Andreas VOHNS, Klagenfurt

Vektoren sind wie Zahlen – nur ganz anders. Eine didaktisch orientierte Sachanalyse zum Vektor(- und Matrizen)begriff in der Oberstufe

Die Einführung von Vektoren als geometrische Objekte steht seit längerer Zeit fachdidaktisch in der Kritik, spielt in der schulmathematischen Praxis im deutschsprachigen Raum dennoch eine unvermindert große Rolle. Der seitens der Fachdidaktik (etwa von Malle 2005) formulierte Alternativvorschlag einer Einführung von Vektoren (und Matrizen) als arithmetisch-algebraische Objekte (mit ggf. flexibler geometrischer Deutung) legt nahe, deren Einführung analog zu Zahlbereichserweiterungen zu konzipieren.

Wenn man allerdings sagen will, inwiefern Vektoren „wie Zahlen“ sind, so ergibt sich generell die Herausforderung, dass bereits für die regulären Zahlbereichserweiterungen „Vorstellungsumbrüche“(Hefendehl/ Prediger 2006) unvermeidbar sind. Jede Charakterisierung von Vektoren in der Schule sollte daher größtmögliche Transparenz anstreben, worin Kontinuitäten und Diskontinuitäten, Kohärenzen und Differenzen zwischen dem (nicht nur rechnerischen) Umgang mit Zahlen und Vektoren bestehen.

Ziel des Vortrages war es, herauszufinden, welche Kohärenzen und Differenzen zwischen Zahlen und Vektoren bestehen. Im größeren Kontext des Habilitationsvorhabens des Vortragenden steht diese Frage am Beginn einer größeren Studie, die versucht, ein auf dem arithmetischen Vektorbegriff fußendes curriculares Konzept der Linearen Algebra in der Oberstufe auszuarbeiten, welches Sinn- und Bedeutung dieses Stoffgebietes und sein Verhältnis zur Unterstufenmathematik im Unterrichts diskutierbar macht (Zur Begründung dieses Ansatzes vgl. Vohns 2010).

Grundsätzlich kann zunächst festgehalten werden, dass arithmetischen Vektorkonzepten daran gelegen ist, Vektoren als „verallgemeinerte Zahlen“ aufzufassen, die man ebenso wie Zahlen geometrisch als „als Punkte oder Pfeile gedeutet werden, wobei auch ihre Rechenoperationen mehrfache Deutungen erfahren“(Bürger/ Fischer/ Malle/ Reichel 1980, S. 174). Dieser Vektorbegriff beschränkt sich dabei zwingend auf Vektoren als Elemente des $\mathbb{R}^n$ (n beliebig aber fest).

1. Objektvorstellungen

Der Zahlbegriff weist schon bei den natürlichen Zahlen einen relativen großen Facettenreichtum auf, was unterschiedliche Zahlaspekte bzw. -vorstellungen anbelangt (vgl. Krauthausen/ Scherer 2007, S. 9). Für neue

Zahlbereiche kommen dann je nach Autor noch verschiedene neue Zahlvorstellungen hinzu, alte müssen verworfen werden. Über die einzelnen Komponenten „erbt" der Vektor die Vielschichtigkeit des Zahlbegriffs nahezu zwangsläufig – er kann in seinen Zeilen etwa Anzahlen, Maßzahlen, Operatoren oder Rangplätze enthalten. Insofern Vektoren selbst als „verallgemeinerte Zahlen" aufgefasst werden sollen, werden dabei wenigstens die folgenden Zahlvorstellungen angesprochen:

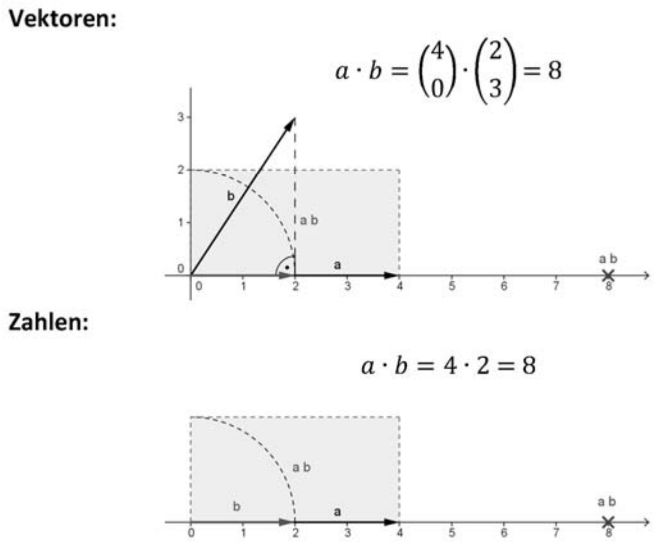
- Vektoren werden als verallgemeinerte Maßzahlen konzipiert: So wie mit Zahlen die Länge, kann mit Vektoren Länge und Richtung einer Strecke „gemessen" werden.
- Vektoren werden als verallgemeinerte Relationalzahlen konzipiert: Man benötigt (im Prinzip willkürlich) gesetztes Vergleichsmarken (den Nullvektor und den Betrag/ die Länge 1).
- Vektoren greifen auf eine verallgemeinerte Zahlenstrahl-Vorstellung zurück: Die Ebene, der Raum, Hyperräume dienen als „sekundäre Grundvorstellung"(vom Hofe 2003). „Gleich" bleibt hier vor allem, das Zahlen wie Vektoren einerseits als Punkte auf der Zahlengerade (in der Ebene, im Raum), andererseits als Pfeile (mit bestimmter Länge) entlang der Zahlengerade (in der Ebene, im Raum)
- Vektoren werden als verallgemeinerte Rechenzahlen konzipiert, dabei kommen zum Teil neue „Spielregeln" des Rechnens zum Tragen.

