Christian RÜEDE, Universität Zürich

Strukturieren von Termen und Gleichungen als Bedeutungskonstruktion

Zahleiche empirische Untersuchungen belegen die zentrale Rolle des *Strukturierens* beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen. Allerdings fehlt eine theoretische Fundierung des Begriffs des Strukturierens algebraischer Ausdrücke. In diesem Beitrag wird daher versucht, diese Lücke zu schließen.

Ausgangspunkt sind vier Prämissen. Sie drücken aus, dass die Schüler und Schülerinnen beim Umformen von Termen und Gleichungen eine interne Semantik (Kieran, 2006) – beim Modellieren realer Sachzusammenhänge hingegen eine externe Semantik – entwickeln sollen und nicht nur in Päckchen von Aufgaben Muster erkennen müssen, sondern auch in einzelnen Aufgaben.

1. Eine Struktur eines Terms oder einer Gleichung macht „strategische" Vorstellungen einer Person sichtbar, vermittelt also zwischen einer algebraischen Zeichenreihe und Regeln. Sie bringt die Vorstellungen der Person darüber zum Ausdruck, *wann* ein Ausdruck *wie* umgeformt werden kann.

2. Es gibt nicht nur eine einzige Struktur eines Terms, vielmehr gibt es viele individuelle (angemessene) Strukturen eines Terms. Die Struktur ist kein mathematisches Prinzip, das einem Term zugeschrieben werden kann, sondern eine Sichtweise, wie eine Person einen Term liest.

3. Strukturieren basiert auf Kognition *und* Wahrnehmung. Strukturieren ist ein Prozess, der zur internen (strukturanalogen) Repräsentation des algebraischen Ausdrucks führt.

4. Strukturieren ist ein Prozess, der von impliziten Normen (*metarules*) geleitet wird.

Ein Modell zur Beschreibung des Strukturierens

Strukturieren wird in diesem Betrag mit Hilfe von vier Komponenten, der *Anwendbarkeitsbedingung*, der *Abschlussbedingung* (Sfard, 2008), der *Struktur* und der *Konsequenz*, beschrieben (vgl. *Abb. 1*). Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sind Auffassungen einer Person darüber, wann eine bestimmte Struktur hergestellt werden soll. Sie hängt beispielsweise ab von der vorgelegten Gleichung, den Erfahrungen der Person und den Umständen, unter denen die Gleichung gelöst werden muss. Im Speziellen handelt es sich bei Anwendbarkeitsbedingungen um Auffassungen von Situationen, in denen bestimmte Strukturen hergestellt werden könnten. Abschlussbedingungen entsprechen den Auffassungen darüber, ob an einer hergestellten Struktur festgehalten werden soll oder nicht. Die Anwendbarkeitsbedingung führt zu einer bestimmten Struktur und die Abschlussbedingung bestimmt, ob diese Struktur akzeptiert oder verworfen werden soll. Etwas salopper formuliert spiegelt die Anwendbarkeitsbedingung die Erwartung der Person in dieser Situation und die Abschlussbedingung ihre Einschätzung des Resultats.

Beantworten die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung die Frage nach dem Wann der Struktur, beantwortet die Struktur die Frage nach dem Wie. Eine Struktur ist eine Auffassung eines Terms oder einer Gleichung als *Relation*. Sie besagt, welche einzelnen Teilterme des Terms oder der Gleichung wie aufeinander bezogen sind. Schließlich impliziert die Struktur eine Konsequenz. Diese manifestiert sich typischerweise als Umformung und erlaubt die Beurteilung davon, inwiefern die Abschlussbedingung erfüllt ist oder nicht.

Das hier beschriebene Wechselspiel zwischen Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie Struktur und Konsequenz macht explizit, was gemeint sein kann, wenn das Wissen um den Gebrauch eines Terms mit dem Erfassen seiner Bedeutung gleich gesetzt wird. Ein solch pragmatischer Bedeutungsbegriff wird hier konkret umgesetzt, indem nach dem Wann und Wie der Struktur und nach ihrer Konsequenz gefragt wird. Wer sich während des Umformens fragt, wann er wie strukturieren soll und welche Konsequenzen sich daraus ergeben, konstruiert dadurch die *Bedeutung* des Terms.

Ein Beispiel: Wie ein Experte eine Gleichung strukturiert

Das oben eingeführte Modell wurde zur Analyse von Interviews genutzt, in denen Probanden vorgelegte Gleichungen umformen sollten. Dies wird hier an einem Beispiel illustriert. Einem Experten (langjähriger Mathematiklehrer an einem Schweizer Gymnasium, zugleich Praxislehrer und Lehrbuchautor) wurde die Gleichung $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6}=\frac{12x+18}{8x+12}$ vorgelegt, mit der Aufforderung, eine geeignete Umformung vorzuschlagen. Der Experte wollte anfangs die Nenner wegmultiplizieren. Er verwarf dies dann, da er die kubische Form der resultierenden Gleichung erkannte. Dieser erste, verfahrenbasierte Schritt wird hier aus Platzgründen nicht näher analysiert, sondern sein zweiter, sein verfahrenbildender. Dieser wird zuerst beschrieben. Dazu dienen die oben eingeführten Begriffe. In Abbildung 1 ist die aus dem Interview rekonstruierte Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie Struktur und Konsequenz dieses zweiten Schritts angegeben. Diese Beschreibung wird nun interpretiert.

