

Lucas AMIRAS, Weingarten

Mathematisches Experimentieren in der Lehrerbildung – Hintergründe und Erfahrungen

Seit einiger Zeit steht das Experimentieren beim Lernen von Mathematik in der Lehrerbildung im Vordergrund. Dabei geht es sowohl um eine Verankerung im Curriculum der Lehrerbildung im Fach Mathematik an Hochschulen als auch um eine Untersuchung der Teilprozesse bzw. Kompetenzen, die Experimentierhandlungen konstituieren (Phillipp/Leuders 2010).

1. Experimentelle Mathematik in der fachlichen und didaktischen Tradition

Bereits in der antiken Mathematik ist die Rolle der Empirie für die Schöpfung mathematischen Wissens offenkundig. Sowohl in der ägyptischen (z.B. Berechnung von Flächen, insb. Bestimmung von π , Volumenformeln) als auch in der griechischen Mathematik (figurierte Zahlen bei den Pythagoreern) sind - in einem vorwissenschaftlichen Sinn - „empirische“ Zugänge zum mathematischen Wissen wirksam. Zur Gewinnung von Vermutungen setzt Archimedes (Methodenlehre) mehrfach Gedankenexperimente gezielt ein, ohne die exakte Begründung aus dem Blick zu verlieren. Der methodische Unterschied zwischen der Kunst der Entdeckung, der „Heuristik“ (ars inveniendi), und der Kunst der Begründung (ars judicandi), der in neuerer Zeit (etwa bei Leibniz) klassisch geworden ist, findet sich bereits hier deutlich ausgesprochen. Im 20. Jahrhundert sind die Bemühungen um die Heuristik in der Mathematik besonders mit dem Namen von Georg Polya (1887-1985) verbunden, der in mehreren Schriften richtungsweisende Beiträge geliefert hat. Der Mathematikphilosoph Imre Lakatos (1922-1974) befasst sich in der Folge eingehend mit der Logik mathematischer Entdeckungen anhand von Fallstudien zu Erkenntnissen der klassischen Mathematik (z.B. Eulers Polyedersatz). Aber auch in der Mathematikdidaktik sind seit langem Bestrebungen virulent, die der Empirie einen wichtigen Platz beim Lernen von Mathematik zuweisen (Lietzmann, Sprengel, Kempinsky bis zu neueren Beiträgen zum Experimentieren in einem Geometrie-Tagungsband der GDM (2006) oder im Heft 141 von „mathematik lehren“).

2. Experimentieren als Teilprozess des Problemlösens – Rolle der Empirie

Das Problemlösen ist eine herausragende menschliche Kompetenz, die in der Mathematik ihre besondere Ausprägung erfährt. In der langen Tradition

des experimentellen Arbeitens in der Mathematik, wird dies manchmal zu vordergründig auf Apparate und Hantieren bezogen, obwohl es auch beim Finden von Beweisen unverzichtbar ist. Eine wissenschaftstheoretisch angesetzte Perspektive macht dies deutlich: Mathematik, wie Wissenschaft überhaupt, entsteht auf der Basis von Erfahrung. Diese Erfahrung ist zunächst **alltägliche Erfahrung**, die sich in technischen und symbolischen Handlungskompetenzen ausdrückt. **Wissenschaftliche Erfahrung** konstituiert sich darauf aufbauend durch Hochstilisierung, d.h. durch Idealisierung, Normierung und viele andere Prozesse der Wissens- und Theoriebildung. Das Experimentieren ist damit ebenfalls auf zwei Stufen angesiedelt: Auf der elementaren, lebensweltlichen Ebene (so wird in der Küche mit Gewürzen und Verfahren experimentiert, sogar menschliche Beziehungen werden so angegangen, überhaupt wird probiert und experimentiert, ob etwas in gewünschter Weise funktioniert oder nicht) und erst recht auf der wissenschaftlichen Ebene. Bei dieser pragmatischen Sicht der Konstitution von Erfahrung spielen Argumentationen eine entscheidende Rolle zur Stabilisierung von Handlungsweisen und des darauf aufbauenden Wissens in unterschiedlichen Praxiszusammenhängen.

Am besten lässt sich dieser Unterschied zwischen den beiden Erfahrungsebenen im Fall der Physik verstehen: Das Experimentieren, alltäglich verstanden, unterscheidet sich vom planvollen physikalischen Experiment weniger hinsichtlich seiner Funktion als im Hinblick auf die hohen Anforderungen an Normierung und Reproduzierbarkeit, die für physikalische Experimente charakteristisch sind, also nicht in prinzipieller Hinsicht. In beiden Erfahrungsebenen geht es um Hypothesenbildung und das Testen deren Konsequenzen durch „trial and error“ (or success).

Im Fall der Mathematik kann man mit unterschiedlichen Absichten experimentieren: Erkunden von Situationen (Explorationen), Begründungen finden, Konstruktionen und Berechnungen ausprobieren, Lösungen finden durch Probieren usw. Eine Hauptfunktion ist auch hier die Hypothesenbildung, also das phantasievolle Vermuten von Zusammenhängen und deren Verifikation oder Falsifikation durch das Aufsuchen von geeigneten Instanzen bzw. Beispielen.

