

Inge SCHWANK, Osnabrück

## Arithmetisches Denken pflegen

### 1. Mathe-Magie:

#### Osnabrücker Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“

Seit gut 10 Jahren werden an unserem Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“ unterschiedlichste Aktionen unternommen, um Kinder, Erzieherinnen und Lehrerinnen auf dem Weg der Entwicklung eines mathematischen Verständnisses zu begleiten und zu unterstützen.

Ein Leitgedanke ist dabei, Kinder in das „Denken in Zahlen“ einzuführen. Von besonderer Bedeutung ist die Entwicklung eines *Zahlenkonstruktions-sinns*, der – zunächst gedacht als Verständnis der grundlegenden Operationen des Eins-weiter-, Eins-zurück-laufens – die Basis für weiterreichende Operationen mit Zahlen darstellt (vgl. Dantzig, 1930; Brainerd, 1979).

In Anlehnung an das Triple-Code-Modell von Dehaene (1992) gestalten wir unser  $Z^4$ -Modell (Abb.1). Zusätzlich zu Dehaenes Vorschlag wird die Möglichkeit der Beeinflussung der individuellen Vorstellung von Zahlideen durch Zahlidee bezogene Ereignisse fokussiert und die Beschriftung der Komponenten dem mathematikdidaktischen Sachverhalt angepasst.

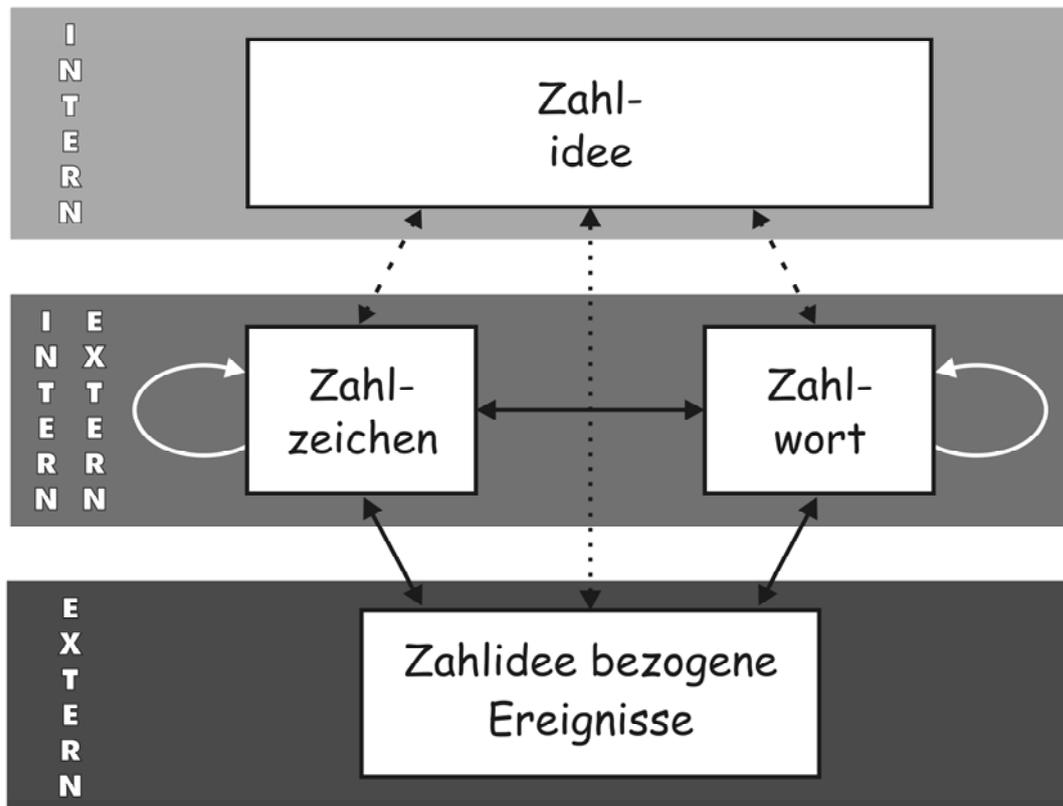
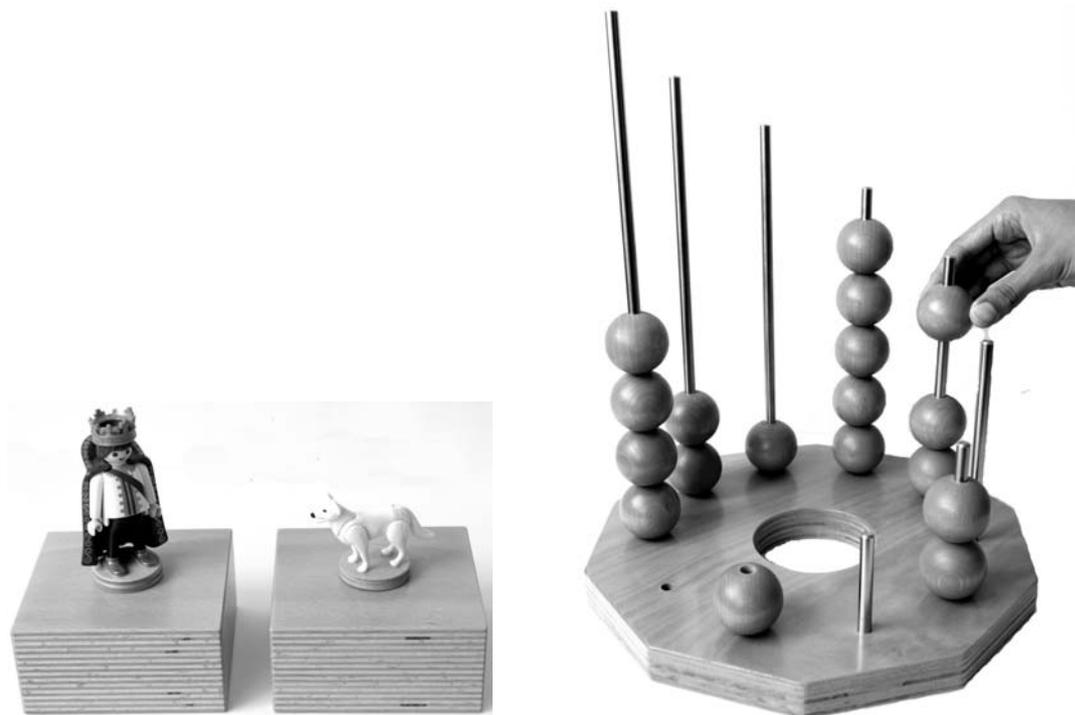


