Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf

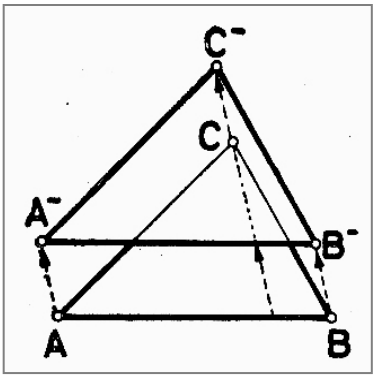
Wie Pappos seinen Satz gefunden haben könnte – und Schüler ihn heute finden können

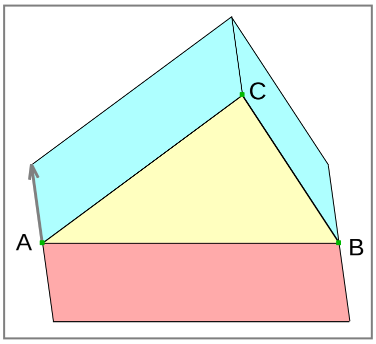
Der Flächensatz des Pappos ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Die Verallgemeinerung erfolgt zweifach: für beliebige statt rechtwinklige Dreiecke und für Parallelogramme statt Quadrate. Schaut man sich den Satz in der heutigen Formulierung[1] an, so sieht man, dass er ohne eine Figur kaum zu formulieren ist und man kommt zu dem Schluss, dass er in dieser Form heute nicht (mehr) unterrichtet werden kann.

Mir stellten sich die Fragen: Wie konnte Pappos damals diesen Satz *gefunden* haben? Und wie könnte man ihn heute schülerorientiert *unterrichten*?
Den Satz zu *beweisen, wenn man ihn kennt*, ist analog zum euklidischen Pythagoras-Scherungsbeweis kein Problem. Es ist aber zu vermuten[2], dass Pappos so nicht zum Satz gefunden hat. Der hier vorgestellte Weg ist keine historische Rekonstruktion, sondern eine genetische Rekonstruktion (Führer), die heuristische Anstöße geben soll, wie dieser Satz heute mit modernen Werkzeugen gelehrt und gelernt werden könnte.

1. Die zündende Idee

Nach einigen Frustrationserlebnissen in der Literaturrecherche bin ich auf ein Schulbuch der 50-er Jahre[3] gestoßen, in dem ich eine geeignete Figur[4] und eine überzeugende einfache Bewegungsidee fand: Wird ein Dreieck ABC verschoben, so überstreicht die Strecke AB dabei ein Parallelogramm und der Streckenzug ACB zwei zusammenhängende Parallelogramme, ein Doppelparallelogramm. Verschiebt man diese Parallelogramme geeignet, ergibt sich nebenstehendes Bild. Der Flächensatz besagt hier anschaulich, dass die durch die Verschiebung überstrichenen Parallelogramme über den kürzeren Seiten zusammen so groß sind wie das Parallelogramm über der längeren Seite.





---

[1] Siehe Anhang

[2] Clairaut in der Übersetzung von Bierling: „Ich habe bey mir gedacht, es müsse doch diese Wissenschaft, wie alle andere, nach und nach entstanden seyn … und es könne dieser erste Fortgang unmöglich über den Verstand der Anfänger seyn, weil es ja Anfänger waren, welche ihn machten."

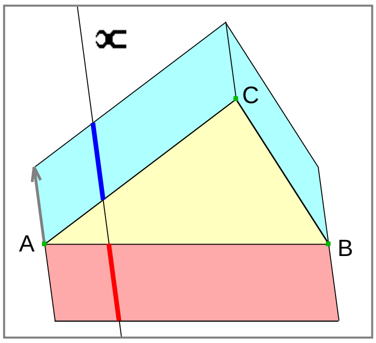
[3] Botsch, S. 108

[4] Die gleiche Figur mit etwas anderer Bewegungsidee fand ich dann auch bei Henrici/ Treutlein, S. 278

2. Ein visuell-dynamischer Beweis

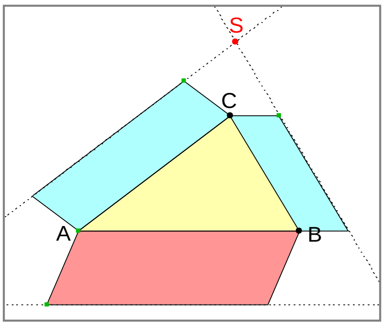
Ein eher statischer Beweis ist mit der bekannten Flächenformel für Parallelogramme möglich, wobei als ‚Grundseite' der Verschiebungsvektor genommen wird und als ‚Höhe' die Strecke AB.

