Torsten FRITZLAR, Nadja KARPINSKI-SIEBOLD, Halle an der Saale

Algebraisches Denken und mathematische Begabungen im Grundschulalter

Mit diesem Beitrag soll ein knapper Einblick ermöglicht werden in ein aktuelles Forschungsprojekt, das zwei Themenbereiche verknüpft. Zum einen geht es uns um die Erkundung algebraischer Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter, die insbesondere dann bedeutsam werden, wenn man im Sinne der international vielfach diskutierten Early-Algebra-Ansätze an einer Verbindung (und gegenseitigen Stützung) arithmetischer und algebraischer Inhalte im Mathematikunterricht interessiert ist. Zum anderen ist es unser Ziel, zu einer weiteren Explikation des Konstrukts mathematische Begabungen beizutragen. Konkret soll es darum gehen, algebraisches Denken im Grundschulalter zu beschreiben, entsprechende Fähigkeiten bei Lernenden des vierten Grundschuljahrgangs ohne vorherige spezifische Unterrichtsprogramme zu erfassen und mögliche Zusammenhänge zwischen *algebraischem Denken* und *mathematischer Begabung* zu erkunden.

Zum algebraischen Denken

Im Sinne einer vorläufigen Arbeitsdefinition wollen wir algebraisches Denken durch die folgenden Komponenten umreißen: *Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen (relationales Denken); Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen*.[1]

Die beschriebenen Komponenten sind selbstverständlich nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischen Konstellationen allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges, mehrdimensionales Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten unabhängig voneinander sind.

Da sich die Komponenten algebraischen Denkens nicht nur auf Fähigkeiten, sondern auch auf zugrunde liegendes Wissen und Vorstellungen beziehen, kommen sie Weinerts engerem Kompetenzbegriff nahe, der kontextspezifische kognitive, erlern- bzw. vermittelbare Leistungsdispositionen umfasst (Klieme & Leutner, 2006).

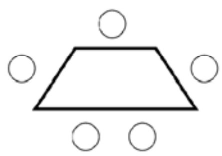
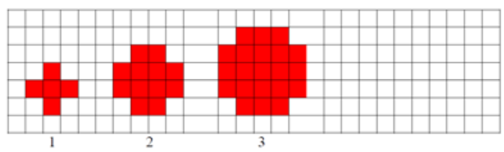
[1] Für nähere Ausführungen Fritzlar (2011).

Eine Vorstudie

Im Frühsommer 2011 konnte eine Vorstudie realisiert werden, in deren Rahmen jeweils ca. 45-minütige diagnostische Einzelinterviews mit 44 Viertklässlern aus der Region Halle durchgeführt und videografiert wurden. An dieser Studie nahmen zum einen zwölf mathematisch sehr leistungsstarke und interessierte Schülerinnen und Schüler teil (Teilgruppe A), die aus den besten zehn Prozent der etwa 250 Kandidaten eines Aufnahmetests für ein mathematisch-naturwissenschaftliches Spezialgymnasium ausgewählt wurden. Zum anderen wurden aus den Schulklassen dieser Teilnehmer jeweils drei weitere Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einbezogen, die nach Einschätzung der jeweiligen Mathematiklehrerin sehr gute bis gute, durchschnittliche und unterdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik erreichten und die damit das Leistungsspektrum der Lerngruppe repräsentieren sollten (Teilgruppen B, C, D). Durch diese Konstruktion der Untersuchungsgruppe konnten mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler einbezogen werden, gleichzeitig sollten die beteiligten Kinder über jeweils vergleichbare Unterrichtserfahrungen verfügen.

Ausgewählte Ergebnisse

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle lediglich auf ausgewählte Aspekte zu zwei Problemen zum *Verallgemeinern* eingegangen werden, die sehr ähnlich aufgebaut sind:

Tischreihen	*Plättchenmuster*
An dem abgebildeten viereckigen Tisch können 5 Personen sitzen.  Wie viele Personen können an einer Reihe aus 2 oder 3 Tischen sitzen? 	In der Abbildung siehst du Figuren, die aus kleinen roten Plättchen zusammengesetzt sind. 
a) Wie viele Personen können an einer Reihe aus 4 Tischen sitzen?	a) Wie viele Plättchen werden für die 4. Figur gebraucht?
b) Wie viele Personen können an einer Reihe aus 100 (10) Tischen sitzen?	b) Wie viele Plättchen werden für die 10. Figur gebraucht?
c) Wie viele Personen können an einer Reihe aus *n* Tischen sitzen?	c) Wie viele Plättchen werden für die Figur mit der Nummer *n* gebraucht?

Teil a) ist ein *near generalisation–Problem*, Teil b) ein *far generalisation–Problem* sensu Stacey (1989), der sehr anspruchsvolle letzte Teil gibt Gelegenheit, eine explizite Vorschrift für die gesuchte Anzahl, also eine *algebraic generalisation* im Sinne Radfords (2006) zu formulieren. Allerdings führt das erste Problem auf ein lineares Muster (z. B. $3n+2$), während das zweite (z. B. $(n+2)^2-4$) zunächst schwieriger erscheint.

Aus quantitativer Perspektive lässt sich zunächst nach den Lösungsraten fragen. Tabelle 1 zeigt für das Teilproblem b), dass die als mathematisch begabt identifizierten Schüler bei beiden Problemen erwartungsgemäß die höchste Lösungsrate erreichten. Auch zwischen den anderen Schülergruppen deuteten sich die erwarteten Unterschiede an. Allerdings war das nichtlineare Plättchenmuster-Problem für viele Schüler einfacher als das lineare Tischreihen-Problem und bei ersterem unterschieden sich die Lösungsraten der Gruppen A und B nur wenig.

