Susanne SPIES, Siegen

„Sie sollen die Schönheit der Mathematik erfahren.“ Didaktische Perspektiven der Mathematikästhetik

Unter der Überschrift „Förderung langfristiger Einstellungen“ formuliert der Mathematiklehrplan für die gymnasiale Oberstufe in NRW folgende Zielsetzung: „Sie [die Schülerinnen und Schüler] sollen für die Mathematik positiv motiviert werden, sollen die Leistungsfähigkeit und Schönheit der Mathematik erfahren.“ [S. 38]

Die Hoffnung, durch die Beschäftigung mit dem Schönen eine langfristig wirksame, positive affektive Beziehung zur Mathematik aufzubauen, ist sicher berechtigt, bietet die Aussicht auf ein ästhetisches Erlebnis doch ein Motiv zur Beschäftigung mit Mathematischem abseits von Überlegungen zur späteren Brauchbarkeit oder dem kurzfristigen Erfolg durch Kalkülbeherrschung. Zu grundlegenden Voraussetzungen der Umsetzung nimmt der Lehrplan indes nicht Stellung. Es wird ebenso wenig auf die intendierten Träger mathematischer Schönheit und deren Eigenschaften eingegangen wie auf die konkrete unterrichtliche Umsetzbarkeit oder eine mathematikdidaktische Einbettung. Im Folgenden sollen mögliche Konkretisierungen dieser Bereiche skizziert werden.

1. Mögliche Objekte mathematisch-ästhetischer Erfahrungen

Visuelle Erfahrungen mit regelmäßigen geometrischen Formen, Spiralen oder bestimmten Proportionen, wie etwa dem Goldenen Schnitt, sind typische Beispiele, wenn Schönheit und Mathematisches zusammengebracht und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden soll. Durch diese Verbindung soll einerseits die Schülermotivation gestärkt werden, andererseits soll der visuelle Eindruck Erkenntnisse über die zu Grunde liegende Mathematik liefern. Die Untersuchung mathematischer Grundlagen der bildenden Kunst verspricht zusätzlich, den Unterricht durch einen nicht offensichtlichen Anwendungsbereich der Mathematik zu bereichern. [Vgl. z.B. Themenheft ml 157]

Eine aus der Relevanz des Schönen für die mathematische *Wissenschaftspraxis* entstandene Forderung [vgl. z.B. Papert 1988] wird indes in der mathematikdidaktischen Literatur sehr selten diskutiert (Ausnahmen bilden Brinkmann (z.B. 2006) und Sinclair (2006)): Das Erleben der Schönheit innermathematischer Strukturen und Argumentationsgänge wie etwa der Schönheit von Beweisen oder Theoremen. Dieser Gegenstandsbereich sollte aber m.E. gerade im Zusammenhang mit der oben zitierten Lehrplanforderung besondere Beachtung finden, markiert er doch nicht nur einen Zusammenhang von Mathematik und Schönheit, sondern stellt die Schönheit der Mathematik selbst ins Zentrum.

2. Eigenschaften schöner Mathematik

Den Begriff der Schönheit innermathematischer Strukturen zu fassen ist ebenso schwierig, wie dies für die Schönheit im Allgemeinen gilt. Mathematiker begründen daher ihre ästhetischen Werturteile häufig mit der Aufzählung verschiedener Eigenschaften [vgl. z.B. Hardy 1940, S. 113]. Die Zusammenschau solcher Listungen mit Ansätzen aus der mathematikphilosophischen Literatur zeigt, dass bestimmte Aspekte in unterschiedlicher Akzentuierung und Ausführlichkeit immer wieder genannt werden. So kann das Spektrum mathematischer Schönheit durch verschiedene, teils sehr unterschiedliche Eigenschaftskomplexe aufgespannt werden:

(Innermathematische) **Tragweite:** In mathematisch-ästhetische Werturteile geht häufig die *interdisziplinäre Vernetzung* im Sinne weitreichender Verbindungen des Resultates zu anderen Teildisziplinen oder der Eröffnung neuer Forschungsfelder ein. Andererseits spielt auch die Anwendbarkeit der Beweismethode über die konkrete Situation hinaus, also eine *weitreichenden Heuristik* eine zentrale Rolle für das Schönheitserleben, wodurch die Beweisidee zum zentralen Gegenstand des Urteils wird.

Ökonomie: Die häufig betonte Kürze oder Einfachheit schöner Mathematik wird entweder negativ, etwa durch das Fehlen eines unnötigen technischen Überbaus, oder in Relation zu anderen Eigenschaften bestimmt. So erzeugt der Gegensatz von *Einfachheit und Komplexität* z.B. im Falle von subjektiv zunächst schwer zugänglichen Problemen mit dann gut überschaubarer Lösung eine ästhetisch wirksame Spannung. Auch der Eigenschaftskomplex der *Tragweite* kann zur *Bezugsgröße* werden - ein Beweis ist gerade dann ökonomisch, wenn er in Relation zur Tragweite des Resultates besonders einfach wirkt.

Epistemische Transparenz: Schöne Stücke der Mathematik zeigen den Kern der Sache, klären Zusammenhänge auf und lassen die Frage nach dem „Warum“ nicht offen. Sie führen also zu einem *tiefen Verstehen*, einem Erkenntnisgewinn, der über das Anerkennen der Korrektheit hinaus geht. Dabei scheint sich dieses Verstehen oft plötzlich einzustellen, und es kommt zum tiefgreifenden emotional berührenden *Aha!-Erlebnis*.

