

Bodo v. PAPE, Oldenburg

## Über den Umgang mit Zahlen

„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Personen als konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht.“ (KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik)

### 1. Zahlen im Leben

Der engagierte und reflektierende Bürger sieht sich in der Tat in vielen Situationen -- privaten wie öffentlichen - mit Produkten von Mathematik konfrontiert, Angaben zu Gesundheitsrisiken etwa oder Kosten-Nutzen-Analysen. Bei dem, was den Bürger erreicht und womit er umzugehen hat, handelt es sich generell um Zahlen. Hinter diesen Zahlen steht in manchen Fällen sehr viel an Mathematik und Formeln, dieser Hintergrund aber ist dem Bürger in der Regel nicht zugänglich. Die Fähigkeit zum Umgang mit den Zahlen dagegen - die Einschätzung ihrer Aussagekraft und ihres argumentativen Gewichts -, das ist es, was tatsächlich zu den Grundqualifikationen eines mündigen Bürgers gehört. Konkret: Wenn in der Argumentation um Stuttgart 21 mit einem Nutzen-Kosten-Verhältnis argumentiert wird, das von 2,4 (1994) zunächst ansteigt auf 2,95 (2006), um dann abzusinken auf „deutlich unter 1“ (2010), so sollte der Bürger sich einen Reim darauf machen können.

Hinter Zahlen, mit denen wir es zu tun haben, steht nur in den einfachsten Fällen ein direktes Abzählen. Zahlen kommen in die Welt als Messwerte, als Schätzwerte oder vielfach auch als „pragmatische Näherungen“. In jedem dieser Fälle sind die Zahlen mit einer Unsicherheit und Unschärfe behaftet. Der mündige Bürger weiß das insbesondere von den Zahlen der Statistik. Aber auch Unschärfe der Begriffe spielt bei den Zahlen aus dem Alltagsleben eine Rolle. In der Technik und in den exakten Wissenschaften hat man die Quellen der Ungenauigkeit genau im Blick: Das variiert von der Toleranz der Messgeräte, der Unschärfe der Basiseinheiten bis hin zu der Heisenberg'schen Unschärferelation. Bei der Neufestlegung des Meters etwa strebt man derzeit eine Genauigkeit von  $2E-8$  an. Gleichzeitig verlautet aus der Chemie, man wolle die Atommassen künftig nicht mehr als Zahlen angeben sondern nur noch als Intervalle.

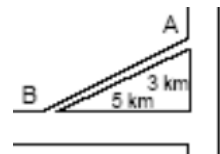
Wir sollten festhalten: Bei denjenigen Zahlen, mit denen wir es im Leben zu tun haben, macht eine Genauigkeit  $< 1E-7 = 0,1\text{ppm}$  keinen Sinn.

## 2. Der Umgang mit Zahlen in der Schule

„Zahl“, „Messen“, „Daten“ - das sind Begriffe, die folgerichtig auch in der aktuellen pädagogischen Theorie ein hohes Gewicht haben. Sie decken die Hälfte der Leitideen ab, an denen die PISA-Didaktik sich orientiert.

Wie sieht es mit dieser Neuausrichtung in der Praxis aus? Ein Blick auf das erste Aufgabenbeispiel aus den Bildungsstandards hilft weiter.

„Lohnt sich die Abkürzung? Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern einen „Schleichweg“.



Äußern Sie sich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg“ durchschnittlich mit 50 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 30 km/h fahren kann.“

Ergebnis: „Die Fahrzeiten betragen ca. 12 min (Schleichweg) und ca. 10 min. Die Abkürzung bringt keine Zeitersparnis.“

Hier soll man nicht einfach rechnen, hier soll man „beurteilen“: „Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse in Bezug auf die Sachsituation.“

Was allerdings die - hier übergeordnete - „Leitidee Messen“ an betrifft: Wie steht es eigentlich um die Eingangswerte, ihre „Lebensnähe“, ihre Relevanz, die Art ihrer Bestimmung und ihre Genauigkeit? Die Möglichkeiten, sich von den verpönten herkömmlichen „eingekleideten Aufgaben“ zu distanzieren, sind hier jedenfalls nicht ausgeschöpft.

