

Maria FAST, Wien

Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen von Klasse 2 bis Klasse 4

Die vorgestellte Studie zielt darauf ab, Entwicklungen im additiven Rechnen von der zweiten bis zur vierten Schulstufe nachzuzeichnen. Insbesondere wird der Frage nachgegangen, welche Lösungsmethoden die Kinder jeweils praktizieren.

Theoretischer Hintergrund und empirische Evidenz

Um zwei- bzw. dreistellige Zahlen addieren und subtrahieren zu können, bedarf es zweier grundlegender tragfähiger Konzepte, nämlich ein Wissen über das Addieren und Subtrahieren von (einstelligen) Zahlen und der dabei geltenden (Rechen-)Gesetze sowie ein Verständnis von Stellenwert (Verschaffel, Greer & De Corte 2007, S. 566).

Kinder ermitteln die Ergebnisse beim Rechnen sowohl zählend als auch rechnerisch (über den Einsatz von Ableitungsstrategien) oder sie rufen automatisiertes Wissen ab, indem sie auf Basisfakten zurückgreifen. Bei der Entwicklung des Rechnens im Zahlenraum bis 20 kann eine gewisse Reihenfolge vom Zählen über den Einsatz von Ableitungsstrategien zum automatisierten Wissen angenommen werden (Gaidoschik 2011).

Bei Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 ist es nicht mehr möglich, direkt über automatisiertes Wissen die Lösung abzurufen. Hier steht das Wissen geeigneter Methoden/Strategien im Mittelpunkt, um die Zahlen, meist zerlegt in ihre Stellenwerte, zu verknüpfen.

Universelle Lösungsmethoden, die bei jeder Addition und Subtraktion grundsätzlich möglich sind, sind *Rechnen in den Stellenwerten* und *schrittweises Rechnen*:

- Beim *schrittweisen Rechnen* wird nur eine Zahl zerlegt. Schrittweises Rechnen hat den Vorteil, dass immer mit dem bei der Teiloperation erhaltenen Ergebnis weiter gerechnet wird und beim letzten Rechenschritt direkt das Endergebnis präsent ist.
- Beim *Rechnen in den Stellenwerten* werden jeweils beide Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt. Dies kann erfolgen, indem in Zahlganzenheiten oder nur mit den Ziffern in den Stellenwerten gerechnet wird. Generell erfordert das Rechnen in den Stellenwerten größere Gedächtnisleistungen, weil die Zwischenergebnisse, die sich in den einzelnen Stellen ergeben, nachfolgend verknüpft werden müssen. Stellenweises

Rechnen steht in sehr engem Zusammenhang mit den schriftlichen Rechenverfahren.

Die beiden *Lösungsmethoden* treten auch *kombiniert* auf, in dem z. B. mit stellenweisem Rechnen begonnen und dann mit schrittweisem Rechnen fortgesetzt wird.

Nicht universelle Methoden, wie z. B. *Ergänzen*, *Nutzen einer Hilfsaufgabe* und *Gegen- bzw. gleichsinniges Verändern* bieten sich nur dann an, wenn die verknüpfenden Zahlen besondere Eigenschaften aufweisen.

Der Einfluss des Stellenwertverständnisses auf das Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben zeigt sich unterschiedlich. Schülerinnen und Schüler mit guten Kenntnissen des Dezimalsystems machen weniger Fehler und verwenden vielfältigere Lösungsmethoden als Schülerinnen und Schüler mit schlechteren Kenntnissen des Dezimalsystems (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson 1997). Thompson und Bramald (2002) analysierten hingegen, dass Schülerinnen und Schüler mit hoher Lösungsquote nicht zwingend gute Kenntnisse des dekadischen Systems aufweisen. Nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren überwiegt das dadurch implizierte Verständnis des dekadischen Systems, indem das Rechnen in den Stellenwerten betont wird (Selter 2000).

Methodisches Vorgehen – Design der Studie

Die vorliegende Längsschnittstudie (Panelstudie) in zwei Klassen (N = 44) geht mit sechs Erhebungszeitpunkten von der zweiten bis zur vierten Schulstufe in einem qualitativen Forschungsdesign der Frage nach, welche typischen Entwicklungsverläufe sich auf der Basis üblichen Mathematikunterrichts in Österreich ergeben. Da immer wieder dieselben Aufgaben eingesetzt und gelöst werden, kann die Entwicklung in Bezug auf das Ausführen der Rechenoperationen und die Konzepte von Stellenwertverständnis verfolgt werden. Die ausgewählten Rechnungen können zum Großteil im Kopf gelöst werden, insbesondere erleichtern nicht universelle Lösungsmethoden den Lösungsvorgang.

Die Auswertung erfolgt über die eingesetzten Lösungsmethoden und über die Lösungsquote. Ziel ist, durch Fallvergleich und Fallkontrastierung einen Überblick über Ähnlichkeiten und Unterschiede im Datenmaterial zu erhalten und daraus Typen abzuleiten (Kelle & Kluge 2010).