Viel überzeugender und intuitiver finde ich eine Cavalieri-Bewegungsargumentation, die auf Botsch zurückgeht. Während Botsch mit einer Parallelen*schar* argumentierte, so kann man heute mit DGS *eine* zum Verschiebungsvektor parallele Gerade über die Figur wandern lassen. Sie schneidet dabei aus den Parallelogrammen gleichlange Strecken aus. Damit ist der Flächensatz des Pappus in einem Spezialfall visuell-dynamisch hergeleitet.



3. Der allgemeine Satz

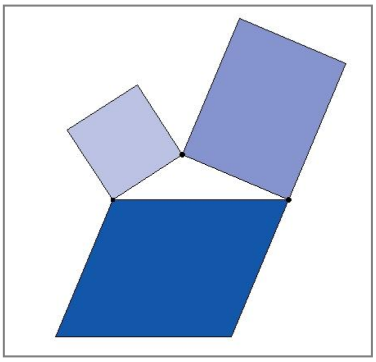
Die drei Parallelogramme können entlang von Geraden durch die ‚äußeren' Seiten durch Scherung in flächengleiche Parallelogramme verwandelt werden. Das Doppelparallelogramm wird dabei in zwei einzelne Parallelogramme aufgeteilt. Der Schnittpunkt S dieser Geraden entspricht dem verschobenen Punkt C' und spielt eine wichtige Rolle. Man erhält so die allgemeine Pappos-Figur und gleichzeitig die Schopenhauer erfreuende „Einsicht in den Grund des Seyns". Dass die Gerade SC aus dem Parallelogramm über c eine Strecke ausschneidet, die zur Strecke SC gleichlang und parallel ist, fällt jetzt nicht vom Himmel, sondern ergibt sich genetisch.



Aus diesem Ansatz lassen sich dann leicht zahlreiche weitere Pappos-Figuren (‚Pappographien') erzeugen.

In einem Sonderfall, der an den Pythagoras-Satz anklingt, sind die Parallelogramme alle rechteckig. Dies findet man noch gelegentlich als Aufgabe in Schulbüchern der 70-er Jahre.

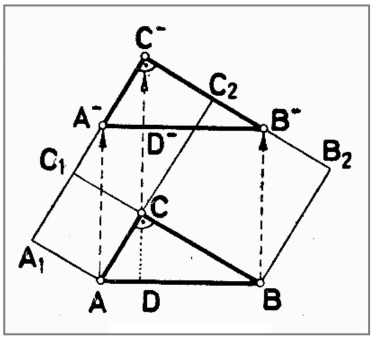
Ein weiterer reizvoller Sonderfall liegt vor, wenn über den Seiten ein Quadrat, ein Rechteck und ein Parallelogramm gebildet werden und wenn die Figur bei B ‚keinen Knick' hat, also y-förmig ist.



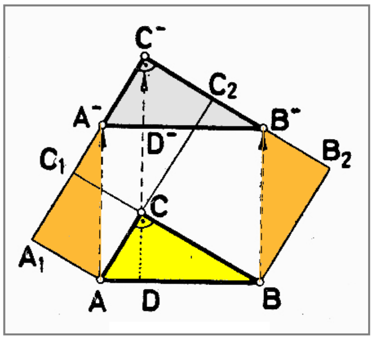
Daraus entstand das Markenzeichen des hannoveraner HeuRekAP-Projekts.

4. Und am Ende: Pythagoras

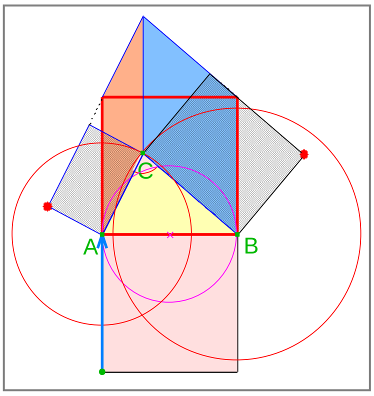
Der Satz des Pythagoras wird üblicherweise so formuliert und bewiesen, dass aus den beiden Kathetenquadraten ein Hypotenusenquadrat entsteht (‚aus zwei mach eins'). Der Pappos-Ansatz von Botsch war genau umgekehrt (‚aus eins mach zwei').



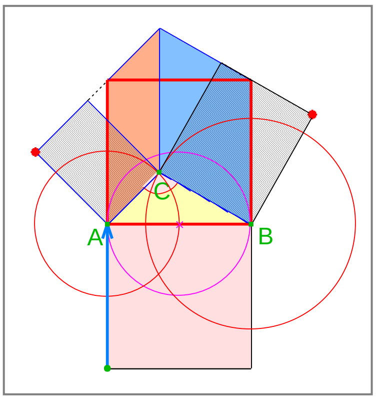
In diesem Fall muss der Verschiebungsvektor auf AB senkrecht stehen und die gleiche Länge haben. Dann wird das Parallelogramm über c zum Hypotenusenquadrat. Die Parallelogramme über a und b können zu Rechtecken geschert werden. Es bleibt zu klären: Sind diese Rechtecke auch quadratisch?



