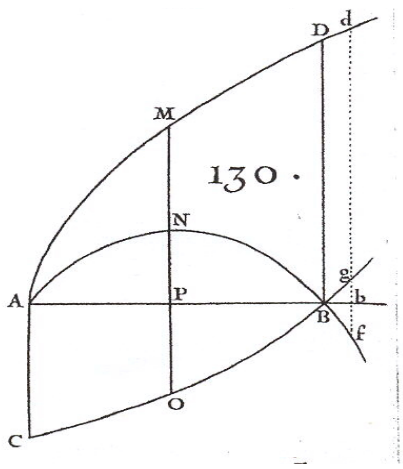
Horst STRUVE, Köln

Die Regel von l`Hospital

Ein klassisches Problem der Analysis ist die Berechnung von Grenzwerten. Hierfür gibt es einfache Regeln, etwa die folgende, die eine Aussage über die Quotientenfunktion zweier reellwertiger Funktionen f und g macht: Ist a $\in$ **R** und sind $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ mit α, β ≠ 0, so ist $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Diese Aussage ist nicht mehr in dem Fall anwendbar, wenn der Grenzwert „vom Typ $\frac{0}{0}$“ ist, d.h. wenn α = 0 und β = 0 ist. In diesem Fall gilt jedoch unter gewissen Bedingungen, etwa der Differenzierbarkeit von f und g in einem Intervall um a und der Existenz der auftretenden Grenzwerte: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Diese Aussage wird als *Regel von l´Hospital* bezeichnet, weil - wie es in vielen Büchern zur Geschichte der Mathematik heißt - dieser die Regel als erster veröffentlicht hat, nämlich in seiner 1696 erschienenen *Analyse des infiniment petits*.

Die letzte Aussage weckt allerdings die Neugierde von an der Geschichte der Mathematik Interessierten. Bekanntlich ist der Grenzwertbegriff zum erstenmal in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Cauchy in systematischer Weise zur Begründung des calculus eingeführt worden und ein halbes Jahrhundert später von Weierstraß formal präzisiert worden. Was hat l`Hospital wirklich formuliert und bewiesen? Welche Auffassung des calculus hat l´Hospital vertreten und was können wir heute davon lernen?

In *Analyse des infiniment petits* formuliert l´Hospital zu Beginn von „Section IX“ in Abschnitt 163 das folgende Problem (in der englischen Übersetzung von Struik)



Let AMD be a curve (Ap = x, PM = y, AB = a) of such a nature, that the value of the ordinate y is expessed by a fraction, the numerator and denominator of which, do each of them become 0 when x = a, viz. when the point P coincides with the given point B. It is required to find what will then the value of the ordinte BD.

Bemerkenswert ist, dass l´Hospital ein Problem über Kurven formuliert und nicht eines - wie in der modernen Formulierung der Regel -, über

Funktionen: Gesucht ist die Ordinate eines Punktes einer gegebenen Kurve. Kurven wurden zu Zeiten von l`Hospital nicht etwa durch Funktionsgleichungen definiert sondern in der griechischen und Descarteschen Tradition durch Konstruktionen. Diesen so definierten Kurven wurden dann im nachhinein Gleichungen zugeordnet, die die Werte x der Abszissen und y Ordinaten der Kurvenpunkte beschrieben und mit deren Hilfe man die Kurven untersuchen konnte. Die Koordinaten eines Punktes werden Längen verstanden, wobei die Strecke AB als „Einheit der Zeichnung“ dient.

In der hier betrachteten Situation kann man die Ordinate eines Punktes der Kurve AMD durch einen Bruch beschreiben, der der Quotient zweier algebraischer Ausdrücke ist, nämlich der Ordinaten der Punkte der Kurven ANB und COB. Die Ordinate PM eines Kurvenpunktes P genügt - in der Schreibweise von l´Hospital - der Gleichung PM = AB $\times$ PN / PO. Die Zählerkurve ANB und die Nennerkurve COB schneiden sich im Punkt B, so dass der Bruch, der die Ordinatenwerte der Punkte der Kurve AMD beschreibt in B „von der Form $\frac{0}{0}$“ ist, wie man später formulierte. Das Problem, das l´Hospital stellt lautet: Was ist die Ordinate des Punktes der Kurve AMD mit Absizze B?

Angemerkt sei, dass l´Hospital verwendet offenbar noch nicht in konsequenter Weise negative Koordinaten. AP ist die x-Achse. Wenn die Zählerkurve oberhalb der x-Achse verläuft und die Nennerkurve unterhalb, dann müsste die Kurve AMD eigentlich unterhalb der x-Achse verlaufen. Dies belegt das Größenverständnis von Koordinaten.

Beschreibt man die Zähler- und Nennerkurven durch Funktionen f(x) und g(x) und geht - zurecht - davon aus, dass die von l´Hospital betrachteten Kurven stetig sind, so kann man das Problem wir folgt in moderner Sprache paraphrasieren: Was ist der Grenzwert von f(x)/g(x), wenn x gegen die Abszisse des Punktes B konvergiert? Diese Formulierung konnte l´Hospital aber nicht wählen, da er weder über den Funktionsbegriff noch über den Begriff des Grenzwertes verfügte.

In seinen *Analyse...* gibt l`Hospital zwei Beispiele.

(i) $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ (ii) $y = \dfrac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$

Für x = a werden in beiden Fällen Zähler und Nenner 0. Im zweiten Beispiel erkennt man direkt aufgrund der dritten binomischen Formel, dass - modern gesprochen - an der Stelle a die Funktion stetig ergänzt werden kann.