Anwendbarkeitsbedingung	*Struktur*	*Konsequenz*	*Abschlussbedingung*
Analyse des ersten Versuchs ergibt, dass das Wegschaffen der Nenner zu mühsam ist. Als Alternative schaue ich zuerst die Brüche einzeln an. Ich vermute wegen der Kubizität, dass sie einzeln vereinfachbar sind.	$\begin{matrix} 20x^3 \leftrightarrow 30x^2 \\ 4x \leftrightarrow 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 12x \leftrightarrow 18 \\ 8x \leftrightarrow 12 \end{matrix}$ Entdeckung horizontaler Verhältnisse, die vertikal aufeinander bezogen werden. „20, 30 zum Beispiel beim ersten Bruch, stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie 4 zu 6. Oder eben x^3 zu x^2 wie x zu 1, oder 12 zu 18 wie 8 zu 12. Also im Hinterkopf habe ich, so denke ich, das Ausklammern schon gesehen.“	Brüche links und rechts sind je mit Linearfaktor kürzbar.	Evaluation. Das Wegschaffen der Nenner ist zu zeitaufwändig. „Dann habe ich es verworfen, weil das nicht sehr lustbetont ist, es ist eine Zeitabschätzung vermutlich.“ Meine Vermutung war gerechtfertigt. „Also das ist der Weg, den ich jetzt einschlagen würde.“

Abbildung 1: Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung, Struktur und Konsequenz des Experten beim zweiten Strukturierungsschritt. Die Aussagen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Passagen aus dem Interview.

Charakterisierend für den Experten ist, dass er das Verwerfen des Wegmultiplizierens der Nenner analysierte. Er untersuchte, warum dieses Verfahren zu zeitaufwändig würde und folgerte schließlich, dass die Kubizität durch das interne Vereinfachen der Brüche verschwinden müsse. Das Wann bestand also im Verwerfen eines Standardverfahrens und im Schluss auf das interne Vereinfachen der beiden Brüche. Unter dieser Leseperspektive schaute er dann die Gleichung an, insbesondere anders als beim Wegmultiplizieren der Nenner. Dazu wechselte er die Blickrichtung. Nicht mehr Bezüge zwischen den beiden Nennern waren wichtig, sondern Bezüge zwischen dem Zähler und dazugehörigen Nenner. Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung zeigt, dass er dabei auf die Anwendbarkeit und nicht auf die Anwendung eines Vereinfachungsverfahrens fokussierte. Er vereinfachte die Brüche nicht, sondern überprüfte, ob sie sich vereinfachen lassen.

Aus diesem Grund schaute er auf Zähler und Nenner links und auf Zähler und Nenner rechts. Diese Blickrichtung einerseits und Vorstellungen des Experten über den Zusammenhang von Verhältnissen, Linearfaktoren und Kürzen andererseits führten auf die Struktur, also auf das Wie.

Der Experte behandelte die Gleichung nahezu wie eine Tabelle. Wichtig wurden die einzelnen Summanden und horizontalen Bezüge zwischen ihnen in der Form von Verhältnissen, die schließlich vertikal aufeinander bezogen wurden. Die so hergestellte Struktur macht Vorstellungen des Experten über die Vereinfachbarkeit von Brüchen sichtbar, in ihr kommt das Wie zum Ausdruck. Charakteristisch für den Experten ist, dass er Bezüge herstellte, die über die von den Operationszeichen gegebenen hinausgingen. Die Konsequenz bestand in der Gleichheit der Verhältnisse und im resultierenden Schluss, dass die beiden Brüche intern mit einem Linearfaktor gekürzt werden können.

In der Abschlussbedingung kommt der explorative Charakter des Strukturierens unseres Experten am deutlichsten zum Ausdruck. Der Experte diskutierte die beiden Strukturen. Er beurteilte sie bezüglich der Kriterien der Einfachheit (Anzahl Schritte), Zeitaufwand und Eleganz (Lustbetontheit). Erst in dieser Abschlussbedingung wird das Wann der Struktur definitiv geklärt.

Fazit

Dieser Beitrag dokumentiert die Auseinandersetzung eines Experten mit dem Wann und Wie einer Struktur. Das Lösen der Gleichung erscheint nicht als mechanische Anwendung von Rechengesetzen und Standardverfahren, vielmehr als ein Ringen um eine geeignete Struktur. Dadurch erschafft sich der Experte die Bedeutung der Gleichung. Um diesen wichtigen Aspekt beim Lösen einer Gleichung zu beschreiben, erweisen sich die Konstrukte der Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie der Struktur und der Konsequenz als äußerst hilfreich.

Literatur

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Guitérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sensepublishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.