Emotionale Wirksamkeit: Durch eine stark emotional gefärbte Sprache über das Ästhetische in der Mathematik werden den bisher genannten Eigenschaftskomplexen qualifizierende Gefühle zugewiesen. Insbesondere wird das Moment der *Überraschung* oder des *Erstaunen*s betont. Aber auch die *Unausweichlichkeit,* mit der ein Sachverhalt offen gelegt und das Ziel erreicht wird, gehört zum Gefühlspanorama. Einher geht dies nicht selten mit der Rührung über das eigene Erkenntnisvermögen.

Dieses Spektrum kann den Begriff mathematischer Schönheit nicht vollständig erfassen, lebt er doch gerade von inneren Spannungen und einem starken subjektiven Moment [vgl. auch Müller-Hill/Spies 2011]. Dennoch bieten m.E. die beschriebenen Charakteristika eine gute Grundlage, um das Phänomen mit didaktischer Implikation weiter zu diskutieren.

3 Unterrichtliche Umsetzung und mathematikdidaktische Perspektiven

Obgleich die vorgestellten Eigenschaftskomplexe der Wissenschaftspraxis entstammen, sind sie nicht an den Bereich der aktuellen Forschungsmathematik gebunden. Ein Blick in die Mathematik- und Ästhetikgeschichte zeigt, dass die prominentesten Beispiele elementar zugänglich sind, sich aber dennoch durch alles auszeichnen, was einen schönen Gegenstand der Mathematik ausmacht. Häufig genannt wird etwa der Euklidische Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlmenge [vgl. z.B. das Ranking in Wells 1990]. Dies zeigt im Übrigen auch, dass die ästhetische Komponente entwicklungsgeschichtlich gesehen Teil der Mathematik ist, wie auch diese ein Rolle in der allgemeinen philosophischen Ästhetik spielt. In diesem Sinne liefert die Einbeziehung des Schönen „exemplarische Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Zivilisation“ [Lehrplan, S. 6] und trägt somit zu einem weiteren Unterrichtsziel bei.

Wie bei allem Kunstschönen bedarf das Erkennen der mathematischen Schönheit Übung und Gewöhnung. Das Aufzeigen von Charakteristika wie Ökonomie und Tragweite an Beispielen ist ebenso notwendig, wie der eigenständig erforschende Umgang mit den Gegenständen, denn Eigenschaften wie epistemische Transparenz oder emotionale Anrührung können sicher nicht gelehrt werden. Gegenstand von Demonstration und Erfahrung können dabei nicht nur Beweise im engeren Sinne, sondern allgemeiner auch mathematisches Argumentieren und Begründen sowie das Lösen von Problemen und die Reflexion dieser Prozesse sein [vgl. Dreyfus und Eisenberg 1986, S. 4f]. Die Integration mathematikästhetischer Fragen in den Unterricht setzt somit auf Seiten der Lehrperson Erfahrungen verschiedener Art voraus: Sie muss authentisch die emotionale Wirksamkeit oder die erstaunliche Tragweite eines Beispiels vermitteln zu können. Auch muss ihr die Relevanz des Ästhetischen bewusst sein, was die Reflexion über das eigene Fach sowie Einblicke in die mathematische Praxis notwendig macht. In diesem Bereich ist die Lehrerbildung gefragt.

Die Mathematikästhetik kann in der didaktischen Diskussion den Blick auf die unterschiedlichsten Bereiche öffnen und etwa das Spektrum aller drei Grunderfahrungen nach Winter (1996) erweitern: Die Analyse von Künstlerischem mit Hilfe der Mathematik stellt, wie oben angedeutet, ein weiteres Anwendungsgebiet dar, das nahezu alle schulrelevanten Disziplinen der Mathematik umfassen kann (G1). Die Betrachtung innermathematischer Gegenstände als Kunstwerke und ihrer Produzenten als Menschen mit kreativem Potential offenbart sonst verborgene Facetten der Wissenschaft und Kulturleistung Mathematik (G2). Die evaluative Funktion des Ästhetischen ist weiterhin ein nicht zu unterschätzendes Element des mathematischen Problemlöseprozesses, erweitert aber auch den Blick auf heuristische Strategien des Alltags (G3). So kann das ästhetische Erleben im Mathematikunterricht einen umfassenden Beitrag zum Allgemeinbildungswert des Faches leisten.

Die Integration der Mathematikästhetik bedeutet also eine Horizonterweiterung auf verschiedensten Ebenen mathematikdidaktischer Forschung. Eine ausführliche Bearbeitung der hier nur angedeuteten Themenkomplexe unter dieser Perspektive verspricht daher einen fruchtbaren Beitrag zum Nachdenken über das Lehren und Lernen von Mathematik zu leisten.

Literatur

Brinkmann, Astrid (2006): Erfahrung mathematischer Schönheit. In: Büchter, A. u.a. (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim, S. 203 – 213.

Dreyfus, Tommy / Eisenberg, Theodore (1986): On the Aesthetics of Mathematical Thought. In: For the learning of mathematics 6 (1), S. 2 – 10.

Hardy, Godfrey Harold (1940): A Mathematician’s Apology. Cambridge.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.) (1999): Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II. Mathematik. Frechen.

Müller-Hill, Eva / Spies, Susanne (2011): Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik. In: Helmerich, M. u.a. (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Wiesbaden, S. 261 – 281.

Papert, Seymour (1988): The Mathematical Unconscious. In: Wechsler, J. (Hrsg..): On Aesthetics in Science. Basel, S. 104 – 119.

Sinclair, Nathalie (2006): Mathematics and Beauty. Aesthetic Approaches to Teaching Children. New York.

Weigand, Hans-Georg (Hrsg.) (2009): Mathematik lehren 157. Kreative Zugänge zur Mathematik.

Wells, David (1990): Are These the Most Beautiful? In: The Mathematical Intelligencer 12 (3), S. 37 – 41.

Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, S. 37 – 46.