Ingrida VEILANDE, Riga

Die Lösungsmethoden der Graphentheorieaufgaben

Einführung. In Lettland sind die Schülermathematikolympiaden sehr populär. Die Olympiadenaufgaben umfassen sowohl die klassischen Algebra-, Geometrie-, Zahlentheoriefragen, als auch sie widerspiegeln die zeitgenossischen Entwicklungstendenzen der Wissenschaft.

Im Schulunterrichtsprogramm ist keine Graphentheorie eingeschlossen. Dennoch kann man die Kombinatorikaufgaben und die Aufgaben der anderen Art visuell mit Hilfe von allgemeinem Graphentheoriebegriff interpretieren. Mit Hilfe vom abstrakten Graphen kann man die Zusammenhänge zwischen den gegebenen Elementen darstellen. Mit Hilfe vom Graphen kann man einen Algorithmus beschreiben oder auch alle möglichen Zustandsveränderungen eines stationären Systems zeigen.

Thematik der Graphentheorieaufgaben und Lösungsmethoden. Die Thematik in Mathematikolympiaden eingeschlossenen Graphentheorieaufgaben ist sehr vielseitig. Die Kombinatorikaufgaben über den Verkehr, die Turniere, die Freundschaften, gemeinsamen Vertretern, die Informationsverbreitung, die Färbung, die Aufgaben, die Schachelemente beinhalten und andere Aufgaben kann man als Bäume, als Zyklen, als zweiteilige, reguläre oder orientierte Graphen, als Graphen mit gefärbten Knoten oder Kanten darstellen.

Diese Aufgaben sind meistens die Beweisaufgaben. Bei den Beweisen kann man allgemeine Methoden verwenden, verbunden mit den kombinatorischen Elementenklassifikationsmöglichkeiten, strukturellen Veränderungen und speziellen Algorithmen. Diese Methoden kann man bedingt in folgende Gruppen gliedern:

- allgemeine Urteilsmethoden – Beweis von Entgegengesetztem, Extremprinzip, mathematische Induktion, Schubfachprinzip;
- Methoden der Mängentheorie – Graphenelementenverteilung in die Äquivalenzklassen, Feststellung der gemeinsamen Vertretern;
- Methoden der Graphentheorie – die Besichtigung der Nachbarschaft eines Knotens, die Ergänzung des Graphen mit Knoten oder Kanten, Ersetzung des Teilgraphen mit einem anderen Teilgraphen, die zusätzliche Färbung der Knoten oder Kanten;
- Konstruierung der Algorithmen – Umgehungsalgorithmen, die Feststellung des Zyklus von Euler oder von Hamilton, die

Konstruierung des längsten oder des kürzesten Weges, Algorithmen für die Klassifikation der Objekte.

Ziemlich grossen Teil von Graphentheorie Aufgaben kann man lösen, wenn man sich auf Schubfachprinzip stützt (Aigner, Ziegler, 2010). Die bekannten Sätze von Ore, Dirac über die Hamiltonzyklusexistenz, das Turantheorem über die Existenz der Clique K_3 (Ore, 1968), der Satz von Dilworth über die teilweise geordneten Gesamtheiten, das Ramseytheorem über die Färbung der Kanten brauchen dieses Prinzip, um quantitative Characktergrössen einzelner Objekte festzustellen. Ein Teil von den Olympiadenaufgaben sind als Spezialfälle von diesen und anderen Theoremen der Graphentheorie formuliert. Die wichtigsten Fragen, die bei diesen Aufgaben gelöst werden, sind folgende:

- die Graphenknotengrade zu bewerten;
- die maximale Zahl von Knoten oder Kanten, die den gegebenen Voraussetzungen entsprechen, festzustellen;
- die Existenz des Teilgraphen von der speziellen Art festzustellen;
- den Durchmesser des Graphen zu berechnen.

Beispiele.

Interpretationen der Kombinatorikaufgaben. Eine X-beliebige Elementengesamtheit kann man mit Graphen interpretieren, wenn es möglich ist, die Verhältnisse zwischen den Elementen topologisch zu widerspiegeln. Zum Beispiel, wenn die Schülergruppe verschiedene Sportarten treiben, dann kann man die gegebene Situation als zweiteiligen Graphen widerspiegeln. Orientierte Graphen kann man gestalten, um, zum Beispiel, die Kontinuität mehrerer Generationen in einer Familie oder die Struktur einer Leitung darzustellen.

1. Aufgabe. (IMO, 2001). An Mathematikwettbewerben nahmen 21 Mädchen und 21 Jungen teil. Jeder Teilnehmer hat wenigstens 6 Aufgaben gelöst. Ein Mädchen und ein Junge hatte mindestens eine solche Aufgabe, die die beiden gelöst hatten, wie das Mädchen, so auch der Junge. Beweisen Sie bitte, dass am Wettbewerb eine solche Aufgabe zu lösen war, die mindestens 3 Jungen und mindestens 3 Mädchen gelöst haben!

Interpretation. Diesen Fall kann man als zweiteiligen Graphen beschreiben, wo beide Teile die Jungen und die Mädchen repräsentieren. Jede Aufgabe kennzeichnen wir mit unterschiedlichen Farben. Zwei Knoten verbinden wir mit der Kante einer bestimmten Farbe dann, wenn die entsprechenden Junge und Mädchen eine und dieselbe Aufgabe gelöst haben. Die theoretische Aufgabe ist zu beweisen, dass der gegebene Graph einen monochromatischen zweiteiligen Teilgraphen $K_{3,3}$ beinhaltet.