Abb. 1:  $Z^4$ -Modell

Mit den unterschiedlichen Linientypen (s. Abb. 1) werden Unterschiede im Grad des Geklärtseins der verschiedenen Beziehungen ausgedrückt. Insbesondere der Zusammenhang von Zahlidee und Zahlidee bezogenen Ereignisse (gepunktete Linie) ist noch kaum in größerer Präzision verstanden. Beachtenswert ist (weiße Linien), dass sowohl die Zahlwörter wie auch die Zahlzeichen abgekoppelt von Bedeutung benutzt werden können.

Zum Erlernen der Zahlzeichen sind Spiele sinnvoll, in denen Kinder sowohl mit den Gestaltmerkmalen der Zahlzeichen als auch mit den Bewegungsabläufen für die spätere Schulschrift vertraut werden (Schwank 2010a).

Mathematischen Spielwelten sind besonders wertvoll, um Kinder in die operativen Zahlaufbauten einzuführen. Günstig ist, bei der Konstruktion die Schreibweise von Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem zu berücksichtigen, also zunächst die Zahlen von 0 bis 9 (Abb. 2) und anschließend z.B. die Zahlen von 10 bis 19 zu behandeln (Schwank 2010b, c).



**Abb. 2:** Rechenwendeltreppe zum Spielen im Kindergarten.

Es gibt Plätze von null bis neun Kugeln. Figuren laufen auf der „Treppe“ hinauf und hinunter. Noch ist die „Treppe“ nicht vollständig aufgebaut und die Figuren warten noch auf ihren Einsatz.

Der Aufwand solcher Spielwelten lohnt sich, da auf diese Weise Kinder, denen eine funktional-logische Sichtweise weniger liegt, gleichwohl in ein Denken in Tätigkeiten und Prozessen im Zusammenhang mit Zahlen eingeführt werden können (Schwank 2003, 2005, 2011).

