Ingolf SCHÄFER, Göttingen

Vorstellung von Mathematiklehramtsstudieren zur Stetigkeit

Eine typische Vorstellung zur Stetigkeit, die in der Schule erworben wird, ist sicher die eines Graphen, den man in einem Zug durchzeichnen kann ohne den Stift abzusetzen. In diesem Beitrag geht es um die Frage, welche zusätzlichen Vorstellungen es gibt und inwieweit zukünftige Lehrkräfte diese selbst haben oder mit ihnen umgehen können.

Vorstellungen zur Stetigkeit in der Literatur

Wir beschränken uns hier auf zwei verschiedene Ansätze zum Thema Vorstellungen: das Konzept der Grundvorstellungen im Sinne von vom Hofe (1995) und die von Tall und Vinner (1981) eingeführten Begriffe *concept definition* und *concept image*. Bei den letzteren handelt es sich um einen kognitiv motivierten Ansatz, Vorstellungen zu mathematischen Begriffen zu fassen. Unter *concept image* verstehen Tall und Vinner „the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes." Im Gegensatz dazu ist die *concept definition* eine verbale Beschreibung, die einen Begriff definiert.

In ihrer Untersuchung von 41 Schülerinnen und Schülern, die einen A-level Mathematikkurs in den USA besuchten und deren Noten entweder „gut" oder „sehr gut" waren, fanden Tall und Vinner die folgenden drei *concept images:* „Der Graph ist in einem Stück gegeben", „Die Funktion ist durch eine Formel gegeben" (d.h. ein geschlossener Ausdruck ohne Fallunterscheidung) und „Es gibt keine Sprünge". Tall und Vinner sehen in diesen *concept images* eine wesentliche Hürde für das Verstehen der im Kurs verwendeten Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit. Des Weiteren weisen sie auf die in allen diesen Vorstellungen implizit liegende Annahme des Fehlens von Definitionslücken hin.

In neueren Arbeiten propagiert Tall (2009) das *concept image* „lokal flach" für Stetigkeit, also in genügender Vergrößerung scheint der Graph einer nicht zu komplizierten stetigen Funktion flach zu verlaufen. Inwieweit dieses mentale Bild des Stetigkeitsbegriffs allerdings empirisch vorhanden ist, bleibt unklar. Insbesondere scheint es sehr an die Behandlung mit grafischen Taschenrechnern oder mit Computer-Software gebunden zu sein, die entsprechende Graphen zeichnen und vergrößern können.

Das aus der stoffdidaktischen Tradition stammende Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) bietet hier einen weiteren Ansatz. Vereinfacht zusammengefasst sind Grundvorstellungen die Vorstellungen, die man dazu benötigt, eine Sachsituation in Mathematik umzusetzen und umgekehrt.

Durch Analyse der einschlägigen Lehrbücher der Analysis finden sich m.E. drei mögliche Grundvorstellungen für stetige zahlwertige Funktionen, die auf Teilbereichen der reellen Zahlen definiert sind:

1. Kontrollierte Stabilität unter Wackeln an einem Punkt (ableitbar aus der Epsilon-Delta-Definition)
2. Approximierbarkeit an einem Punkt (ableitbar aus der Folgendefinition)
3. Zusammenhang des Graphen (ableitbar aus der Zwischenwerteigenschaft)

Dabei handelt es sich bei den ersten beiden um lokale Vorstellungen, während die letzte globaler Natur ist. Die topologische Definition über Urbilder offener Mengen in diesem Fall keine Grundvorstellung, denn die damit eventuell verknüpften Handlungsvorstellungen stimmen zumindest lokal mit denen des „Wackelns“ überein.

Aufbau der Studie

Die nachfolgend beschriebene Studie wurde mit 54 Studierenden des gymnasialen Lehramts für Mathematik in deren zweiten Semester im Rahmen der Vorlesung „Differential- und Integralrechnung 2“ per Fragebogen durchgeführt. Die Forschungsfragen waren dabei: Welche Vorstellungen haben Lehramtsstudierende zur Stetigkeit und inwieweit akzeptieren sie gewisse Vorstellungen zur Stetigkeit und können damit argumentieren?

Der Fragebogen bestand aus der Aufforderung eine eigene Vorstellung zur Stetigkeit zu formulieren, verschiedene Vorstellungen zur Stetigkeit auf einer Likert-Skala nach persönlicher Akzeptanz zu bewerten und mit möglichst vielen verschiedenen Vorstellungen zu argumentieren, ob bei drei Funktionen in einem bestimmten Punkt Stetigkeit vorliegt.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Fragebogens kurz dargestellt. Die Frage nach der Vorstellung zur Stetigkeit ergab dabei (Tabelle 1), dass die Grundvorstellungen im Wesentlichen die Antwortkategorien abdecken, wenn man die Vorstellung „keine Sprünge“ als Unterkategorie von Zusammenhang und „rechtsseitiger Limes=linksseitiger Limes“ als Approximierbarkeit deutet.

