Henrike ALLMENDINGER, Siegen

Hochschulmathematik versus Schulmathematik in Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“

In der mathematikdidaktischen Forschung für das gymnasiale Lehramt wird Felix Klein in Zusammenhang mit dem Begriff der *doppelten Diskontinuität*, der aus seinem Munde stammt, und seiner Vorlesungsreihe *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* immer wieder zitiert. Heutzutage gibt es zahlreiche Vorlesungen, die vermeintlich im Sinne Kleins gehalten werden. Dabei unterscheiden sich Ausgangsperspektive, Intention und Schwerpunktsetzung oft bereits in ihrer Anlage wesentlich von ihrem Vorbild.

Der Begriff *höherer Standpunkt* wird von Klein stark intuitiv gebraucht; er liefert keine präzise Beschreibung dessen, was er sich unter dem Begriff vorstellt. Mein Dissertationsprojekt strebt an, anhand der veröffentlichten Manuskripte der Vorlesungsreihe, den *Kleinschen höheren Standpunkt* darzustellen und damit die für Klein spezifische Vorstellung einer Elementarmathematik vom höheren Standpunkt herauszuarbeiten. Insofern ist meine Arbeit eine Fallstudie, die bestenfalls als Grundlage für eine weiterentwickelte, die aktuelle didaktische Forschung einbeziehende, Auffassung des Begriffs dienen kann.

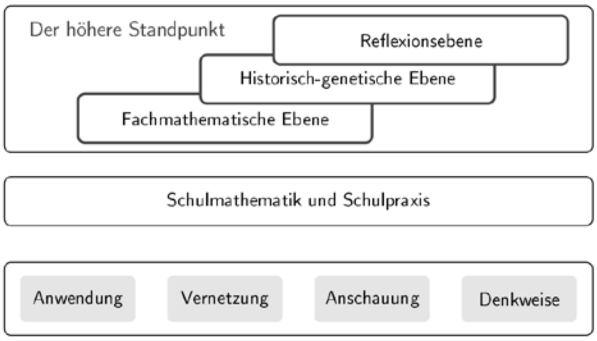
Der Analyserahmen

Als Auftakt zu seinem ersten Kapitel der ersten Vorlesung schreibt Klein:

„Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, auf welche Weise man diese Dinge in der Schule behandelt. Dann wird die weitere Untersuchung fragen, was vom höheren Standpunkte aus betrachtet in ihnen alles enthalten ist.“ (Klein 1908, S. 6)

Diese Vorgehensweise, seine Vorstellung des höheren Standpunkts direkt mit einer Diskussion der aktuellen Lage in der Schule zu verbinden, zieht sich durch das gesamte Werk. In der Analyse konnten drei Ebenen herausgearbeitet werden, auf denen die von Klein angekündigte „weitere Untersuchung“ stattfindet. Es gibt eine *fachmathematische Ebene*, die aus mathematischer Perspektive den dem Schulstoff zu Grunde liegenden Hintergrund beschreibt und mögliche Erweiterungen diskutiert. Eine *historisch-genetische Ebene* bettet den Inhalt in seine Entstehungsgeschichte ein. Schließlich werden auf einer *Reflexionsebene* erkenntnistheoretische Fragen über das Wesen der Mathematik gestellt, mathematische Definitionen und Begründungen hinterfragt sowie Methoden und Inhalte des Schulcurriculums kritisch reflektiert.

Auf allen drei Ebenen wird der anvisierte höhere Standpunkt von folgenden vier Prinzipien entscheidend geprägt: das *Primat der Anschauung*, *innermathematische Vernetzung*, eine hohe *Anwendungsorientierung* und das Beschreiben von *mathematischen Denk- und Arbeitsweisen*.



Tiefenanalyse am Beispiel der fachmathematischen Ebene

In vorliegendem Beitrag liegt der Fokus auf der fachmathematischen Ebene. Sie soll anhand signifikanter Textstellen aus der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* vorgestellt werden.

Diese Ebene dient zum einen dazu, den fachmathematischen *Hintergrund* zu schulrelevanten Themen bereitzustellen. Darunter versteht Klein fachmathematisches Wissen, das nicht direkt in den Schulunterricht einfließt, aber eine präzise hochschulmathematische Begründung der schulmathematischen Inhalte bereitstellt und somit einen fachlich flexiblen Umgang mit diesen ermöglicht. Erkennbar wird dies bereits zu Beginn seiner Vorlesung bei der Einführung der Grundrechengesetze der Arithmetik.

„Für diesen Unterricht erscheint es nun unbedingt nötig, daß der Lehrer die logischen Gesetze und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der ganzen Zahlen selbst genau kennt, wenn er sie auch dem Schüler keineswegs unmittelbar darbieten kann. Beschäftigen wir uns also etwas näher mit ihnen.“ (Klein 1908, S. 8)

Hier ist entscheidend, dass die Diskussion zwar aus hochschulmathematischer Perspektive geführt wird, die behandelten Themen aber direkt dem Schulcurriculum entnommen sind.

An folgendem Beispiel wird aber deutlich, dass Klein sich auf der fachmathematischen Ebene nicht ausschließlich auf Hintergrundbetrachtungen beschränkt.

