

Monika SCHOY-LUTZ, PH Thurgau, Kreuzlingen

Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung zur Kombinatorik in den Kl. 1-4

Im Rahmen eines Dozierendenforschungsprojektes¹ wurde von Schoy-Lutz (2011) eine Lernumgebung zum Bereich von kombinatorischen Fragestellungen im Mathematikunterricht entwickelt, die ein grundlegendes Verständnis der Leitidee Zufall und Wahrscheinlichkeit bei den Kindern anlegen soll, das bis in die Sekundarstufe 1 hinaus tragfähig ist. Kinder mit unterschiedlichen Alters- und Lernvoraussetzungen sollen in die Lage versetzt werden, Aufgabenstellungen auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und mit unterschiedlichen Alltagsbezügen bearbeiten zu können, ohne dass alle Lösungen mit konkretem Material vorhanden sein müssen. Dabei werden die Kriterien für Lernumgebungen umgesetzt, wie sie u.a. von Wollring (2008, S.9-26)¹ gefordert werden.

Übergeordnetes Ziel der Lernumgebung war es demnach, eine Veranschaulichung zu entwickeln, die die Lücke zwischen der Verwendung von konkretem Material auf der einen und der Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben auf Arbeitsblättern auf der anderen Seite schließt. Die entwickelte Lernumgebung wurde in zwei Grundschulklassen und einer kleinen Gruppe von Vorschulkindern erprobt und in kleinem Rahmen evaluiert.

In diesem Beitrag wird die von Schoy-Lutz (2011) entwickelte Lernumgebung zur Kombinatorik vorgestellt. Anhand der Analyse von Schülerdokumenten werden abschließend Hypothesen generiert, die positive Effekte der Lernumgebung vermuten lassen, wenn es darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler auf ihrem Weg vom unsystematischen Probieren zum systematischen Probieren begleitet werden sollen und dadurch ein bewegliches Denken im Umgang mit alltagsnahen kombinatorischen Fragestellungen entwickeln können.

Die Kombiniermaschine (Schoy-Lutz 2011)

Die Kombiniermaschine besteht aus zwei oder mehreren Rädern, die ähnlich wie Glücksräder beschriftet und gedreht werden. Kombinationen unterschiedlichster Art können an der Maschine systematisch erzeugt und abgelesen werden.

¹ Das Projekt wurde von Feb. 2010 bis Feb. 2011 durchgeführt und von der Pädagogischen Hochschule Thurgau finanziert.

Die Kombiniermaschine eignet sich für kombinatorische Fragestellungen im Zusammenhang mit multiplikativen Aufgabenstellungen und Variationen mit Wiederholung:

- $k \leq 3$ (Anzahl der Kombinierräder)
- $n \leq 5$ (Entscheidungsmöglichkeiten auf den jeweiligen Rädern). Die Reihenfolge ist dabei wichtig.

Die Beschränkung auf die Anzahl an Kombinierrädern und Entscheidungsmöglichkeiten ergab sich aufgrund vielfältiger Erfahrungen in der Praxis durch die Begrenzung des Lösungsraums und der Handhabung der Maschine durch die Kinder.

Die Lernumgebung wurde in jeweils einer Doppelstunde erprobt. In dieser Doppelstunde wurden insgesamt 3 Aufgaben bearbeitet, wobei gerade die dritte Aufgabe den Kindern besonders viel Handlungsspielraum und damit auch Bearbeitungsmöglichkeiten auf individuellem Niveau gewährte. Die Kinder hatten mit Hilfe der Kombiniermaschine die Möglichkeit, ihre Lösungen unterschiedlich zu ermitteln und zu dokumentieren. Zunächst wurde eine multiplikative Aufgabe ohne Kombiniermaschine mit Hilfe eines Arbeitsblattes von den Kindern gelöst und dokumentiert. Danach lernten die Kinder die Kombiniermaschine kennen und erzeugten anhand einer Parallelaufgabe auf Post-it-Zetteln ihre Lösungen. Es wurde bewusst der Versuch unternommen, dass den Kindern eben nicht das gesamte Material zur Verfügung gestellt wurde, so dass nicht alle Kombinationen gelegt werden konnten. Die Kombiniermaschine soll es den Kindern dennoch ermöglichen, auf einfache Art und Weise alle Lösungen zu finden und systematisch darzustellen. Zum Abschluss einer jeden Aufgabe wurden die Kinder ermuntert, ihre Lösungen zu sortieren, zu vergleichen und den Lösungsweg zu begründen.

