

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Tetraedergeometrie – eine raumgeometrische Theorie- Entwicklung

Was Du ererbt von Deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen.
(J. W. v. Goethe, Faust I)

Mehrere Gründe haben zur Entwicklung einer „Elementaren Tetraedergeometrie“ Anlass gegeben:

- Interaktive Dynamische Raumgeometrie-Systeme eröffnen einen direkten Zugang zu den Phänomenen der elementaren Raumgeometrie; sie machen Raumgeometrie für einen breiten Adressatenkreis erst richtig zugänglich. Es stellt sich aber die Frage nach der Anwendung der mathematischen Standardmethode der Erkenntnisbildung durch Beweisen, hier den Beweisen der im virtuellen Raum gefundenen bzw. repräsentierten raumgeometrischen Aussagen.
- Die Vernetzung von ebener und räumlicher Geometrie, die Stärkung der Raumgeometrie und der Raumanschauung, wie es von Felix KLEIN im 1909 erschienenen Band „Geometrie“ seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“, gefordert wird:
- *„Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgedondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die **Raumgeometrie** aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der **Raumanschauung**, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten“ von vornherein **Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln**, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken.“* (Hervorhebungen durch den Autor)
- Der Verlust der Auffassung von (synthetischer) Geometrie als Musterbeispiel für lokal-deduktive Theoriebildung in der Art von zu entwickelnden Begriffs- und Satzgefügen im heutigen Curriculum allgemeinbildender Schulen und in der Lehrerausbildung.
- Die Vernachlässigung des Geometrielernens als verstehende Rezeption von Begriffen, Sätzen und Beweisen, – einer seit über 2000 Jahren geübten Methode der Aneignung von Wissen.
- Die Anwendung und Erweiterung der elementaren Dreiecksgeometrie.

- Das Praktizieren des Analogisierens, einer effektiven und weitreichenden Methode der Erkenntnisgewinnung.

Und schließlich:

- Das Fehlen einer für einen breiten deutschsprachigen Adressatenkreis verfügbaren reichhaltigen Monografie über „Elementare Tetraedergeometrie“ als ein bedeutendes räumliches Analogon der Dreiecksgeometrie.

Der Autor hat es als didaktische Aufgabe angesehen, eine „Elementare Tetraedergeometrie“ durch räumliche Analogiebildung zu entwickeln, die von der Dreiecksgeometrie ausgeht, wichtige Begriffe, Sätze und Beweise der Tetraedergeometrie enthält und sich vor allem an folgende Adressaten richtet: Studierende für das Lehramt Mathematik, mit der Lehrerbildung befasste Lehrkräfte, Schüler/Schülerinnen mathematischer Zirkel, Schüler/Schülerinnen der Mittelstufe und der Sekundarstufe II, Mathematiklehrer und -lehrerinnen und am Thema interessierte Laien. – Natürlich gibt es nicht zu jedem Satz über Dreiecke einen analogen über Tetraeder, der richtig ist; das führt oft zu herausfordernden Problemen. Auf andere Analogisierungen, nämlich die der Geometrie des Dreiecks zu der des Dreiecks auf der Kugel oder zu der Geometrie der dreiseitigen räumliche Ecken wird nicht eingegangen, obwohl Verbindungen zur Geometrie des Tetraeders bestehen.

Unter „**Elementarer** Tetraedergeometrie“ verstehen wir im Zusammenhang mit dieser Arbeit folgendes: Als **elementar** soll jene Tetraedergeometrie bezeichnet werden, soweit sie in etwa berücksichtigt: die Tetraedergeometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die im historischen Überblick von ZACHARIAS, M.: *Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung* (1913). (In: Meyer/ Mohrmann (Hg.), *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III*, 1.2, Leipzig: Teubner, 1904-1935) genannten tetraedergeometrischen Erkenntnisse der zweite Hälfte des 18. und des gesamten 19. Jahrhunderts, – und auch die neueren stoffdidaktischen Arbeiten über das Tetraeder von ca. 1980 an.

Was die Tetraedergeometrie bzw. die Theorie der Simplexes im n -dimensionalen reellen euklidischen Raum anlangt, so basieren die dort geführten Beweise im Wesentlichen auf denen des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

Hätte es nicht nahegelegen, einfach ein Buch oder einen Buchbeitrag über Tetraedergeometrie aus einer anderen Sprache ins Deutsche zu übertragen – oder entsprechende deutsche fachgeometrische Beiträge zu kompilieren?

Leider richten sich solche Arbeiten i. A. an eine spezielle Leserschaft, die schon über eine höhere geometrische Bildung verfügt; sie sind deshalb für die ins Auge gefassten Adressaten nicht geeignet. Die vorgenommene didaktische Elementarisierung im Hinblick auf die genannten Adressaten besteht in Folgendem:

- Einzelthemen möglichst auswahlweise und isoliert behandelbar
- Lokal-deduktives Vorgehen
- Einfache räumliche Aussagen können vorausgesetzt werden; keine Beweise evidenten Aussagen; keine Axiomatik
- Vor allem synthetische Beweise; vektorielle Beweise nur dort, wo die synthetischen nicht ausreichen
- Beweise auf dem in der Elementargeometrie üblichen Strengenniveau
- Benutzung räumlicher Beweisfiguren
- Redundante verbale Beweisführungen; Minimalisieren formaler Beschreibungen
- Anwendung heuristischer Strategien, vor allem des Analogisierens: „Vom Dreieck zum Tetraeder!“.