Kategorie	Absolut	Prozentual
Kontrolliertes Wackeln	14	26%
Approximierbarkeit	8	15%
Zusammenhang des Graphen	44	81%
Urbilder offener Mengen offen	2	4%

Tabelle 1: Kategorien bei Frage nach Vorstellungen zur Stetigkeit (n=54, mehrfache Nennung möglich)

Die Frage, inwieweit die Studierenden mehrere Vorstellungen äußeren, ergibt folgendes Bild: 5 (9%) Studierende haben keine Vorstellung geäußert, 31 (57%) haben nur eine Vorstellung geäußert (mehrheitlich dabei aus der Zusammenhang-Kategorie) und 18 (33%) Studierende äußerten mehr als eine Vorstellung. Für die Kategorisierung spielte dabei keine Rolle, ob die Vorstellung auch korrekt formuliert war. In dieser Hinsicht war das größte Problem, dass Funktionen mit Definitionslücken von 17% der Teilnehmer explizit als unstetig angesehen wurden.

Wie in Diagramm 1 zu sehen, sieht es bei der Akzeptanz bestimmter Vorstellungen etwas anders aus: Durchzeichenbarkeit wird sehr stark akzeptiert, die Approximationsvorstellung noch mehrheitlich akzeptiert, während das kontrollierte Wackeln sogar etwas mehr abgelehnt wird.

Diagramm 2 zeigt, inwieweit die Studierenden verschiedene Vorstellungen zur Stetigkeit bei konkreten Funktionen nutzen können, wobei Untervorstellungen extra aufgeführt wurden. Die Aufgabenstellung war dabei so, dass dazu aufgefordert wurde, mit möglichst vielen verschiedenen Vorstellungen zu argumentieren. Bei F1 handelt es sich um eine Treppenfunktion in der Sprungstelle, bei F2 und F3 um die Funktion, welche die Identität auf den irrationalen Zahlen und Null auf den rationalen Zahlen ist, im Punkt 0 (bei F2) beziehungsweise 1 (bei F3). Offenbar gelingt der Mehrzahl den Studierenden eine korrekte Argumentation nur bei der ersten Funktion, während bei F2 und F3 nur wenige Antworten vorliegen.

Diskussion

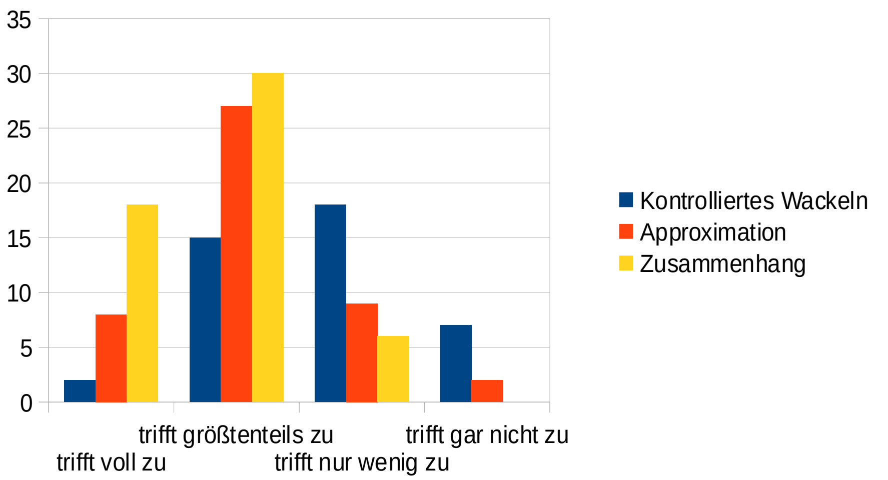
Zusammengefasst zeigt sich, dass zwei Drittel der Studierende nur die Zusammenhangs-Vorstellung nennen und die meisten mit mehreren Vorstellungen nur in der Situation eines einfachen Sprungs umgehen können. Bemerkenswert ist, dass die Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit scheinbar nicht als Träger von Vorstellungen oder Anschauen erkannt wird. Hier liegt ein Potenzial, das in den Vorlesungen zur Analysis nicht angesprochen wurde. Berücksichtigt man die für das Abitur geforderten Kompetenzen zur Stetigkeit in einigen Bundesländern stellt sich die Frage, ob die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer diese auch kompetent unterrichten können.

Literatur

Tall, D. (2009): Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM 41 (4), 481–492.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum



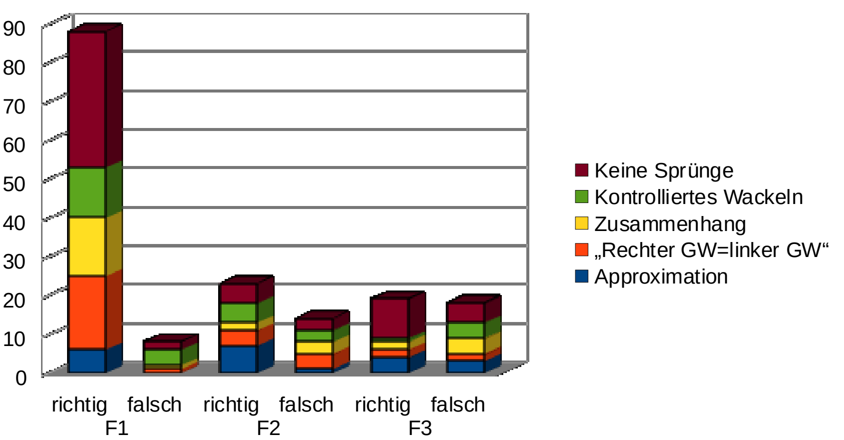


Diagramm 1: Akzeptanz von Vorstellungen zur Stetigkeit (n=54)

Diagramm 2: Vorstellungen bei Lösung von Stetigkeitsfragen (n=54, mehrfache Antworten möglich)