„Kann man nun – diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch andere, höhere komplexe

Zahlen mit mehreren neuen Einheiten als dem einen i bilden und mit ihnen vernünftig rechnen?" (Klein 1908, S. 64)

Im Anschluss an die zitierte Stelle behandelt Klein die Quaternionen, die nicht zum Schulstoff gehören, sondern vielmehr diesen *erweitern*. Er bettet den Schulstoff, in diesem Fall die komplexen Zahlen, somit in höhere mathematische Überlegungen ein.

An diesem Beispiel lassen sich zudem noch weitere Aspekte des Kleinschen höheren Standpunkts verdeutlichen. So liefert er mit „diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe" einerseits einen Beitrag zur Charakterisierung mathematischer Denkweisen, andererseits betritt er an dieser Stelle die Reflexionsebene: Was heißt eigentlich „vernünftig rechnen"? Welche Einschränkungen ergeben sich, wenn wir eine solche Erweiterung der komplexen Zahlen beschreiben?

Wie weit Klein in die hochschulmathematische Diskussion eintaucht und sich damit auch inhaltlich von der Schulmathematik löst, wird in Passagen deutlich, in denen er auf die zu seiner Zeit *aktuelle mathematische Forschung* eingeht. Dort verweist er auf aktuelle Vorträge und unveröffentlichte Werkstattberichte. Diskutiert werden beispielsweise das große Fermatsche Problem sowie die Rechtfertigung der Grundgesetze der Arithmetik:

„Während der Schulunterricht zu den schwierigsten Fragen natürlich noch viel weniger wird aufsteigen können, setzt die Fragestellung der heutigen mathematischen Forschung hier erst eigentlich ein: Wie rechtfertigt man denn die angegebenen Grundgesetze, wie erklärt man den Zahlbegriff überhaupt? Hierüber will ich Ihnen eine Orientierung zu geben suchen, getreu der Absicht dieser Vorlesung, die Dinge des Schulunterrichts durch Betrachtung von einem höheren Standpunkte aus in neue Beleuchtung zu setzen." (Klein 1908, S. 11)

Die fachmathematische Ebene zeichnet sich aber nicht alleine durch die hier beschriebene Tiefe (bzw. Höhe) aus, sondern ebenso durch ein gewisses Maß an Breite. Zum Beispiel wird der damals üblichen Einführung gebrochenrationaler Zahlen, „mit durchaus konkreter Bedeutung" (bspw. Gewichte, Längen,...), eine „in der modernen Mathematik ausgebildete Darstellung" entgegengesetzt, die einen Bruch $\frac{a}{b}$ als abstraktes Zahlenpaar auffasst, mit dem nach bestimmten Regeln gerechnet wird. (Vgl. Klein 1908, S. 31ff)

Auch hier verwischen die Grenzen der einzelnen Ebenen. Die Beschreibung der Darstellungen und die Begründung der paarweisen Äquivalenz sind der fachmathematischen Ebene zuzuordnen, der bewertende Vergleich liegt auf der Reflexionsebene.

Die vorangegangenen Ausführungen zusammenfassend, lassen sich als wesentliche Elemente der fachmathematischen Ebene das Bereitstellen von Hintergrundwissen, das Vorstellen von Erweiterungen, der Einblick in aktuelle mathematische Forschung sowie das Beschreiben mathematischer Darstellungs- und Lösungsvielfalt feststellen. Bemerkenswert ist, dass Klein zwar die Schulmathematik als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen wählt, jedoch sehr rasch die eigentlichen Inhalte der Schulmathematik verlässt, so dass seine mathematischen Untersuchungen sich vornehmlich auf hochschulmathematische Fragestellungen beziehen. Die fachmathematische Ebene des Kleinschen höheren Standpunktes ist somit hauptsächlich in der Hochschulmathematik verankert.

Eine Alternative

Alternativ ist es denkbar, den höheren Standpunkt stärker an den eigentlichen schulmathematischen Inhalten orientiert zu entwickeln. Eine solche Vorgehensweise bezieht erst allmählich rein hochschulmathematische Inhalte ein und hat somit das Potenzial, den Respekt für die Elementarmathematik zu stärken. Diesen Ansatz hat Franz Meyer mit seinem *Repetitorium zur Elementarmathematik* gewählt (vgl. Allmendinger 2011). Er sagt dazu:

„[Grundgedanke der Vorlesung ist,] daß man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt.“ (Meyer 1899, S. 147)

In meiner Arbeit soll nach einer detaillierten Analyse der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* gezeigt werden, dass Klein das Potenzial der schulmathematischen Inhalte nicht vollständig ausschöpft. Eine moderne Interpretation des *höheren Standpunktes* sollte einen solchen Perspektivwechsel nutzen.

Literatur

Allmendinger, H. (2011): Elementarmathematik vom höheren Standpunkt. Eine Begriffsanalyse in Abgrenzung zu Felix Klein. In: Haug, R. & Hölzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 51-54.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Arithmetik, Algebra, Analysis, Berlin: Julius Springer.

Meyer, F. (1899): Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, S. 147-154.