Thomas SCHILLER, Linz (A)

Wie der „dumme“ Computer Geraden in digitalen Bildern erkennen kann... Hough-Transformation als fächerübergreifendes Thema M/INF

Worum geht es?

Zu gutem Mathematikunterricht gehört das fächerübergreifende Arbeiten an Beispielen mit Realitätsbezug. Anhand derartiger Beispiele lernt man die sinnvolle Verwendung von mathematischen Mitteln kennen und erhöht zugleich die Motivation beim Lernen. Daher habe ich als Thema die automatisierte Strukturerkennung ausgewählt, die fächerübergreifend und projektartig in Mathematik und Informatik behandelt werden kann. Die Erkennung von Strukturen (z. B. Geraden) spielt überall eine Rolle, wo der Computer in Bildern Objekte (z. B. Schriftzeichen, Gesichter etc.) erkennen soll, z. B. beim automatisierten Identifizieren von Personen im eigenen elektronischen Fotoalbum oder bei der bei Handykameras der SchülerInnen integrierten Gesichtserkennungsfunktion.

Das menschliche Auge erkennt Strukturen (oder ganze Gegenstände) auch bei fehlenden zusammenhängenden Konturen, also wenn diese teilweise unvollständig vorliegen, weil sie etwa durch andere Gegenstände partiell verdeckt sind. (vgl. [Burger u. a._2006, S. 156]) Obwohl heute noch weitgehend unbekannt ist, wie die Mechanismen beim biologischen Sehen funktionieren, dass derartige Strukturen spontan erkannt werden können, gibt es eine mögliche Technik zur Lösung solcher Probleme mit dem Computer, nämlich die Hough- Transformation. [Burger u. a._2006, S. 156]

Bei der Aufbereitung dieser Methode zur Strukturerkennung für den Unterricht (sowohl für Mathematik als auch Informatik) wurde dem Thema entsprechend viel Wert auf Computereinsatz (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, dynamische Geometriesoftware, …) gelegt. Zum leichteren Verständnis wird bei den Beispielen zusätzlich der jeweilige fachliche Hintergrund erläutert.

Die Strukturerkennung ist im Unterricht aus Komplexitätsgründen am ehesten mit Schwarz- Weiß- Bildern durchzuführen, welche man in der Realität etwa mit Hilfe eines Kantenerkennungsalgorithmus erhält. Man geht also von einem Bild aus, das aus schwarzen Hintergrundbildpunkten besteht, auf denen sich weiße Pixel befinden, die ein Objekt (z. B. eine Gerade) darstellen. (Weiteres zur Kantenerkennung ist z. B. unter [Burger u. a._2006] bzw. [Tönnies_2005] (siehe z. B. [Schiller_2010]) zu finden.)

Hough- Transformation zur Geradenerkennung als Beispiel für die Erkennung von Strukturen

Eine Gerade im zweidimensionalen Raum wird durch zwei Parameter beschrieben, etwa in der Form $y = k * x + d$ (mit der Steigung k und der Höhe d des Schnittpunks der Geraden mit der y- Achse). Wenn nun eine Gerade durch zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ läuft, muss sie die beiden Gleichungen $y_1 = k * x_1 + d$ und $y_2 = k * x_2 + d$ für jeweils ein bestimmtes k und d erfüllen. [Burger u. a._2006, S. 156f]

Die Hough- Transformation geht von einem Kantenpixel aus und betrachtet alle möglichen Geraden durch diesen Punkt. Für jede Gerade G_i, welche durch einen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ läuft, gibt es geeignete Werte (k_i, d_i), welche die Gleichung $y_0 = k_i * x_0 + d_i$, welche die Gerade G_i repräsentiert, erfüllen. Für jede Gerade G_i gibt es nicht nur ein Lösungspaar (k_i, d_i), sondern eine Menge unendlich vieler Paare aus Steigungen k_i und zugehörigem d_i, also unendlich viele Geraden, die durch den Punkt P_0 gehen. [Burger u. a._2006, S. 157f]