Ramsey-Typ Aufgaben. Die sogenannten Ramsey-Typ Aufgaben (Rosta, 2004) untersuchen spezielle Art von Teilgraphenexistenz in vollen gefärbten Graphen, oder auch in irgendwelchen unvollen Graphen bewerten, wie die Zahl von Kanten die Existenz von irgendwelchen speziellen Teilgraphenart beeinflusst. Das folgende Beispiel zeigt, wie man solche klassische Aufgabe lösen kann, wenn man die Knotengesamtheit sortiert. Mit Hilfe von Schubfachprinzip ist die zahlenmässige Bewertung des Endresultats getätigt worden.

<u>2. Aufgabe.</u> Wenn im Raum $(m-1)n+1$ Menschen sind, dann sind zwischen ihnen entweder m Leute, die einander unbekannt sind, oder ein Mensch, der wenigstens n Leute von dagewesenen kennt.

<u>Die Lösung.</u> Bei der Bildung des Graphen verbinden wir zwei Knoten mit der Kante, wenn die entsprechenden Menschen miteinander bekannt sind. Wir müssen beweisen, dass der Graph einen leeren Teilgraphen mit m Knoten beinhaltet, oder wir müssen beweisen, dass auf dem Graphen ein Knoten ist, deren Grad wenigstens n ist.

Gruppieren wir die Knoten folgenderweise: erster Knoten v_1 ordnen wir in die Gruppe $G1$. Der Knoten v_i (i=1,2,...) ordnen wir in die erste solche Gruppe, wo kein Knoten ihren Nachbarn hat, anderenfalls bilden wir für diesen Knoten eine neue Gruppe. Am Ende des Verfahrens haben wir k Gruppen bekommen. Jede Gruppe beinhaltet die Knoten, die einen leeren Teilgraphen bildet. In der letzten Gruppe ist wenigstens ein solcher Knoten A, die wenigstens einen Nachbarn in jeder von vorherigen Gruppen hat. Wenn die Gruppenzahl mehr als n ist, dann ist der Grad des Knoten A mindestens n. Im entgegengesetzten Fall kann man eine solche Gruppe finden, wo mindestens m Knoten gibt.

Nachbarschaft von Graphenknoten. Verschiedene qualitative Bewertung kann man bekommen, wenn man die Nachbarschaft von Graphenknoten betrachtet. Diese Methode wird oft bei den Beweisen vom Entgegengesetzten verwendet.

<u>3. Aufgabe.</u> Auf dem See sind 9 Inseln, die miteinander mit den Brücken verbunden sind. Aus jeder Insel führen genau 4 Brücken. Beweisen Sie bitte, dass auf jedem See 3 Inseln gibt, die alle miteinander mit Brücken verbunden sind.

Zusammenstellung von Algorithmen. Bei der Lösung von Aufgaben, wo man die Existenz eines Teilgraphen beweisen soll, oder man muss die Eigenschaften irgendwelcher Elementengesamtheit begründen, oder man soll auch die Färbung der Graphensknoten charakterisieren, ist es manchmal nützlich, spezielle Algorithmen zu konstruieren. Die Antwort kann man dann bekommen, entweder – wenn man die Schrittenzahl von Algorithmen bewertet, oder wenn man auch begründet, dass man bei dem Tätigkeitsergebniss des gegebenen Algorithmus die gewünschte Situation eintritt.

4. Aufgabe. Zu den Fortbildungskursen sind sehr geschwätzige Kursteilnehmer gekommen, die mit ihren Freunden plappern. Kann man die Kursteilnehmer so in zwei Räume unterbringen, damit wenigstens jeder Teilnehmer eine Hälfte von Freunden im anderen Raum hat?

Informationsverbreitung. Die Aufgaben über die Informationsverbreitung kann man lösen, wenn man sich auf die Breitensuche oder Tiefensuche Algorithmen stützt. Die Elementenzahlauswertung auf verschiedenen einzelnen Stufen hilft bei der Feststellung der Informationsverbreitungs Schnelligkeit in einer bestimmten sozialen Schicht.

5. Aufgabe. Der Staat hat $2n+1$ Stadt. Für jede Stadtgesamtheit kann man eine solche Stadt vom restlichen Teil finden, die drahtlose Verbindung mit allen n Städten hat. Beweisen Sie bitte, dass man eine solche Stadt finden kann, die drahtlose Verbindung mit allen Städten des Staats hat.

Kommentar. Die theoretische Interpretation zeigt, dass der Graph völlig mit den Sternen übersät ist, dessen Grad mindestens n ist. Die Bedeckung ist so dicht, dass hier der grösste Stern existiert, dessen Grad $2n$ ist.

Schlussfolgerungen. Der Graph ist einfach konstruierbares, diskretes mathematisches Modell, deshalb sogar auch für Grundschüler verständlich. Die Aneignung der Grundbegriffe der Graphentheorie könnte den Schülern helfen, verschiedene Kompetenzen zu entwickeln – die gegebene Information schematisch zu visualisieren, kombinatorische Berechnungen durchzuführen, topologische Strukturen zu erforschen, Algorithmen zusammenzustellen, neue Beweismethoden anzueignen. Wenn man sich auf Graphentheorie beruht, kann man auch verschiedene interessante Modellierungsaufgaben zusammenstellen. Das könnte auch den Inhalt des Mathematikunterrichts zu modernisieren.

Literatur

Aigner, M., Ziegler, G.M.(2010). Das Buch der Beweise. Berlin: Springer Verlag.

Ope, O. (1968). Теория графов. Москва, Наука.

Rosta, V.(2004): Ramsey Theory Applications. In: Electronic Journal of Combinatorics. Erhalten am März, 2011 von: http://www.combinatorics.org/Surveys/ds13.pdf