Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I

Im Zusammenhang mit Bildungsstandards und Kompetenzerwerb gewinnt Beweisen neu an Bedeutung. Dies nachdem insbesondere die Kritik am formalen Beweis und seiner Strenge für den Unterricht in der Volksschule entschärft und durch weitere Konzepte wie beispielsweise präformales (oder operatives) Beweisen ergänzt werden konnte (z.B. Krauthausen, 2001). Mit verschiedenen Zugängen und Beweistypen kann das Verstehen von Schülerinnen und Schülern in diesem anspruchsvollen Inhaltsbereich entsprechend unterschiedlich stark unterstützt werden.

In diesem Beitrag wird ein Einblick in alltägliches Beweisen einer identischen Aufgabenstellung in 32 Klassen der Sekundarstufe I gegeben.

1. Theoretische Grundlagen

Im Zusammenhang mit Beweisen im Mathematikunterricht heben verschiedene Autoren die Bedeutung hinreichender Begründungen hervor (z.B. Hanna, 1997; Jahnke, 1978). Es sollen demnach nicht nur der Beweis im mathematisch strengen Sinne, sondern auch seine handlungs- und denkpsychologischen Vorläufer zugelassen werden.

Beweise können unterschiedlich klassifiziert werden. Für die vorliegende Studie wird die Klassifizierung von Wittmann und Müller (1988) verwendet, die drei unterschiedliche Typen beschreibt: 1) Formal-deduktiver Beweis, 2) experimenteller Beweis und 3) inhaltlich-anschaulicher Beweis.

Der formal-deduktive Beweis basiert auf dem logischen Ableiten einer Aussage, die Schritt für Schritt aus einer anderen Aussage folgt. Gekoppelt ist dieser Beweis an eine Knappheit in der Formulierung, die sich in der mathematischen Formel oder der formalen Sprache manifestiert. Dadurch setzen formal-deduktive Beweise nicht nur eine bestimmte Art des Denkens, sondern auch eine bestimmte Vorgehensweise unter Berücksichtigung einer spezifischen Fachsprache voraus.

Der experimentelle Beweis führt im Gegensatz zum formal-deduktiven nicht zu einer abschliessenden Sicherheit, sondern bleibt an die durchgeführten Beispiele gebunden. Die unmittelbare Arbeit an Beispielen ist insbesondere für jüngere und weniger kompetente Lernende fruchtbar. Darüber hinaus sind experimentelle Zugänge geeignet, um ein subjektives Beweisbedürfnis zu erzeugen.

Inhaltlich-anschauliche Beweise stützen sich auf „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze

Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ (Wittmann & Müller, 1988, S. 249). Inhaltlich-anschauliche Beweise müssen also vom gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein und die Verallgemeinerbarkeit soll möglichst intuitiv erkennbar sein. Das geschieht durch Offenlegen der mathematischen Struktur.

Diese drei Beweistypen stellen je andere Anforderungen an die Kompetenzen der Lernenden und bieten gleichzeitig unterschiedliche Zugänge und damit spezifische, inhaltliche Unterstützung.

Ziel der vorliegenden Studie ist es, das Unterstützungsverhalten von Lehrpersonen in mathematischen Beweisphasen im Unterricht der Sekundarstufe I zu beschreiben und vergleichend zu analysieren.

Im Rahmen dieses Beitrags wird auf folgende Fragestellung fokussiert: Welche Beweistypen können in den Bearbeitungsphasen der Beweis- bzw. Begründungsaufgabe beobachtet werden?

2. Methode

Der vorliegende Beitrag bezieht sich auf den Datensatz der binationalen Studie *„Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“* (Klieme, Pauli & Reusser, 2006), die gemeinsam vom Deutschen Institut für Pädagogische Forschung DIPF und dem Institut für Erziehungswissenschaft der Universität Zürich durchgeführt wurde. Die Stichprobe besteht aus 32 Lehrpersonen und ihren Klassen. Dabei handelt es sich um Klassen des 8. bzw. 9. Schuljahres aus Gymnasien sowie aus Sekundar-/Realklassen aus Deutschland und der Schweiz.

Die Aufgabenstellung, deren Bearbeitung in allen Klassen videografiert wurde, lautet: *Die Summe 13 + 15 + 17 + 19 ist durch 8 teilbar. Gilt dies für jede Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen?*

Dieser Sachverhalt kann sowohl am Zahlenbeispiel gezeigt (experimenteller und/oder inhaltlich-anschaulicher Beweis), als auch formal-deduktiv erarbeitet werden. Die formal-deduktive Bearbeitung ist zudem für die entsprechende Altersstufe nicht allzu anspruchsvoll, sodass die Lernenden an der Beweisführung aktiv beteiligt werden können.

Um Beweisphasen differenziert beschreiben zu können, wurde in einem ersten Schritt ein fachdidaktisches Analyseinstrument entwickelt, mit welchem die 32 Fälle codiert wurden. Dieses Instrument erfasst sowohl Merkmale auf der Oberflächen- als auch der Tiefenstruktur des Unterrichts (vgl. Reusser, 2005). Einer der Bereiche des Instrumentes bezieht sich auf die inhaltliche Dimension. Diese erfasst u.a. den gewählten Beweistyp (detaillierte Angaben siehe Brunner, in Vorb.). Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf die Darstellung von Ergebnissen dazu.