Jedem Punkt P_s aus dem Bildraum wird also eine Gerade im Parameterraum zugewiesen. Umgekehrt wird jedem Punkt im Parameterraum eine Gerade im Bildraum zugeordnet. Genau dieser umgekehrte Weg ist für uns interessant, da wir uns für die Stellen interessieren, in denen sich Geraden im Parameterraum schneiden (Schnittpunkte im Parameterraum), denn zwei Punkte im Bildraum stehen für zwei Geraden im Parameterraum, deren Schnittpunkt (im Parameterraum) wiederum für eine Gerade im Bildraum steht, nämlich der Gerade, auf der die beiden ursprünglichen Punkte aus dem Bildraum liegen. Daraus folgt auch: Je mehr Geraden im Parameterraum sich in einem bestimmten Punkt schneiden, desto mehr Pixel liegen im Bildraum auf der entsprechenden Geraden. [Burger u. a._2006, S. 158f]

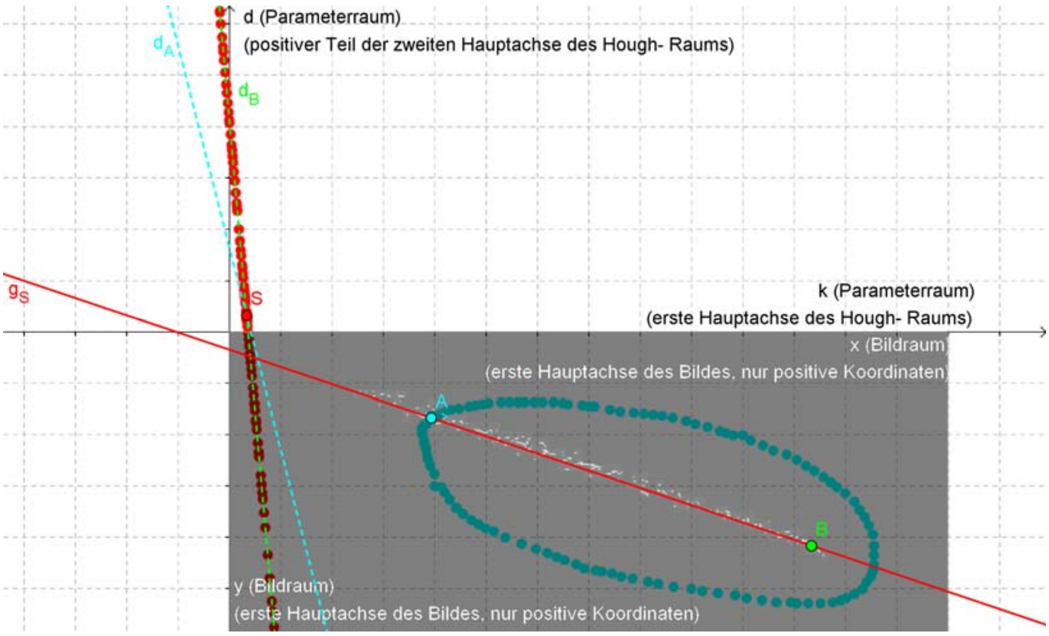
Um auffallende Geraden im Bild zu finden, müssen also im Parameterraum jene Punkte gefunden werden, in denen sich viele Geraden schneiden, was die Absicht der Hough- Transformation ist. [Burger u. a._2006, S. 159]

Modellierung in dynamischer Geometriesoftware

Die Situation lässt sich auch mit einer dynamischen Geometriesoftware veranschaulichen. Dies sollten die SchülerInnen selbstständig nach der Behandlung obiger Inhalte durchführen. Wichtig dabei ist die Verwendung von aussagekräftigen Variablennamen, da bei dieser Konstruktion zwei Koordinatensysteme in eines gezeichnet werden. Die Variablen und deren Zugehörigkeit zum jeweiligen Koordinatensystem bzw. die Zusammengehörigkeit von Objekten aus den unterschiedlichen Koordinatensystemen soll sofort gut erkennbar sein. Als Koordinatensystem für den Hough-

Raum bietet sich der erste, für den Bildraum der vierte Quadrant an, da bei digitalen Bildern der Ursprung üblicherweise im linken oberen Eck des Bildes liegt. Die Achsen sind natürlich entsprechend mehrfach zu beschriften (z. B. wird die x- Achse des Arbeitsblattes als k- Achse des Parameterraumes und als x- Achse des Bildraumes verwendet.