So findet auch in vielen Bereichen des zeitgenössischen Mathematikunterrichts Experimentieren statt. Einige Beispiele von relevanten Themen bzw. Lernumgebungen: Produktive Rechenübungen, schriftliche Normalverfahren, Bruchrechnen-Lernumgebungen (z.B. Besuden), Punktemuster, Figurationen von Zahlen, Methoden zur Lösung von Gleichungen (weites Feld), Satz des Pythagoras, Vergrößern – Verkleinern und vieles mehr. Ex-

perimentieren ist Teilprozess der Lösung von Aufgaben: Probieren, Experimentieren, Korrigieren (Standardstrategie, auch in der Mathematik)

3. Beispiele und Erfahrungen

Grundlage der kritischen Betrachtungen im Vortrag waren Arbeitsunterlagen von Studierenden aus einer Veranstaltung „Experimentelle Mathematik“, die vom Autor mehrfach als fächerverbindendes Angebot im Fach Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Weingarten angeboten und vorwiegend von fortgeschrittenen Studierenden besucht wurde. Zu den Inhalten gehörten der Umgang mit Folgen und Reihen figurierter Zahlen, Entdeckungen am Pascal'schen Dreieck, Zahlentricks, geometrische Probleme, wie das Finden des Kreismittelpunktes von konkreten, verschieden dimensionierten Kreisen auf möglichst viele Arten, Parkettierungen, empirische Kreismessung, Volumen von Kegel und Kugel, Finden kürzester Wege (durch Messen, Konstruieren, Berechnen oder mittels Seifenhautexperimenten).

Folgende Probleme wurden in den Veranstaltungen deutlich:

- **Transferprobleme** bei der Übertragung von Methoden auf neue Situationen (z.B. von der Gauß-Summe auf die Summe der Quadratzahlen oder Kubikzahlen)
- Die **Bereitschaft** zum Einsatz geeigneter Tools (z.B. DGS) war kaum vorhanden.
- Studierende hatten nach eigenem Bekunden elementare experimentelle **Strategien** zur Lösung von Problemen nicht im MU der Schule erlebt, waren (in der Mehrzahl) zu eingeschränkt in den Lösungsansätzen, stark fokussiert auf Berechnungen, wenig flexibel und kreativ, oft etwas ratlos.
- Sie hatten immer wieder **Hilfen** und **Anstöße** nötig (Anregungen, Ermutigung zum freieren, robusten Umgang mit der jeweiligen Fragestellung, Begleitung)

Man gewann besonders bei höheren Semestern (die Mehrzahl der Teilnehmenden) den Eindruck, dass nicht nur die Arbeit im Schulfach Mathematik, sondern auch die Ausbildung von Mathe-Lehrern noch nicht richtig angelegt ist.

4. Folgerungen – Konsequenzen für die Lehrerbildung

Die Studierenden des Lehramts (aber auch die Mathematikstudierenden überhaupt) brauchen geeignete **Angebote** (kleinere Pflichtveranstaltungen,

Tutorien, Mathe-Labor), damit sich ihre Einstellung insgesamt tiefer greifend ändert.

Die Veranstaltung zur Experimentellen Mathematik des Autors wurde bisher im Fächerverbund naturwissenschaftlicher Fächer angeboten. Der Schwund von Teilnehmern während des Semesters war relativ groß.

Eine Konsequenz aus den Erfahrungen bildet die Einsicht, dass die Verankerung des Experimentierens im regulären Studium so früh wie möglich erfolgen sollte. Zusätzlich erscheint eine Ausbaumöglichkeit in weiterführenden Veranstaltungen dringend erforderlich, um Nachhaltigkeit zu sichern. Speziell für das Fach Mathematik an der PH Weingarten bedeutet dies konkret, dass in der neuen Studienordnung der Sekundarstufe (ab WS 2011/12) Mathematisches Experimentieren als Pflichtveranstaltung im Modul 1 für alle Mathe-Studierenden angeboten wird. Eine Ausbaumöglichkeit in einem didaktischen Hauptseminar ist anvisiert.

Die Vorteile liegen auf der Hand: Es wird damit eine längerfristige Perspektive des Aufbaus von Kompetenzen geschaffen, durch die Ausbaumöglichkeit erfolgt eine didaktische Durchdringung und eine Reflexion experimenteller Verfahrensweisen. Die Rolle des Dozenten wird in der ersten Veranstaltung sein, die Lernumgebungen zum Experimentieren zu entwerfen und einen Rahmen für die Teilnehmer (aus Vorbereitung, Durchführung und Reflexion mit Feedback) zu gestalten. Im Hauptseminar übernehmen dann die Teilnehmer selbst die Gestaltung, der Dozent beschränkt sich auf die Beratung und die Planung der Sitzungstermine in Absprache mit den Studierenden. Längerfristig lässt sich auch über eine „AG Experimentelle Mathematik“ ein darüber hinaus gehender Rahmen denken, in welchem Schulversuche und deren Evaluation in einem institutionalisierten Forschungsseminar stattfinden können.

Literatur

- Lakatos, I. (1976): Proofs and refutations. Cambridge. Cambridge University Press.
Deutsche Übersetzung: Beweise und Widerlegungen. Braunschweig, Vieweg-Verlag.
- Leuders, T., Ludwig, M., Oldenburg, R. (Hrsg.) (2008): Experimentieren im Geometrieunterricht. Herbsttagung 2006 des GDM-Arbeitskreises Geometrie. Hildesheim, Franzbecker.
- Philipp, K., Leuders, T. (2010): Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag.
- Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern, Sammlung Dalp.
- Polya, G. (1966): Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung. Lernen und Lehren. 2 Bde. Basel, Birkhäuser-Verlag.