Kriterien für die Bewertung der vorgestellten Lernumgebung

Die Evaluation des kombinatorischen Verständnisses der Kinder basiert in der vorgestellten Lernumgebung auf den von den Kindern dokumentierten Lösungsmengen und -wegen. Dabei wurden folgende Kriterien bei der Auswertung der Kinderdokumente fokussiert:

- Arbeiten die Kinder freiwillig mit der Kombiniermaschine? → Kriterium der Veranschaulichungshilfe
- Erhöht sich die Anzahl richtiger Lösungen mit der Kombiniermaschine gegenüber der Arbeit am Arbeitsblatt? → Kriterium der Lösungswirksamkeit

- Erhöht sich der Strukturierungsgrad der Lösungsdarstellung mit Hilfe der Kombiniermaschine? Werden die Lösungen rein aufzählend dargestellt oder bereits zu Gruppen zusammengefasst? → Kriterium der Lösungsstrategie
- Deuten verbale Äußerungen der Kinder darauf hin, dass sie eine tragfähige Modellvorstellung von kombinatorischen Problemstellungen der vorgestellten Art entwickeln können? Erkennen die Kinder das Multiplikationsprinzip? → Kriterium der Modellbildung und Abstraktionsfähigkeit
- Können die Kinder eine eigene, strukturgleiche kombinatorische Aufgabe entwickeln und mit Hilfe der eigens erstellten Kombiniermaschine lösen? → Kriterium der Transferfähigkeit
- Kann mit Hilfe der Kombiniermaschine die Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit der Kinder heraus gefordert und unterstützt werden? → Kriterium der sprachlichen Kompetenzentwicklung

Beobachtungen und Hypothesengenerierung

Während bei der Bearbeitung ohne Kombiniermaschine häufig ein Präbeln zu erkennen war, was auch in der Art der Darstellung der Lösungen zu erkennen ist, zeigte sich die Dokumentation der unterschiedlichen Lösungen unter Einsatz der Kombiniermaschine wesentlich strukturierter (Kriterium der Lösungsstrategie). Ohne Kombiniermaschine wurden überwiegend Mikrostrategien verwendet wurden, während beim Einsatz der Kombiniermaschine bei einem großen Teil der Kinder Makrostrategien erkennbar waren (Hoffmann, 2003)³. Damit haben die Kinder mit Hilfe der Kombiniermaschine nicht nur mehr richtige Lösungen gefunden (Kriterium der Lösungswirksamkeit), sondern sie zeigten durch die Art der Darstellung und Gruppierung aller Lösungen auch, dass sie deutlich seltener präbelten und mehr zu einem systematischen Vorgehen gewechselt hatten. Durch die Systematisierung der Lösungsdarstellung konnten die Kinder begründen, weshalb alle Lösungen gefunden wurden (Kriterium der Abstraktionsfähigkeit und sprachlichen Kompetenzentwicklung). Im Umgang mit der Kombiniermaschine konnten viele Beobachtungen gemacht werden, aus denen sich bereits erste Hypothesen generieren lassen. Kinder, die mit der Kombiniermaschine arbeiteten ...

- ... nutzen diese Visualisierungshilfe freiwillig.
- ... konnten mehr richtige Lösungen finden.
- ... klebten ihre Lösungen bis zum Ende immer wieder um, was zu einer systematischeren Lösungsstrategie führte.

- ...begründeten ihr systematisches Vorgehen mit sinnvollen verbalen Äußerungen.
- ... entdeckten sogar die formale Formulierung der zur Aufgabe gehörenden Multiplikationsaufgabe.
- ... konnten ihr systematisches Vorgehen und die Systematik in der Lösungsdarstellung auch auf eine von den Kindern neu erfundene Kombinieraufgabe übertragen.

Auffallend war, dass diese Erkenntnisse auch von eher schwachen Kindern gemacht werden konnten, die ihre eigene Kombiniermaschine mit nicht mehr als 3 Elementen bestückten. Die Modellvorstellung des Kombinierens als multiplikative Situation fand unabhängig von der zu kombinierenden Anzahl an Elementen statt. Die Kombiniermaschine hilft somit auch schwachen Kindern ein mentales Bild zu entwickeln und deren Abstraktionsfähigkeit zu verbessern. Eine Fortführung der Erprobungen könnte noch weitere Fragestellungen fokussieren. Besonders interessant wäre z.B. die Frage, wie sich die sprachliche Kompetenz der Kinder wie auch das Repertoire an Mikro- und Makrostrategien bei den Kindern entwickelt und ob die Kinder z.B. aus unterschiedlichen kombinatorischen Aufgaben jene identifizieren können, die sich mit Hilfe der Kombiniermaschine veranschaulichen lassen.

Fazit

Die erprobte Lernumgebung zu kombinatorischen Fragestellungen hat exemplarisch gezeigt, dass die Kinder individuell und auf unterschiedlichen Leistungsniveaus arbeiten konnten. Der Einsatz der Kombiniermaschine wurde in Lerngruppen der Vorschulstufe bis hin in Kl.3 erfolgreich umgesetzt und kann auch im Sinne des Spiralprinzips problemlos in Kl.4 und 5 zum Einsatz gebracht werden. Durch die Erprobungen konnten interessante Hypothesen generiert werden.

Literatur

1. Wollring, B. (2008): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Kassler Forschergruppe (Hrsg.). Kassel: Unidruckerei der Universität Kassel; 9-26.
2. Bönig D.: (2010): Individuelle Lernwege in der Kombinatorik unterstützen. In: Grundschule Mathematik, 4 (27) 2010; 14-17.
3. Hoffmann A. (2003): Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit. 1. Aufl. Hildesheim: Franzbecker.
4. Schoy-Lutz, M. (2011): Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung zur Kombinatorik. In: Grundschulunterricht Okt. 2011 (im Druck).