Botsch drehte dazu das Dreieck ABC um A um 90°nach links und um B um 90° nach rechts. Damit erhält man insgesamt vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, die sich um das Quadrat über AB gruppieren. Dies ist ein vergleichsweise statischer Kongruenzbeweis.



DGS bietet heute neue Möglichkeiten für einen visuell-dynamischen Beweis: Dynamisiert man die gesamte Figur, indem man C vom Thaleskreis über AB löst sowie Kreise um A durch C bzw. um B durch C zeichnet, so ist zu erkennen, dass die Rechtecke über a und b ersichtlich ‚zu lang' sind, wenn man C in den Thaleskreis hinein zieht und der Winkel bei C größer als 90° wird. Zieht man C aus dem Thaleskreis hinaus, wird der Winkel bei C kleiner als 90° und die Rechtecke über a und b werden ersichtlich ‚zu kurz'. Im Grenzfall liegt C auf dem Thaleskreis, der Winkel bei C ist 90°, und die rot markierten Eckpunkte der Rechtecke über a und b liegen genau auf den Kreisen. Das bedeutet, dass die Rechtecke dann jeweils gleichlange Seiten haben, also Quadrate sind.



Natürlich stellt sich hier die Frage, ob diese dynamische Argumentation zulässig ist. Der Geometer an der Hochschule wird das möglicherweise anders beantworten als der Lehrer an der Schule.

5. Fazit

Es wurde eine genetische Rekonstruktion entwickelt (die keinen historischen Anspruch erhebt), die ein historisches Problem ausgehend von einem einfachen Verschieben eines Dreiecks so aufbereitet, dass Schüler diesen Satz (und den Satz des Pythagoras) mit einfachen Flächenverwandlungen Schritt für Schritt entdecken und begründen können. Dynamische Geometrie-Software als Werkzeug und dynamische Arbeitsblätter[5] als Lernumgebung sind für eine schülerorientierte Umsetzung unverzichtbar geworden. Auch wenn der Flächensatz des Pappos dadurch nicht zum Standardstoff der Klassen 9 werden dürfte, bietet dieser Ansatz doch eine schöne Möglichkeit für innere Differenzierung und für eine heuristisch ausgerichtete Behandlung des Beweisens.

Literatur

Baptist, P. (1997): PYTHAGORAS und kein Ende? Ernst Klett

Botsch, O. (1956): Bewegungsgeometrie. Reinhardt-Zeisberg, Band 4b. Moritz Diesterweg

Clairaut, A. C. (1741): Élémens de Géomètrie. In der Übersetzung von Bierling (1773): Des Herrn Clairaut Anfangsgründe der Geometrie. http://books.google.de/books

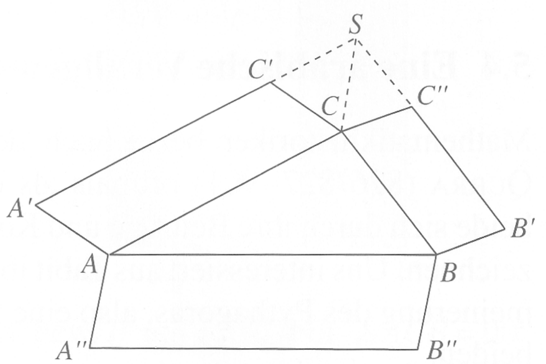
Elschenbroich, H.-J. (2003): Visuell-dynamisches Beweisen. In: mathematik lehren Heft 110.

Führer, L. (2011): Wege zum Pythagoras-Satz. http://www.math.uni-sb.de/ag-lambert/AKMUI11/Pyth_Vortrag_Soest

Henrici, J; Treutlein, P. (1881): Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil. B.G. Teubner

Anhang

ABC ist ein beliebiges Dreieck und ACC'A' bzw. BB'C''C sind beliebige Parallelogramme über den Seiten [AC] bzw. [BC]. Die Geraden A'C' und B'C'' schneiden sich in S. Wir zeichnen [AA''] und [BB''] parallel zu [SC] und gleich lang wie [SC]. Dann ist die Fläche des Parallelogramms AA''B''B gleich der Summe der Flächen der Parallelogramme ACC'A' und BB'C''C.



Baptist, S. 137

[5] Die DynaGeo-Dateien finden Sie zum Download auf http://www.dynamische-geometrie.de/vortraege.htm .