Die Leitideen dienen in der Rahmenkonzeption der PISA-Studie dazu, den Bereich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu strukturieren. Hier - bei den sechs Kompetenzen - liegen die eigentlichen Ziele des MU. Zentral ist hier

K5: „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen. Dazu gehört:

- mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten, ...

Um der Lebenswirklichkeit und dem tatsächlichen Bedarf an „Mathematik im Alltagsleben“ gerecht zu werden, sollte hier der Einsatz einer Tabellenkalkulation wenigstens ausdrücklich daneben gestellt werden:

- Umgang mit Zahlen im Leben: Arbeiten mit einfachen und komplexeren Netzwerken von Zahlen, Größen und Daten: Justieren, Optimieren, Szenarios, Visualisieren, Simulationen durchführen

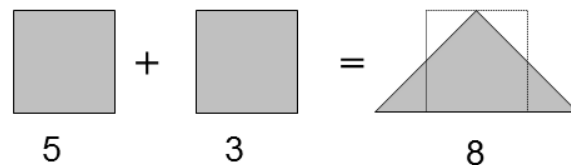
Die Aufgabenstellungen der überkommenen Schulmathematik lassen sich auch mit diesem Werkzeug sehr direkt und umfassend abdecken: Nullstellenbestimmung, Anpassungskurven, Extrem- u. andere ausgezeichnete Punkte bei Funktionen von einer oder mehreren Variablen, Berechnungen und Darstellungen im Raum. Der Rahmen der zugänglichen Fragestellungen lässt sich mit einem derartigen Werkzeug sogar problemlos deutlich erweitern. Das zu zeigen war Anliegen meines Vortags: „‘Geht nicht‘ gibt’s nicht!“ (2010)

Wir können uns sicher sein: Bearbeiten wir derartige Aufgabenstellungen mit einem Werkzeug wie Excel, dann sind wir näher dran an der Realität des Umgangs mit mathematischen Fragestellungen im Leben, als wenn wir zu CAS-Schulrechnern greifen - der bei aller erklärten Offenheit nicht selten einzig zugelassenen Art von höheren elektronischen Hilfsmitteln.

### 3. Rechnen mit unscharfen Zahlen: Rundungszahlen

Mit unscharfen Zahlen bekommt man es bei km-Angaben oder bei Altersangaben zu tun, etwa wenn man Summen oder Differenzen berechnet. Bei der Berechnung von Wohnflächen geht es um Summen von gewichteten Produkten unscharfer Zahlen. Die Extrapolation einer Finanzierung führt auf eine unscharfe Exponentialfunktion.

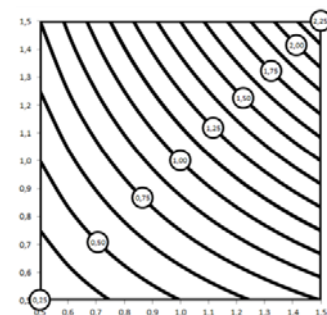
Leicht überschaubar sind Addition und Subtraktion von ganzzahlig gerundeten Zahlen. Summe und Differenz sind dreieckverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass im vorliegenden Fall die gerundete Summe 9 beträgt, ist offenbar  $1/8$ .



Für die Verteilung und den Erwartungswert des Produkts zweier ganzzahlig gerundeter Zahlen, bieten sich 3 Möglichkeiten an:

- Simulation
- systematisches Durchspielen mit Repräsentanten der Teilintervalle
- exakte Berechnung auf der Basis eines geometrischen Modells

Grundlage für die Berechnungen zum Produkt zweier Zufallseisen ist die Bestimmung der Verteilung der möglichen Werte. Der Anteil der Konstellationen aus den Basisintervallen, für die das Produkt  $\leq a$  ist, ist der Anteil der Fläche unter der Hyperbel zu  $a/x$  an einem Einheitsquadrat. Man erhält sie durch Integration. Ableiten nach  $a$  liefert dann die Dichtefunktion.



