Peter COLLIGNON, Erfurt

Analysis und mathematisches Modellieren – Normung oder Kreation?

1. Kontext

Die folgenden Überlegungen betreffen die Schnittstelle zwischen Schul- und Hochschulmathematik. Lehrveranstaltungen der „Nebenstudienrichtung Mathematik“ an der Universität Erfurt richten sich zu einem großen Teil an Studierende der „Pädagogik der Kindheit“ mit Berufsziel Grund- oder Regelschullehramt. Die „Nebenstudienrichtung“ fungiert darüber hinaus als Nebenfachangebot für Studierende anderer Studiengänge wie zum Beispiel Erziehungswissenschaften, Psychologie, und Philosophie, vereinzelt auch Ökonomie und Technik (FH). In der Orientierungsphase (erstes Studienjahr) findet eine viersemestrige Einführung in die Differential- und Integralrechnung statt; während der Qualifizierungsphase (zweites und drittes Studienjahr) müssen die Studenten eine der beiden Vorlesungen zu Volumenintegralen oder zur elementaren Differentialgeometrie besuchen.

2. Anliegen

In diesem Beitrag wird nicht die Grundsatzfrage diskutiert, inwiefern eine universitäre Aus- bzw. Weiterbildung in Analysis für eine Klientel sinnvoll ist, die dieses Fach nicht selbst unterrichten wird. Jüngere Untersuchungen bestätigen, dass eine fundierte fachwissenschaftliche Bildung positiv mit den Kompetenzen eines Grundschullehrers korreliert. Es ließen sich Argumente anführen, die in diesem Zusammenhang der Analysis eine wichtige Rolle einräumen. Hier soll ein besonderes Potenzial der Analysis hervorgehoben werden, welches über ihre innermathematische Bedeutung hinausgeht und nicht das primäre Ziel verfolgt, den in der Sekundarstufe II erworbenen Kalkül „linear“ aufzustocken: Die Analysis wird als Ideenreservoir und „Werkzeugkasten“ beim mathematischen Modellieren betrachtet. Weiterhin soll ihre Eignung, wissenschaftliche Modellierungsprozesse zu exemplifizieren und damit einen Beitrag zu einem adäquateren Wissenschaftsverständnis künftiger Lehrender zu leisten, unterstrichen werden.

Ideenreservoir – ein Widerspruch in sich? Braucht man noch eigene Ideen, wenn ein Konzept wie die über Jahrhunderte gewachsene Differential- und Integralrechnung zur Verfügung steht? Freudenthal (1983, S. 32f.) betont in didaktischen Zusammenhängen die Bedeutung des „Wieder-(Er)findens“ bereits bekannter Ideen.

Viele Studienanfänger zeigen ein naives Verständnis von Wissenschaft bzw. Wissenschaftlichkeit. Oft fehlt die Einsicht in den Modellierungscharakter exakter (oder „exakt gemachter“) Wissenschaft völlig. Mathematische Bildung sollte einen Beitrag zur Überwindung einer solchen Rezeption leisten.

3. Mathematisches Modellieren in ökonomischen Kontexten

Sozialwissenschaftliche bzw. ökonomische Motive wirken emotional in stärkerem Maße auf die Lebensrealität junger Erwachsener als etwa physikalische Phänomene. Mathematisierungen können im Sinne der Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1996) thematisiert werden:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen;
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbole, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen;
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), erwerben.

Mit Blick auf die angesprochene Klientel bieten gerade die Sozialwissenschaften (im weiten Sinne von “social sciences“), also auch Teile der Ökonomie, in vielfacher Weise Gelegenheit, mit elementaren Mitteln mathematisches Modellieren verstehen zu lernen. Anders als in den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, haben die Studierenden in aller Regel kaum „Standardmodellierungen“ kennengelernt. Um ein Verständnis dafür zu wecken, dass eine Formalisierung durch Quantifizierung per se eine Modellierung ist (dies beginnt bereits beim „Zählen“!), kann „Neuland“ betreten werden, um studentische Kreativität zu fördern.

Charakteristisch für mathematisches Modellieren ökonomischer Kontexte ist die Berücksichtigung subjektiver Kategorien wie Bedürfnisse und Wünsche. Ökonomisches Handeln erfordert Entscheidungen unter Unsicherheit und ist daher oft konfliktbeladen; zudem ist es in vielen Fällen gewinn- bzw. profitorientiert. Hier deutet sich bereits eine Affinität zu Optimierungsproblemen an, die im Rahmen der Analysis in eine (so genannte) Kurvendiskussion einmünden kann. Ebenso können die genannten Aspekte Anlass für stochastische Modellierungsansätze sein.