3. Ergebnisse

In den 32 Klassen kommen sämtliche drei Beweistypen vor, allerdings in unterschiedlicher Verteilung. Der formal-deduktive Beweis wird in 65.6 % aller Fälle (21 Klassen) umgesetzt, der experimentelle in 12.5 % der Fälle (4 Klassen) und der inhaltlich-anschauliche in 37.5 % der Fälle (12 Klassen). In 9 Klassen wurde die Aufgabenstellung mit zwei unterschiedlichen Beweistypen bearbeitet. In 4 Klassen wurde hingegen überhaupt kein Beweis (zu Ende) geführt.

Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Beweis- und Schultyp. In Gymnasien wird also beispielsweise nicht häufiger ein formal-deduktiver Beweis durchgeführt als in Sekundar-/Realklassen.

Betrachtet man die Leistungen der Schülerinnen und Schüler auf Klassenebene zeigen sich Zusammenhänge mit dem umgesetzten Beweistyp. So weisen Klassen, die formal-deduktiv arbeiten, auch tatsächlich höhere algebraische Voraussetzungen auf als dies in Klassen der Fall ist, in denen nicht formal-deduktiv gearbeitet wird ($t=2.30$; $df=29$; $p<.05$). Klassen, in denen experimentell bewiesen wird, sind hingegen deutlich weniger in der Lage, Beweise selbst aktiv zu führen ($t=2.55$; $df=30$; $p<.05$) und weisen auch eine deutlich tiefere allgemeine Leistungsfähigkeit auf ($t=2.47$; $df=29$; $p<.05$). Eine tiefere allgemeine Leistungsfähigkeit lässt sich auch in Klassen, in denen inhaltlich-anschaulich gearbeitet wird, feststellen ($t=2.07$; $df=28.37$; $p<.05$, inhomogene Varianzen korrigiert).

Auch bezüglich Überzeugungen der Lehrpersonen zeigen sich bemerkenswerte Unterschiede. So schätzen beispielsweise Lehrpersonen, in deren Klassen formal-deduktiv gearbeitet wird, in der Tendenz formale Präzision als wichtiger ein als dies Lehrpersonen von Klassen tun, die nicht formal-deduktiv arbeiten. Dieser Befund verfehlt aber knapp die erforderliche statistische Signifikanz. Lehrpersonen, die experimentell arbeiten, finden hingegen formale Eindeutigkeit weniger wichtig ($t=2.12$; $df=27$; $p<.05$).

4. Diskussion

Dass in der überwiegenden Mehrheit formal-deduktiv bewiesen wird, erstaunt wenig, weil die Strenge eines Beweises charakteristisch ist für Mathematik als Wissenschaft. Eher erstaunlich ist die Tatsache, dass der eingesetzte Beweistyps nicht vom Schultyp abhängt. Die Dominanz des formal-deduktiven Beweises in beiden Schultypen deutet auf eine Sichtweise der Lehrpersonen hin, wonach Beweisen zwingend mit einem streng formal-deduktiven Vorgehen verbunden ist. Damit bleibt das Potenzial der unterschiedlichen Beweistypen für eine spezifische, inhaltliche Unterstützung noch weitgehend ungenutzt.

Dennoch scheinen Lehrpersonen in gewisser Hinsicht durchaus eine adaptive Bearbeitung zu wählen, indem sie beispielsweise die algebraischen Voraussetzungen und/oder die allgemeine Leistungsfähigkeit der Klasse berücksichtigen und die Umsetzung eines entsprechenden Beweistyps in Abhängigkeit dazu vornehmen.

Der gewählte Beweistyp sagt per se aber noch nichts über die Qualität der Verstehensunterstützung aus, sondern beschreibt lediglich eine vorherrschende Praxis. Um die Qualität der Verstehensunterstützung und der Förderung von Argumentieren untersuchen zu können, bedarf es weiterer, tiefer gehender Analysen, die zurzeit im Gang sind. Weiter interessiert die Art und Weise der Partizipation der Lernenden beim Argumentieren und Beweisen. Auch diese Analysen werden zurzeit vorgenommen.

Literatur

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

EDK Generalsekretariat (2010). Basisstandards für die Mathematik. Unterlagen für den Anhörungsprozess. 25. Januar 2010. Bern: EDK.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematikdidaktik, 18* (2/3), 171-185.

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2006). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“* (3 Bände). Materialien zur Bildungsforschung. Band 13-15. Frankfurt a.M.: dipf.

Krauthausen, G. (2001). “Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.“ Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit. In W. Weiser & B. Wollring, *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt*, S. 99-113. Hamburg: Dr. Kovac.

NCTM (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM (National Council of Teachers in Mathematics).

Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen – Tiefenstruktur, Gestaltungsformen, Wirkung. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23* (2), 159-182.

Wittmann, E. C. & Müller, N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-258). Berlin: Cornelsen.