2. Operationsvorstellungen

Im Vortrag wurde herausgearbeitet, dass für Addition und Subtraktion von Vektoren im Prinzip kaum neue Grundvorstellungen aufzubauen sind: Zusammenfassen, Hintereinanderlegen (Addition), Unterschiede bestimmen und Wegnehmen (Subtraktion) bleiben auch für das Rechnen mit Vektoren zentral. Größere technische Schwierigkeiten in der Ausführung der Operationen sind aufgrund der (intuitiv vermutlich naheliegenden) komponentenweisen Ausführung von Addition und Subtraktion auch eher weniger gewichtig einzuschätzen. Sehr wohl ergeben sich allerdings z.T. Probleme in den geometrischen Interpretationen: Wenn Vektoren als Verschiebungen aufgefasst werden, kann es hinderlich sein, dass die „Bewegung" die durch die beiden Summanden-Vektoren eine andere ist als die des Summenvektors. Dass der Betrag des Summenvektors nicht die Summe der Beträge der Summandenvektoren ist (ähnlich für die Differenz), kann eine weitere Schwierigkeit darstellen. Noch deutlicher sind allerdings die Probleme im Bereich der Multiplikation: In Österreich lernen die Oberstufenschüler(innen) je nach Schulform zwei bis drei Arten der Multiplikation von Vektoren kennen: die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, das

Skalarprodukt und (v.a. in beruflichen höheren Schulen) die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix. In keiner dieser Multiplikationen sind beide Faktoren und das Produkt allesamt Vektoren, dennoch lassen sich Anknüpfungspunkte an die Multiplikation von Zahlen finden:

– Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar knüpft an die zeitlich sukzessive Multiplikationsvorstellung an. Wird ein Vektor mit einer natürlichen Zahl multipliziert kann die Produktbildung sogar wieder als „fortgesetztes Addieren“ interpretiert werden. Für rationale und reelle Zahlen benötigt man die entsprechende, bereits in diesen Zahlbereichen wesentliche Vorstellung der Größenänderung/ Skalierung (vgl. Hefendehl/ Prediger 2006).
– Das Skalarprodukt wird arithmetisch zum Teil durch Analogien der Form: Menge mal Preis ergibt Gesamtkosten (Zahlen), Mengen (getrennt nach Sorten) mal Preise (je Sorte) ergibt Gesamtkosten motiviert. Geometrisch wird zum Teil versucht, diese Produktbildung als Fortsetzung räumlich-simultaner Multiplikationsvorstellungen aufzufassen (s. Abbildung).



Beide Wege bergen die Gefahr, dabei auftretende Diskontinuitäten eher zu verdecken. Etwa am Beispiel der arithmetischen Analogie: Warum wird hier eigentlich nach den Gesamtkosten (also einer Zahl) und nicht nach den Kosten je Sorte (also einem Vektor) gefragt – gerade diese Frage würde ja auf das (komponentenweise definierte und für wirtschaftliche Anwendungen hoch relevante) Hadamard-Produkt führen (vgl. Jensen 2011, S. 102f). Zudem scheint erwähnenswert, dass das Skalarprodukt eine (was die Verrechnung der Komponenten) angeht sowohl multiplikative wie additive Struktur aufweist und bei der Verwendung geeigneter „Betrags-Einsen“ auch für additive und subtraktive Fragestellungen nutzbar ist (Beispiele dazu finden sich in den Vortragsfolien, s. unten).

- Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix wurde im Vortrag (beschränkt auf quadratische Matrizen) als ein möglicher sinnvoller Endpunkt der Produktbildung von Vektoren herausgearbeitet, insofern sich alle anderen im Vortrag angesprochen Produktbildungen (bzw. Fragestellungen, die auf diese führen) letztlich auch durch Multiplikationen mit Matrizen modellieren lassen.

3. Ausblick

Es ergeben sich wenigstens zwei weitergehende Fragen, die im Vortrag allenfalls angerissen werden konnten: Wenn ein arithmetische Vektorbegriff eingeführt wird, so kann dies kaum geschehen, ohne die Rolle von Anwendungen der Analytischen Geometrie für die Lineare Algebra in der Oberstufe kritisch zu hinterfragen – das macht auf unterschiedlichen Ebenen Standpunktwechsel erforderlich. Zum anderen ist Lineare Algebra vor allem auch Algebra, also nicht bloß ein Rechnen mit zahlenmäßig vorgegebenen Vektoren, sondern das Aufstellen, Operieren und Interpretieren von Vektortermen und -gleichungen. Wenn nun aber Variablen nicht mehr bloß für Zahlen, sondern auch für Vektoren stehen können, ist u.U. auch bei Variablenvorstellungen von „Vorstellungsumbrüchen" auszugehen.

Die im Vortrag eingesetzten Folien können unter **http://scr.bi/f7qFZn** eingesehen und heruntergeladen werden.

Literatur

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., Reichel, H.-Chr. (1980): Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. In: Journal für mathematik-Didaktik, 1 (3), 171 - 187.

Hefendehl-Hebeker, L., Prediger, S. (2006): Unzählig viele Zahlen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 11 (48), 1 - 7.

Jensen, U. (2011): Wozu Mathe in den Wirtschaftswissenschaften? Braunschweig: Vieweg & Teubner.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier.

Malle, G. (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. In: mathematik lehren, 133, 8-14.

Vohns, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31 (2), 227-255

vom Hofe, R. 2003: Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: mathematik lehren, 118, 4 - 8.