L´Hospital sagt nun, dass man den gesuchten Wert erhält, indem man das Differential des Zählers durch das Differential des Nenners dividiert nachdem man x = a gesetzt hat. Das ist die Regel von l´Hospital (in der Übersetzung nach Struik):

… if the differential of the numerator be found, and that be divided by the differential of the denominator, after having made x = a = …, we shall have the value of the ordinates … BD sought.

Differentiale bildet er entsprechend dem Leibnizschen calculus. Dieser kann hier nicht dargestellt werden. Es sei aber auf die Rekonstruktion in Burscheid & Struve (2001), (2010) hingewiesen.

Im Beispiel (i) ergibt das Differential des Zählers, das Differntial des Nenners und der Quotient der beiden Ausdrücke an der Stelle a der Reihe nach

$$\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{aax}} \qquad - \frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}} \qquad \frac{-(4/3)adx}{-(3/4)dx} = \frac{16}{9}a$$

Differentiale fasste l`Hospital als unendlich kleine Größen auf und argumentiert zum Nachweis der nach ihm benannten Regel (sinngemäß) wie folgt: Statt den Wert der Ordinate im Punkt D mit Abszisse B zu berechnen kann man auch den Wert der Ordinate des Punktes d mit Abszisse b bestimmen, wenn die Differenz der Abszissenwerte „unendlich klein“ ist, also b unendliche nahe bei B liegt. Die Ordinaten von f und g (vgl. die obige Zeichnung) sind dann ebenfalls inifitesimale Größen und - so l`Hospital - gleich den Differentialen der algebraischen Ausdrücke im Zähler und Nenner des Bruches, der die Kurve AMD beschreibt.

Man kann zeigen, dass die Argumentation von l´Hospital nicht zum Leibnizschen calculus passt (vgl. den analogen Fall der Bestimmung des Krümmungsradius durch Huygens, der in Struve & Witzke (2008) rekonstruiert wurde). Durchgesetzt hat sich die Regel bei l´Hospitals Zeitgenossen, weil sie korrekte Ergebnisse lieferte - genau das war die Funktion der beiden Beispiele in der *Analyse* ...

Abschließend seien vier Punkte hervorgehoben, die durch dies historische Fallbeispiel deutlich werden:

(1) Leibniz und seine Zeitgenossen hatten eine andere Auffassung vom calculus als wir heutzutage in der Mathematik. Sie entwickelten den calculus als eine *empirische Theorie*, nämlich als eine Theorie, die real auf Zeichenblättern konstruierte Kurven beschreibt und erklärt. – Wäre solch eine Auffassung vom Gegenstand der Differential- und Integralrechnung auch für den heutigen Unterricht tragbar und ausbaufähig?

(2) Die Regel von l´Hospital ist in dieser Theorie eine Aussage zur Berechnung von Ordinaten von speziellen Kurvenpunkten – ein für Schülerinnen und Schüler „handfeste“ und verständliche Problemstellung?

(3) Die Begründung der Regel, die l´Hospital gibt und Vorstellungen von infinitesimalen Größen verwendet, ist mit dem Leibnizschen calculus nicht verträglich. Dass sie trotzdem von den Zeitgenossen akzeptiert wurde, lag daran, dass sie korrekte Ergebnisse lieferte, wie l´Hospital an Beispielen zeigte. In diesem Sinne waren „Experimente“ für die Überzeugung der Richtigkeit der Regel historisch entscheidend, nicht logische Ableitungen aus Axiomen – vgl. zu diesem Punkt auch I. Witzke (2009).

(4) Symbole, allgemeiner algebraische Ausdrücke dienten als eine Sprache zur Formulierung der (empirischen) Theorie. Erst später wurden sie in der algebraischen Analysis eigenständiger Gegenstand der Untersuchungen.

Historische Bemerkung: Die Regel von l`Hospital ist nicht nach ihrem Entdecker benannt. Dies war Johann Bernoulli, wie sich allerdings erst vor 60 Jahren herausstellte. Bernoulli hatte l`Hospital Nachhilfe im Leibnizschen calculus erteilt und diesem gegen Bezahlung zugesichert, dass er alle Erkenntnisse unter seinem Namen veröffentlichen konnte. Nach dem Tod von l`Hospital behauptete Bernoulli, dass die *Analyse* … eigentlich von ihm stammte, was zunächst kaum jemand glauben wollte. Erst als man Anfang des vorigen Jahrhunderts eine Vorlesung zur Differentialrechnung von Bernoulli aus den Jahren 1691/92 fand und große Übereinstimmung zur *Analyse* … konstatierte, änderte sich dies.

Literatur

Burscheid, H.J. & Struve, H.: Die Differentialrechnung nach Leibniz - eine Rekonstruktion, Studia LeibnitianaXXXIII/2, S. 163-193 (2001)

Burscheid, H.J. & Struve, H.: Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen - ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, Hildesheim (Franzbecker) 2010

Struik, D.J.: A Source Book in Mathematics, 1200 - 1800, Cambridge (MA) 1969

Struve, H. & Witzke, I.: Eine wissenschaftstheoretische Analyse des Leibnizschen calculus - das Beispiel des Krümmungsradius, Studia Leibnitiana XL/1 (2008)

Witzke, I.: Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus - eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim (Franzbecker) 2009