Wichtig ist, dass die SchülerInnen realisieren, dass sie bei der Konstruktion nicht die in der Theorie behandelten Formeln und funktionalen Zusammenhänge einfach 1:1 übernehmen, denn bei der hier vorgeschlagenen Wahl der Koordinatensysteme sind etwa positive y- Koordinaten aus Sicht des Bildes (Bildraum) aus Sicht der Geometriesoftware negativ. Das ist auch gut so, da dadurch mathematisches Verständnis gefordert und gefördert wird. Die SchülerInnen müssen sich in die Situation hineindenken und können nicht einfach blind auf (nicht verstandene) Formeln zurückgreifen.



In der dynamischen Geometriesoftware lassen sich Experimente durchführen, die zum Verständnis beitragen, was auf Grund der unterschiedlichen Betrachtungsweisen der Geradengleichung und der verschiedenen Koordinatensysteme nicht so einfach ist. „Wenn wir die Position des Punktes A verschieben, was passiert dann mit dem Schnittpunkt S?" Die SchülerInnen könnten dabei zuerst auf Grund der Theorie Überlegungen anstellen, was mit S genau passieren wird, bevor sie es ausprobieren. Umgekehrt macht es genau so viel Sinn, zuerst zu experimentieren und dann das Beobachtete mit Hilfe der Theorie zu begründen. Bei diesem Beispiel wird man feststellen, dass sich (wie in obiger Abbildung dargestellt) der Schnittpunkt S der zu den Bildpunkten A und B gehörigen Geraden d_A und d_B immer auf der Geraden d_B entlang bewegt, da durch die Veränderung von A sich die zugehörige Gerade d_A per Definition mit verändert, B und d_B hingegen unberührt bleiben. Im Bildraum werden durch das Verschieben von A um B herum alle möglichen Geraden, welche durch den Punkt B verlaufen können, erreicht. Genau diese Menge von Geraden durch einen Bildpunkt wird im Hough- Raum als Gerade d_B verstanden, weshalb sich der Schnittpunkt also entlang dieser Geraden d_B bewegt.

Die in der Konstruktion erkennbare Tatsache, dass die Punkte A und B tatsächlich auf der konstruierten Geraden liegen, lässt sich auch rechnerisch überprüfen. Dabei ist mit den allgemeinen Geradengleichungen zu rechnen. Für diesen Beweis ist der Einsatz eines Computeralgebrasystems empfohlen, er kann aber auch durch händische Termumformungen erfolgen.

Experimentieren mit einer fertigen Erkennungsroutine

Die Grundidee der Hough- Transformation lässt sich also im Unterricht durch selbstständiges Arbeiten, Überlegen, Visualisieren, Experimentieren und Diskutieren vermitteln. Greift man im Anschluss daran auf einen fertigen Programmcode (z. B. [Burger u. a._2009]) zurück, so kann man damit noch die Erkennung praktisch analysieren. Beispielsweise kann von einer Punktewolke ausgegangen werden, die einer Geraden ähnelt, und der Algorithmus darauf angewendet werden, um die Funktionsweise zu testen. Weitere Experimente, z. B. mit unterschiedlich intensiven Punktewolken (Geraden) verdeutlichen dann den SchülerInnen, wie schwierig es für den Computer letztendlich dennoch ist, die für den Menschen sofort sichtbaren tatsächlichen Geraden unterscheiden zu können. Je nach verwendeter Software, lassen sich die Ergebnisse bildlich betrachten, aber auch in Form von Parameterwerten ausgeben und (z. B. in einem Tabellenkalkulationsdokument) analysieren, um die in der Realität vorkommenden Probleme (z. B. Ungenauigkeiten auf Grund der Diskretisierung) genauer betrachten und verstehen zu können.

Literatur

[Burger u. a._2006] Burger, W.; Burge, M. J.: Digitale Bildverarbeitung, Eine Einführung mit Java und ImageJ, 2. Überarbeitete Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg 2005 und 2006; ISBN 978-3-540-30940-6 (Print) bzw. 978-3-540-30941-3 (Online) (SpringerLink), ISBN-13 978-3-540-30940-6

[Burger u. a._2009] Implementierung der Hough-Transformation bei den Materialien zum Buch [Burger u. a._2006] von www.imagingbook.com (am 01.02.2009)

[Tönnies_2005] Tönnies, K. D.: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005, ISBN 3-8273-7155-4

[Schiller_2010] Schiller, T.: Kennzeichenerkennung und digitale Bildverarbeitung als fächerübergreifendes Thema M/INF; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, für die GDM herausgegeben von Anke Lindmeier und Stefan Ufer, WTM-Verlag, ISBN 978-3-942197-03-8