematisch dabei erscheint aber, „dass oftmals die Unterscheidung zwischen externen und internen Repräsentationen nicht beachtet und damit der Typ der externen Repräsentation (Darstellung) nicht sauber von dem Typ (oder den Typen) der dadurch induzierten, internen Repräsentationen (Vorstellungen) unterschieden wird.“ (Schwank 2008, S. 174)

Unterscheidet man diese, so kommt man nicht zu den drei „Ebenen“ des enaktiven, ikonischen und symbolischen (als sogenanntes „EIS-Prinzip“ historisch verankert), sondern zu Vorstellungen als internen Repräsentationen (in Form von verinnerlichten Handlungsabläufen, inneren Bildern oder symbolisch kodiert) und Darstellungen als externe Repräsentationen (in Form von ausgeführten Handlungen oder produzierten Bildern oder – am stärksten konventionalisiert – in Form symbolischer Zeichen). Mathematische Zusammenhänge sind in ihrem Kern formal in der am besten kommunizierbaren Form kodiert: Der Term 3 + 2 ist global besser zu „verstehen“ als jede andere Darstellungsform, weshalb die externe symbolische Repräsentation zentral ist.

In Anlehnung an das „epistemologische Dreieck“ (Steinbring 1999) (Gegenstand, Zeichen, Begriff) lässt sich ein Modell beschreiben, das zwischen externer und interner Repräsentation unterscheidet und die Problematik „kurzschlüssiger Übersetzungen“ ohne gedankliche Durchdringung illustriert. Verständnis kann nicht extern durch Variation der Veranschaulichungen gewissermaßen „erzeugt“ werden, sondern nur durch kommunikativen Austausch über unterschiedliche Darstellungen und korrespondierende Vorstellungen angestrebt werden („Pfeile“ im Modell).



„Steckt“ Mathematik bereits in der Handlung oder im Bild?

Mathematische Begriffe beruhen grundsätzlich auf Verabredung („assignation“) und können nicht „von sich aus“ aus Handlungen oder Bildern „herausgelöst“ werden.

„Nur im Wechsel von Sinneswahrnehmung und geistiger Verarbeitung, von Konkretion und Abstraktion wächst Erkenntnis. Das gilt für alle Altersstufen. Sobald das Kind sprechen lernt, nimmt dieser wechselseitige Prozess einen stürmischen Aufschwung, und er führt nicht etwa "von der Anschauung zum Begriff", sondern von einfachen zu immer komplexeren Anschauungen und Begriffen.“ (Glöckel 1996, S. 289)

Eine “interne Repräsentation” von Grundrechenarten kann es streng genommen nicht geben, so lange das konzeptionelle Wissen hierüber nicht aufgebaut ist, denn Grundrechenarten sind ihrem Wesen nach eben keine sinnlich wahrnehmbaren Phänomene, sondern Erkenntnisse.

Was ist intern repräsentiert, was stellt sich ein Kind vor, das rechnet? Möglicherweise Handlungen oder Ereignisse, möglicherweise aber auch gar nichts außer dem „richtigen“ Ergebnis – und dieses vielleicht nur als sprachliches bzw. grafisches Zeichen ohne weitere Bedeutung. Erst wenn interne und externe Repräsentationen sinnvoll aufeinander bezogen werden können, ist es sinnvoll, davon zu sprechen, dass ein Kind über „Operationsverständnis“ verfügt. „Externe“ Repräsentationen sind Darstellungen, die von Dritten mit Kommunikationsfunktion geschaffen werden. Erst wenn sich „Kommunikationskreise schließen“ (Greenspan 2001), dann gelingt Verständigung, die gleichzeitig Voraussetzung und Ergebnis von Verständnis ist. Daher sei folgende Definition des Operationsverständnisses zur Diskussion gestellt:

Operationsverständnis ist die Fähigkeit, eine eigene Vorstellung von der Bedeutung einer formalisierten Darstellung durch Bezug auf Handlungen oder Bilder so zu kommunizieren, dass sie allgemein konsensfähig ist.

Ergebnisse einer eigenen Untersuchung

In einer eigenen Untersuchung wurde der Frage nachgegangen, welche Rechenterme Kinder animierten „Plättchenbildern“ zuordnen und wie sie umgekehrt Rechenterme mit Hilfe von Plättchen erklären. Dabei wurde festgestellt, dass bei einem hohen Prozentsatz von Kindern diese Zuordnungen und Erklärungen nicht den konventionell zu erwartenden entsprachen. So waren beispielsweise von 117 untersuchten Drittklässern, denen in einer einfachen Computeranimation drei mit roten Punkten dargestellte „Würfelfünfer“ sukzessiv eingeblendet wurden, so dass nacheinander 5, 10 und schließlich 15 Punkte zu sehen waren, über 20 nicht in der Lage, dieser Animation eine „passende Malaufgabe“ zuzuordnen: 13 Kinder interpretierten die Bilderfolge als „10 · 5“ oder „5 · 10“ und auch Antworten wie „10 · 15“ oder „12 · 3“ wurden gegeben: „Übersetzt“ wurden lediglich Punkteanzahlen in Ziffern, die Multiplikation als mathematische Operation konnte nicht „hineingesehen“ werden. Variationen vermeintlicher „Darstellungen“ einfacher Terme mit den vier Grundrechenarten führten im Wesentlichen zum immer gleichen Ergebnis: Bis zu 20% der Kinder sind noch zu Beginn der dritten Klasse nicht in der Lage, einfachsten Rechenausdrücken eine Bedeutung zuzumessen, die in Expertenratings als „adäquat“ eingestuft wurden. Wurden die Kinder umgekehrt aufgefordert, mit Hilfe von Plättchen einem fiktiven Erstklässer beispielsweise zu „erklären“, weshalb das Ergebnis der Aufgabe 6 – 4 „zwei“ lautet, zeigte sich ebenfalls, dass mehr als jedes fünfte Kind zu Beginn der dritten Klasse nicht in der Lage war, 6 Plättchen und 4 Plättchen dazu in irgendeiner anderen Form aufeinander zu beziehen, als sie einfach nebeneinander zu legen. Diese Kinder verneinten auch die anschließende Frage, „ob man hier jetzt sehen oder zeigen könne, dass das Ergebnis der Aufgabe zwei ist“.

Literatur (Auswahl)

Böttinger, Claudia: Ein Kategoriensystem beim Wechseln von Repräsentationsebenen. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim, Berlin 2007, S. 295–298.

Brandt, Birgit/Nührenbörger, Marcus: Kinder im Gespräch über Mathematik. In: Die Grundschulzeitschrift, 23. Jg. 2009, H. 222.223, S. 28–33.

Gerster, Hans Dieter/Schultz, Rita: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Online verfügbar unter http://opus.bsz-bw.de/phfr/ volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf

Glöckel, Hans: Vom Unterricht. 3., überarb. und erg. Aufl. Bad Heilbrunn Obb. 1996.

Greenspan, Stanley I./Wieder, Serena/Simons, Robin: Mein Kind lernt anders. Ein Handbuch zur Begleitung förderbedürftiger Kinder. Düsseldorf 2001.

Schipper, Wilhelm: Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Baum, Monika/Wielpütz, Hans (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze 2003, S. 221–237.

Schwank, Inge: Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In: Kliemann, Sabine (Hrsg.): Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I. Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. Berlin 2008, S. 174–185.

Steinbring, Heinz: Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 1, 2000, S. 28-49.