Schülergruppe	Anzahl der Lösungen und Lösungsrate	
	Tischreihen	Plättchenmuster
A	5 of 12 (41,7 %)	9 of 12 (75 %)
B	2 of 11 (18,2 %)	7 of 11 (63,6 %)
C	3 of 10 (30 %)	2 of 10 (20 %)
D	1 of 11 (9,1 %)	1 of 11 (9,1 %)

Tabelle 1: Anzahl der Lösungen und Lösungsrate zu Teil b)

Neben den Lösungsraten interessieren aus qualitativer Perspektive die Vorgehensweisen, die die Schüler für die Bearbeitung der Teilprobleme a) and b) nutzten. In Anlehnung an Stacey (1989) und Lannin et al. (2006) kann dabei zwischen den Strategietypen *explicit*, *recursive*, *unitising* und *counting* unterschieden werden. Deren Nutzung durch die verschiedenen Schülergruppen bei Teilproblem b) zeigt Abbildung 1.

Es wird erkennbar, dass insbesondere Schüler aus Teilgruppe A, beim Plättchenmuster-Problem aus den Teilgruppen A und B nach einer expliziten Vorschrift für die gefragten Anzahlen suchten. Darüber hinaus scheint das Tischreihen-Problem mit seinem modularen, sich in eine Richtung vergrößernden geometrischen Muster zu Strategien vom Typ *unitising* zu „verführen“, die auf Proportionalitätsvorstellungen beruhen und ohne Korrektur zu einem falschen Ergebnis führen.[2]

Die teilweise geringen Unterschiede zwischen den Teilgruppen A und B, die im Rahmen der Vorstudie auch bei vielen weiteren Problemstellungen deutlich wurden, könnten einerseits durch eine zu geringe Trennschärfe bei

---

[2] Für eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse vgl. Fritzlar & Karpinski-Siebold (2012).

der Samplekonstruktion verursacht worden sein. Zum anderen könnten sie aber auch darauf hindeuten, dass mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler und solche mit guten bis sehr guten Noten im Schulfach Mathematik zumindest auf dem in dieser Untersuchung betrachteten mathematischen Anspruchsniveau über ähnliche Potenziale zum algebraischen Denken verfügen. Diesbezüglich scheinen weitere Forschungsbemühungen notwendig.

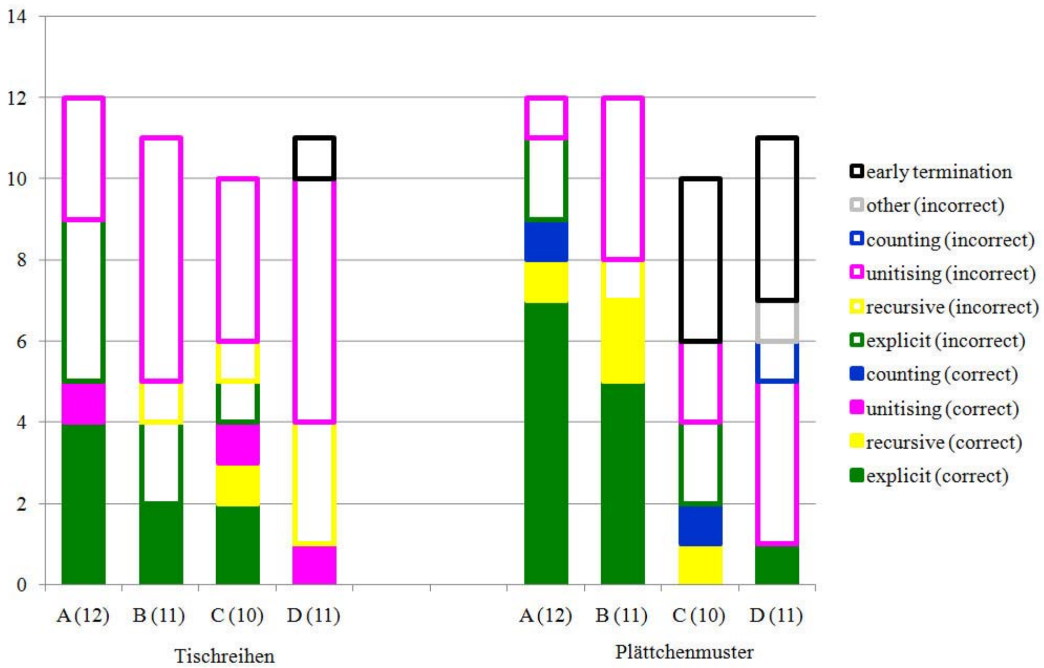


Abbildung 1: Strategietypen bei Teilproblem b)

Literatur

Fritzlar, T. (2011). Algebraic thinking of primary students – what is it and how can it be investigated? In K. Szücs (Ed.), *Problem solving in mathematics education* (pp. 32–47). Münster: WTM.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2012). *Continuing patterns as a component of algebraic thinking – an interview study with primary students.* 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul.

Klieme, E., & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. *Zeitschrift für Pädagogik, 52* (6), 876–903.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *MERJ, 18* (3), 3–28.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the NA-PME* (pp. 2–21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.