Das Fehlen „kanonischer“ Modellierungskonzepte, wie in der (Schul-) Physik vermittelt, ist für die Lernenden sowohl Herausforderung als auch Chance: Da ökonomische Gegebenheiten keine „Naturgesetze“ darstellen, fehlen zunächst „harte“ Sachverhalte, die im Falle naturwissenschaftlicher Modellierungen eine Orientierung bieten würden. Exemplarisch soll an dieser Stelle auf die Möglichkeit einer kritischen Auseinandersetzung mit der Größe „Geld“ hingewiesen werden. Die Bewertung sämtlicher Waren und Dienstleistungen auf einer gemeinsamen diskreten, eindimensionalen Skala wirft Fragen nach denkbaren Alternativen auf. Weiterhin bietet sie Anlass, die Überführung ursprünglich diskreter Größen in stetige zu diskutieren. Derartige Überlegungen eröffnen die Chance, eigene Ansätze zu finden und deren Tauglichkeit für die Modellbildung zu untersuchen. Die Tatsache, dass Absolventen allgemeinbildender Schulen ökonomische Standardmodelle kaum vertraut sind, fördert ein unbefangenes – kreatives – Vorgehen. Wird der Modellierungsprozess erst einmal in dieser Weise erlebt, relativiert sich auch die Sicht auf bisher als verbindlich verstandene mathematische Darstellungen *naturwissenschaftlicher* Phänomene. Bei geeigneter Begleitung durch den Lehrenden kann dies zu einem vertieften Verständnis von Wissenschaftlichkeit führen.

4. Verwendung analytischer Methoden

In der heutigen Analysis spielt der Funktionsbegriff eine dominierende Rolle. Dass infinitesimaler Kalkül auch ohne diesen auskommt und dass die reellen Zahlen als Fundament erst im 19. Jahrhundert eine (weitgehend) akzeptierte Definition erfuhren, sollte Lehramtsstudierenden – unabhängig vom anvisierten Schultyp – geläufig sein. Infinitesimale Aspekte sollten im Sinne einer fundamentalen Idee verstanden und der heutige Kalkül als menschliche Kulturleistung gewürdigt werden, die ihre Genese bestimmten wissenschaftshistorischen Voraussetzungen verdankt.

Die Bereitstellung eines „Werkzeugkastens“ (der Analysis), der in vielfältiger Form „genormte“ Instrumente enthält, führt – bei entsprechender Gestaltung der Lehreinheit – oft zu erstmaligen Einsichten über die speziellen wissenschaftshistorischen Entstehungsbedingungen einer wichtigen mathematischen Teildisziplin und schärft den Blick für den Modellierungscharakter analytischer Ansätze in „verfremdeten“ Kontexten wie der Ökonomie. Gewisse Grundvoraussetzungen einer analytischen Modellierung können hier bewusster als „Modellierung“ – oder eben „Kreation“ – identifiziert werden. Wie bereits oben erwähnt, hat man es häufiger mit Größen zu tun, die in der „Realität“ (tatsächlich oder normativ) diskret sind, im Modell aber als stetig angesehen werden. Dies ist häufig legitim. Die Frage ist jedoch: Welche Verfälschungen der Realität – oder besser: der ursprünglichen *Modellierungsidee* – sollten in Kauf genommen werden, um in bestimmten Phasen des Modellierungsprozesses über „genormte“ Instrumente, z.B. analytische Methoden der Extremwertbestimmung, verfügen zu können? Diskussionen mit Studierenden zu diesen und ähnlichen Fragen fließen gegenwärtig und in naher Zukunft in eine qualitative Studie zum Thema ein.

In vielen Situationen führt eine zunächst diskrete Sichtweise relevanter Größen zu der Einsicht, dass der Sachzusammenhang eine infinitesimale Behandlung nicht erzwingt, sondern anderen Motiven geschuldet sein kann. Beispiele sind die (mittlere Elastizität) als Quotient der relativen Änderung der abhängigen und der unabhängigen Variablen $(\Delta y/y)$ / $(\Delta x/x)$ und der Term der Durchschnitts(-kosten)-funktion $f(x)/x$. Im ersten Fall eröffnet die infinitesimale Variante den Zugang zum analytischen Kalkül; im zweiten erhält man durch Differentiation eine ökonomisch interpretierbare Aussage, nämlich dass bei Vorliegen eines Kostenmaximums die Ableitung der Kostenfunktion mit den Durchschnittskosten übereinstimmt.

Innermathematische Aspekte ergeben sich aus der Behandlung „neuer“ Ableitungsregeln, wie etwa der Summen- bzw. Produktregel für Elastizitäten. Studierende, die unter Anleitung derartige Regeln „entdecken“, gewinnen eine vertiefte Einsicht in den im Schulunterricht eingeübten Kalkül.

5. Resümee

Mathematisches Modellieren in ökonomischen Kontexten fördert einen selbstbestimmten Gebrauch der Mathematik sowie eine Erweiterung des Wissenschaftsverständnisses. Die Verwendung analytischer Methoden berücksichtigt alle von Danckwerts und Vogel (2006, S. 12f.) genannten fundamentalen Ideen der Analysis. Studienanfängern wird die Gelegenheit geboten, Idee und Bedeutung analytischer Ansätze einem kalkülhaften Arbeiten gegenüberzustellen (ebd. S .13). Die elementare Analysis stellt einen umfangreichen „Werkzeugkasten“ zur Verfügung, dessen Gebrauch je nach Sachzusammenhang kritisch reflektiert werden muss.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München, Elsevier / Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht [et al.], D. Reidel Publishing Company.

Jahnke, H.N. [Hrsg.] (1999): Geschichte der Analysis. Heidelberg [et al.], Spektrum Akademischer Verlag.

Stachowiak, H. [Hrsg.] (1980): Modelle und Modelldenken im Unterricht. Bad Heilbrunn, Verlag Julius Klinkhardt.

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 37-46.