So bestätigt sich zunächst das Ergebnis der Simulation, dass das Produkt am ehesten im Bereich im  $\frac{3}{4}$  zu erwarten ist. Dieser „dichteste Wert“ oder „Modalwert“ ist aber sehr wohl zu unterscheiden von dem Erwartungswert. Den erhält man durch Integration über die mit  $a$  multiplizierte Dichte:

$$E(1 \cdot 1) = \int_{1/4}^{3/4} a \cdot (\ln(a) - 2 \cdot \ln(2)) da + \int_{3/4}^1 a \cdot \left(2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(a)\right) da = 1$$

Für den Quotienten  $1/1$  liefert das entsprechende Vorgehen die 1 als dichtesten Wert und als Erwartungswert

$$E(1/1) = \ln(3)$$

Leichter hat man es dann mit den Erwartungswerten zum Betrag der Differenz und zum Maximum zweier Zufallseins, und noch leichter natürlich mit der Berechnung von Quadrat und Wurzel einer einzelnen Zufallseins.

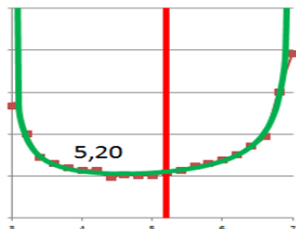
$$E(|1 - 1|) = \frac{1}{3} \quad E(\max(1; 1)) = \frac{7}{6} \quad E(1^2) = \frac{13}{12} \quad E(\sqrt{1}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

### 3. Maria und Martin: Die kopernikanische Wende im Bildungswesen

Wenn „Der Spiegel“ darüber berichtet, wie die Welt der PISA-Mathematik aussieht, dann gehört diese Geschichte einfach dazu:

Mit den drei Zugängen zu den Problemlösungen ist man für derartige Aufgabenstellungen bestens gerüstet.

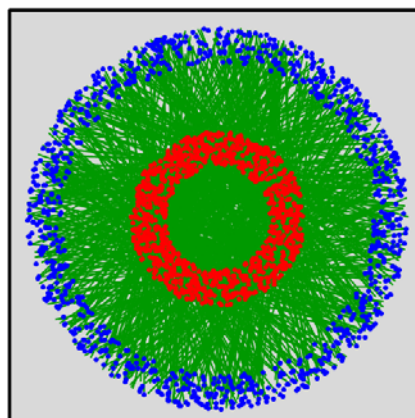
Den Aha-Effekt, den die Geschichte von Martin und Maria unter deutschen Pädagogen ausgelöst hat, wird man irgendwann einmal als die kopernikanische Wende im deutschen Bildungswesen erkennen. Die Geschichte geht so: „Maria lebt zwei km von der Schule entfernt, Martin fünf km. Wie weit leben Maria und Martin voneinander entfernt?“



Jeder der Ansätze liefert als Erwartungswert der Entfernung 5,20 km. Dem algebraischen Ansatz wird man aber wohl aus dem Weg gehen: Von Hand ist es kaum zu bewältigen, die abschließende Integration gelingt ohnehin nur numerisch.

Will man allerdings - um der Realität etwas besser gerecht zu werden - unterstellen, dass die Entfernungsangaben nicht exakt sind, sondern gerundet, dann führt an einer Simulation wohl kein Weg mehr vorbei. Das ergibt:  $E(d) = 5,24$  km.

Gelegentlich ist man gut beraten, ein Ergebnis anzusteuern nicht über komplexe Rechnungen, sondern über eine Simulation.



Auch das können wir lernen aus der Diskussion um Stuttgart 21.