Die Typenbildung ist derzeit noch nicht abgeschlossen. Bereits identifiziert werden konnten drei Typen, die sich als konsistent in Bezug auf die Lösungsmethoden sowohl innerhalb einer Erhebung zu einem bestimmten Messzeitpunkt als auch über die Messzeitpunkte hinweg erweisen. Weitere,

noch nicht ausgeführte Typisierungen ergeben sich vermutlich aus den Kindern, deren Lösungsmethoden von Erhebungszeitpunkt zu Erhebungszeitpunkt wechseln.

Erste Ergebnisse

Charakterisiert werden in Gestalt von drei Typen diejenigen Kinder, die in Bezug auf die Lösungsmethoden überwiegend konsistent vorgehen. Ihr Lösungsweg wird jeweils prototypisch am Beispiel der Aufgabe 784 – 199 beschrieben.

Typus 1: Stellenwertrechner/innen mit hoher Lösungsquote

784 – 199: „4 – 9 geht nicht, aber $14 - 9 = 5$. Hinten schreibe ich **5** hin. $8 - 9$ geht auch nicht, aber $18 - 9$ geht, das ist **9**. 1 muss von 9 abgezogen werden, weil der Zehner überschritten wurde, das ist **8**. $7 - 1 = 6$ und 1 muss von 6 wieder wegen der Überschreitung abgezogen werden, das ist dann **5**.“ (Ergebnis: 585)

Kinder dieses Typus rechnen von Beginn der zweiten Schulstufe weg fast nur in den einzelnen Stellenwerten, die sie entsprechend der gültigen Rechengesetze verknüpfen. Sie wissen um die Bedeutung von Zehnern und Einern, bündeln bzw. entbündeln und haben durchgehend ein Verständnis von Stellenwert. Sie rechnen weniger mit den Zahlganzeheiten, sondern nur mit den Ziffern in den Stellenwerten und setzen auch schriftliche Rechenverfahren ein. Ableitungsstrategien bzw. vorteilhaftes Rechnen werden nie eingesetzt. Wenngleich im Unterricht nicht thematisiert, weil in Österreich der Lehrplan *Ergänzen mit Erweitern* als Normalverfahren vorschreibt, wird bei der Subtraktion häufig *Entbündeln mit Abziehen* praktiziert. Die Kinder erreichen eine hohe Lösungsquote und sind auf ihre Art flexibel, allerdings nur innerhalb der einzelnen Stellenwerte, die sie entsprechend bündeln bzw. entbündeln.

Typus 2: Stellenwertrechner/innen mit niedriger Lösungsquote

784 – 199: „ $9 - 4 = 5$; $9 - 8 = 1$; $7 - 1 = 6$; daher 615“

Kinder dieses Typus unterscheiden zu Beginn der zweiten Schulstufe nicht zwischen Zehnern und Einern und können daher Rechnungen mit zweistelligen Zahlen nicht lösen. Sie rechnen durchgehend fast nur stellenweise. Zu Beginn der dritten Schulstufe zeigen sich vielversprechende Ansätze zum Rechnen mit Zahlganzeheiten, vorwiegend *kombinierte Lösungsmethoden*, die jedoch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren Mitte der dritten Schulstufe gänzlich verschwinden. Die Kinder verwenden bis zum Ende der vierten Schulstufe bei den angebotenen Aufgaben kaum die im Unterricht angebotenen algorithmischen Verfahren, sondern rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten, die sie speziell bei der Subtraktion streng separat verknüpfen. Im Unterschied zum Typus 1, den *Stellenwertrech-*

ner/innen mit hoher Lösungsquote, bündeln bzw. entbündeln sie nicht. Die Kinder tauschen bei der Subtraktion Minuend und Subtrahend, um innerhalb eines Zehners die Ziffern verknüpfen zu können. Bei der Addition wird der Übertrag im nächsthöheren Stellenwert oft nicht mitgenommen. Verlässliche hohe Lösungsquoten ergeben sich erst, wenn schriftliche Rechenverfahren vorschriftsmäßig verwendet werden. Diese Kinder setzen nie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein.

Typus 3: *Zahlenrechner/innen mit hoher Lösungsquote*

784 – 199: „199 + 1 = 200; 200 + 584 = 784; + 1 noch dazu, ergibt 585“

Kinder dieses Typus setzen ab Ende der zweiten Schulstufe vorwiegend *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden* ein. Die in der Untersuchung eingesetzten Rechnungen lösen sie, wie fachdidaktisch erwünscht, durch Kopfrechnen, ohne schriftliche Rechenverfahren. Wenn sie schriftliche Rechenverfahren benützen, dann werden sie normgerecht durchgeführt. Sie setzen auch nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein, dies besonders am Ende der vierten Schulstufe. Sie können als flexible, weniger als adaptive Rechner/innen charakterisiert werden.

In dieser Kategorisierung fehlen die *Zahlenrechner/innen mit niedriger Lösungsquote*. Diese kommen in dieser Untersuchung/Stichprobe nicht vor.

Literatur

- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997): A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education* 29 (1), 3–20
- Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt/Main et al.: Peter Lang
- Kelle, U. & Kluge, S. (2010): Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung (2. überarb. Auflage). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften
- Selter, C. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21 (3–4), 227–258
- Thompson, I. & Bramald, R. (2002): An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition (Report for the Nuffield Foundation). Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007): Whole Number Concepts and Operations. In Lester, F. K. Jr. (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (557–628). Charlotte, NC: Information Age Pub