

Daniel WAGNER, Kiel

Mathematische Kompetenzanforderungen in Schule und Hochschule: Die Rolle des formal-abstrahierenden Denkens

Zahlreiche frühzeitige Studienabbrüche und hohe Schwundquoten in den MINT-Fächern, insbesondere im Fach Mathematik, verlangen eine detaillierte Charakterisierung der Ursachen für die Probleme in der Studieneingangsphase. Beispielsweise identifizierten de Guzman et al. (1998) beim Übergang von der Sekundarstufe II in ein Studium mit hohem Mathematikanteil mehrere Problemebenen: Neben Problemen im motivational-affektiven und soziokulturellen Bereich sowie bei Lehr-Lernprozessen, traten vor allem im kognitiv-epistemologischen Bereich Schwierigkeiten seitens der Studierenden auf. Der zuletzt genannte Bereich ist auch der Ansatzpunkt dieser Studie, welche sich auf den kognitiven Bereich und dabei speziell auf Unterschiede in den Kompetenzanforderungen zum Ende der Sekundarstufe II und zu Beginn des ersten Studiensemesters an der Universität im Fach Mathematik beschränkt.

1. Theoretischer Hintergrund

Die wenigen empirischen Ergebnisse zu diesem Thema stammen vor allem aus dem angelsächsischen Raum (Tall, 1991; Hoyles, 2001). Sie liefern jedoch nur geringe Erkenntnis, wie mathematische Kompetenz an der Schnittstelle Schule-Hochschule strukturiert ist. Fischer (2006) identifiziert in einer qualitativen Studie zu Fehlvorstellungen in der Linearen Algebra Schwierigkeiten, die über das rein inhaltliche hinausgehen. Insgesamt lässt sich eine Veränderung der Art des Mathematiklernens im Sinne eines formaleren Zugangs vermuten (Tall, 1991; Hoyles, 2001). Um diesen formaleren Zugang genauer zu erfassen wird als theoretisches Fundament dieser Studie das Konstrukt „Formal-abstrahierendes Denken“ eingeführt (vgl. Wagner, 2010). Als Grundlage dieses Konstrukts dienen verschiedene Arbeiten zum „Advanced Mathematical Thinking“ (Tall, 1991) sowie kognitionspsychologische Theorien u.a. zum Deduktiven Denken (Johnson-Laird, 2006; Evans, 2008).

2. Ziele und Forschungsfragen

Ein Ziel der Studie ist es, die bestehenden Unterschiede in den Kompetenzanforderungen zwischen Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe II auf der einen und Studierenden des ersten Semesters auf der anderen Seite aufzuzeigen und zu charakterisieren. Bei der Herausarbeitung dieser Unterschiede wird insbesondere auf die Rolle des Formal-

abstrahierenden Denkens eingegangen. Konkret wird die Beantwortung folgender Forschungsfragen angestrebt:

- Wie unterscheiden sich die Kompetenzanforderungen in der Sekundarstufe II und im ersten Studiensemester im Fach Mathematik?
- Welche Rolle spielen dabei die Anforderungen an das Formal-abstrahierende Denken?

3. Methodisches Vorgehen

Als Hilfsmittel zur Beantwortung der genannten Forschungsfragen wurde ein gemeinsames Kompetenzmodell für das Ende der Sekundarstufe II und das erste Studiensemester im Bereich Analysis entwickelt (vgl. Wagner, 2010). Auf Basis dieses Modells wurde ein Kompetenztest mit insgesamt 30 teils offenen, teils Multiple-Choice Items konzipiert. Die Aufgaben wurden einem Expertenrating unterzogen und mit einer geeigneten Stichprobe Studierender sowie Schülerinnen und Schüler pilotiert. Die Stichprobe für die im Sommer 2010 durchgeführte Haupterhebung bestand aus insgesamt 453 Personen und setzte sich aus Studierenden des ersten und zweiten Semesters sowie vier Abschlussklassen unterschiedlicher Kieler Schulen zusammen. Insgesamt hatte jeder Teilnehmer 12 Aufgaben in einem Zeitraum von 30 Minuten zu bearbeiten. Die Auswertung der Daten erfolgte mittels probabilistischer Testtheorie (eindimensionales, dichotomes Raschmodell). Die guten Item-Fit-Werte der einzelnen Aufgaben indizieren dabei eine gute Passung des zugrundegelegten Modells auf den vorhandenen Datensatz. Die Reliabilität ist mit einem EAP/PV Wert von .75 als zufriedenstellend einzuschätzen.