Im Zusammenhang mit der Behandlung raumgeometrischer Themen betonen wir die Rolle der Raumanschauung, wie sie Felix KLEIN folgendermaßen gewürdigt hat:

„Die Kritik, der die Genauigkeit unserer Raumanschauung unterliegt, hat ja die reinen Mathematiker in der Neuzeit vielfach dazu geführt, sie aus den mathematischen Betrachtungen überhaupt auszuschalten. Dem gegenüber habe ich immer daran festgehalten, dass die Anschauung gerade auch in der Mathematik als eine unsere wichtigsten Fähigkeiten angesehen und gepflegt werden muß, indem wir sie durch bewußte Erziehung vervollkommen.“ (Aus: Felix KLEIN. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 2. Band. 1922).

Insofern kommt der räumlichen Beweisfigur eine zentrale Rolle zu. In die Raumfiguren muss man sich aber „hineindenken“ und sie richtig „lesen“ lernen, was u. a. die Raumvorstellung trainiert. Anzustreben ist eine mentale Repräsentation der Raumfiguren. Eine digitale Version des Buches als Hypertext unterstützt den Leser dabei; sie besteht aus einer pdf-Datei, deren farbige Abbildungen mit den entsprechenden Cabri 3D-Dateien verlinkt sind. Nach dem Anklicken der betreffenden Abbildung in der pdf-Datei öffnet sich die zur Abbildung gehörende Cabri 3D-Datei in einer vorher zu installierenden kostenfreien Demo-Version von Cabri 3D. Die entspre-

chenden Raumfiguren kann man dann im virtuellen Raum direkt manipulieren, um sie von allen Seiten zu betrachten, um sie zu vergrößern und um sie in ihrer Form zu verändern.

Welche Inhalte und in welcher Reihung?

Die Inhalte sollen denen der elementaren Dreiecksgeometrie entsprechen. Es wird aber eine andere Reihung der Inhalte vorgenommen: Zuerst werden, quasi zur „Aufwärmung“, besondere Tetraeder behandelt, denen gleichseitige und rechtwinklige Dreiecke entsprechen und deren Bearbeitung ohne Kenntnis der Aussagen über das allgemeine Tetraeder auskommt. Es sind dies das regelmäßige, das gleichseitige und das rechtwinklige Tetraeder, – als Beispiel für einen Tetraedertyp, der sich nicht durch eine Analogisierung eines Dreieckstyps ergibt, steht das „rechteckige“ Tetraeder. Das hat den Vorteil, sich am Anfang nicht gleich mit der Komplexität des allgemeinen Tetraeders befassen zu müssen, so dürften das regelmäßige und das rechtwinkligen Tetraeder vielen Lesern schon bekannt sein.

Die Themen des allgemeinen Tetraeders entsprechen dem klassischen Themenkanon des allgemeinen Dreiecks. Die Konstruktionen und Berechnungen des Tetraeders sind aber nicht so einfach zu beherrschen wie die des Dreiecks; es gibt beim Tetraeder keine so schön geschlossenen Darstellungen dafür. Für die Berechnungen am Tetraeder werden auch mathematische Assistenzprogramme eingesetzt. Zusätzlich wurde ein Teilkapitel über Ungleichungen am Tetraeder aufgenommen, die im Rahmen der elementaren Dreiecksgeometrie vergleichsweise keine Beachtung findet – die Ungleichungslehre ist in den aktuellen Bildungsplänen fast total eliminiert worden! Mit dem Satz von Ceva gewinnt man ein Beweisprinzip für die Aussagen über besondere Punkte im Tetraeder in Analogie zu solchen für das Dreieck. Das Kapitel über das allgemeine Tetraeder wird abgerundet durch fünf verschiedene Einzelthemen. Das Tetraeder in Form der geraden dreiseitigen Pyramide stellt sich als Analogon des gleichschenkligen Dreiecks heraus. Anschließend werden Sätze über das allgemeine Tetraeder auf die Bearbeitung weiterer besonderer Tetraeder, nämlich die Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, mit kantenberührender Kugel und mit gleichen Gegenkantenprodukten angewendet. Angefügt werden noch einige grundlegende Begriffe und Aussagen der Raumgeometrie sowie eine Systematik raumgeometrischer Konstruktionen, worauf der Leser bei Bedarf zurückgreifen kann.

Literatur

Schumann, H.: Elementare Tetraedergeometrie · Eine Einführung in die Raumgeometrie. Hildesheim und Berlin: Franzbecker 2011 – und die dort angegebene Literatur.