## 2. Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO]

Die Zwergen-Mathe-Olympiade, die für die 3. Klassen der ca. 120 Grundschulen in Stadt und Landkreis Osnabrück seit 2001 angeboten wird, liefert uns reichhaltiges Material zu arithmetischen Problembearbeitungen von mittlerweile über 1400 Kindern. Aufgrund der Wettbewerbsregeln nehmen gleich viele Mädchen wie Jungen teil.

*Beispiel für eine besonders herausfordernde Aufgabe: „Zirkus Knobelix“*  
Im Zirkus Knobelix sitzen 224 Zuschauer. Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen und 6 Jungen mehr als Mädchen. Wie viele Mädchen, Jungen und Erwachsene sitzen auf den Zuschauerbänken?

	<b>Mädchen</b>	<b>Jungen</b>
Diamant	1 ( 3)	3 ( 3)
Gold	2 (10)	9 (17)
Silber	2 (41)	5 (36)
Bronze	0 (32)	1 (30)
<b>Gesamt</b>	<b>5 (86)</b>	<b>18 (86)</b>

**Tab. 1:** Bearbeitungserfolg, aufgeschlüsselt nach Geschlecht und Leistungsgruppe (in Klammern ist die jeweilige Gruppengröße notiert):

Dass die Aufgabe unterschiedlich häufig erfolgreich bearbeitet wurde, ist typisch: Kann auf keine Routine zurückgegriffen werden, gelingt es bislang in der ZMO Jungen eher als Mädchen, an Zahlen im funktional-logischen Sinn herumzubasteln und sich so einen Weg hin zum Ergebnis zu bahnen. Als guten Startpunkt wählten Kinder z.B. 100 Erwachsene und arbeiteten sich von dort aus zur Zielsumme 224 vor.

Die vielen Bearbeitungen der ZMO-Aufgaben geben Einblick in das Potential von Kindern im arithmetischen Denken und bieten Anlass, neue Aufgabenstellungen zur Schulung dieses Denkens zu erfinden.

## 3. Arithmetisches Denken als Grundlage algebraischen Denkens

Die Pflege arithmetischen Denkens ist der Schlüssel zur Entwicklung algebraischen Denkens (Hefendehl-Hebeker 2001, Schwank & Nowinska 2007). Einem Kind, dem auffällt, dass die Summe von beliebigen drei aufeinander folgenden Zahlen immer durch drei teilbar ist, wird es leicht fallen mit der operativen Schrift (im Sinne von Krämer 2003) zurecht zu kommen und einen Ausdruck wie  $(n-1)+n+(n+1)$  sinnvoll zu benutzen. So wie im  $Z^4$ -Modell den Zahlen durch gedankenvolles Tun eine Bedeutung zu-

kommt, so sind in einem analogen  $V^4$ -Modell auch Variablen durch geeignetes Tun zu verstehen und Sinnzusammenhänge zu entwickeln.

## Literatur

- Brainerd, C. (1979): The origins of the number concept. New York: Praeger.
- Dantzig, T. (1930): Number, the language of science. 4. Auflage. New York: The Macmillan Company.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-40.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, B. Wollring, B. (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. 83-98. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Krämer, S. (2003): >Schriftbildlichkeit< oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In S. Krämer, H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild – Schrift – Zahl*. 157-176. München: Wilhelm Fink Verlag.
- Schwank, I. (2011): Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In H. Keller (Hg.): *Handbuch der Kleinkindforschung*. 4. korrigierte, überarbeitete und erweiterte Auflage. Bern: Huber.
- Schwank, I. (2010a): Zahlentheater - Spiele mit Holzfiguren zur Vorbereitung der Schulschrift (mit Anwendung am Zahlenstrahl). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2010b): Erlebniswelt Zahlen - Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2010c): Vom Umgang mit dem Nichts als Zahl und anderen Ideen. In S. Kliemann (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 129-141.
- Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): *Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. 93-133. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: *ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik'*, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 35(3), 70-78.
- Schwank, I. & Nowinska, E. (2008): Die Denkform des Formel Denkens. In B. Barzel, T. Berlin & A. Fischer (Hg.): *Algebraisches Denken*. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. 111-122. Hildesheim: Franzbecker.