4. Erste Ergebnisse

Ein erster Vergleich der Ergebnisse von Studierenden mit Schülerinnen bzw. Schülern wurde mit Hilfe von T-Tests durchgeführt. Abb. 1 zeigt die z-transformierten Kompetenzwerte der beiden Gruppen.

Hierbei weist die Studierendenstichprobe ($M = .42$, $SD = .89$) im Vergleich zu den Schülerinnen und Schülern ($M = -.52$, $SD = .88$) erwartungsgemäß einen deutlich höheren Kompetenzwert auf ($T = 11.2$, Cohens $d = 1.06^{**}$).

Zur Illustration ist in Abb. 2 das Item „Betragsfunktion“ gezeigt, das auf den Aspekt des mathematischen Beweisens fokussiert. Abb. 2 zeigt eine typische unzureichende Lösung, wie sie hauptsächlich in der Schülerstichprobe vorgefunden wurde. Die Probandin argumentiert hier auf einer intuitiv-anschaulichen Ebene, obwohl ein mathematischer Beweis gefordert war.

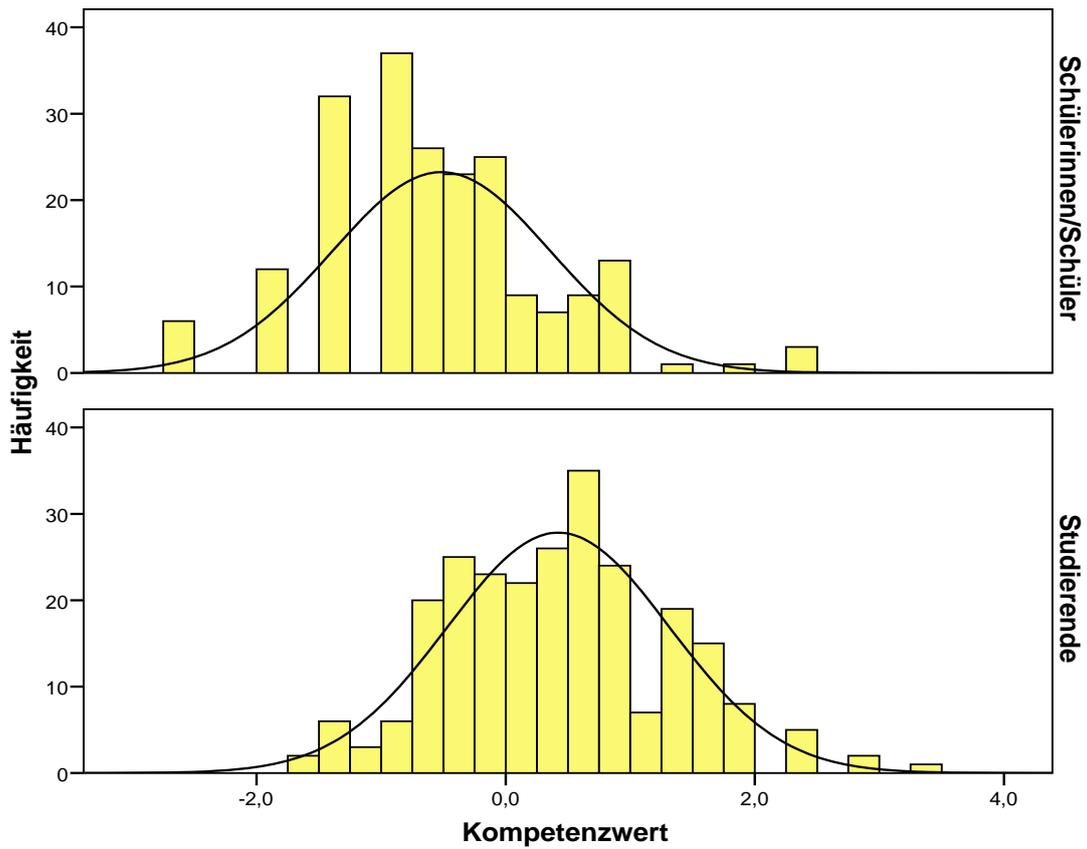


Abbildung 1: Mittelwerte von Studierenden und Schülerinnen bzw. Schülern

Aufgabe 9.

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Geben Sie einen mathematischen Beweis dafür, dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

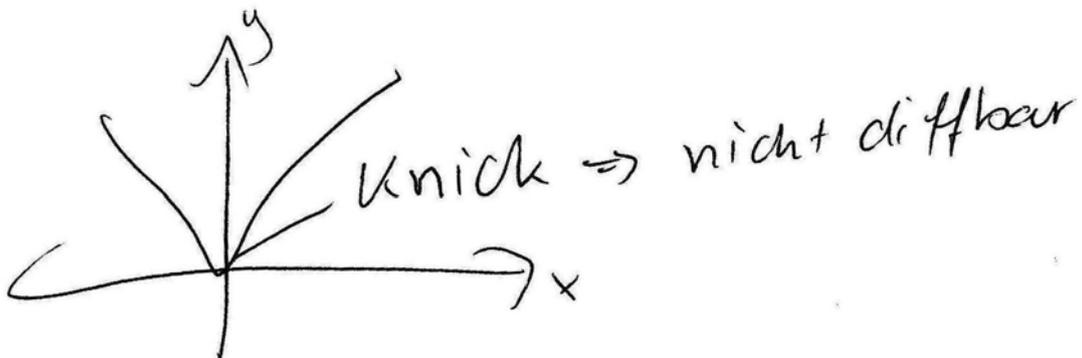


Abbildung 2: Unzureichende Beispiellösung für das Item „Betragsfunktion“

Insgesamt lässt sich aus den ersten Analysen zweierlei konstatieren:

Aus quantitativer Perspektive zeigt sich erwartungsgemäß, dass die Studierenden der Stichprobe höhere Kompetenzwerte erreichen als die Schülerinnen und Schüler. Aus qualitativer Perspektive zeigt sich, dass solche Items, die einen mathematischen Beweis bzw. eine formal-mathematische Argumentation verlangen (z. B. das Item „Betragsfunktion“), von Studierenden deutlich besser gelöst werden als von Schülerinnen und Schülern. Dagegen ist dieser Unterschied bei Items, die eine Anwendung von Rechenprozeduren verlangen (z. B. Ableitung einer Funktion berechnen), wesentlich geringer bzw. in einigen Fällen sogar nicht signifikant. Damit deuten sich erste Unterschiede und Gemeinsamkeiten in den mathematischen Kompetenzanforderungen der Sekundarstufe II und des Studiums im ersten Semester an, die auf die Bereiche des formalen mathematischen Argumentierens und des Durchführens von Rechenverfahren zurückgeführt werden können.

Literatur

- Evans, J.St.B.T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgement and social cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, 255-278.
- Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden*. Dissertation. Dortmund: Universität Dortmund.
- De Guzman, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education. *Documenta Mathematica, Extra Volume ICME 1998 (III)*, 747-762.
- Hoyle, C., Newman, K., & Noss, R. (2001). Changing patterns in transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (6), 829-845.
- Johnson-Laird, P.N. (2006): *How we reason*. Oxford: Oxford University Press.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Wagner, D. (2010). Mathematische Kompetenz beim Übergang Schule-Hochschule. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03. 2010 bis 12. 03. 2010 in München* (S. 903-906). Münster: WTM, Verlag für Wiss. Texte und Medien.