Thomas GAWLICK, Hannover

# Heuristische Rekonstruktion – Heuristische Instrumentation

## Unterrichtliche Aufbereitung von Problemaufgaben anhand einer Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes

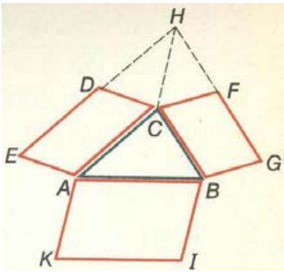
Empirische Erfahrungen (Hölzl (1995, 1999), Brockmann-Behnsen 2010) zeigen, dass zur vollen Ausschöpfung des heuristischen Potentials von DGS die vorfindlichen Lehrkonzepte erweitert werden müssen durch:

– *Heuristische Rekonstruktion* (HR) von Problemaufgaben

– *Heuristische Instrumentation* (HI) eines sachgemäßen DGS-Einsatzes

Diese Konzepte (erläutert im Basisartikel zur Sektion) wenden wir auf folgendes Beispiel als mögliches Ziel eines längerfristigen Heuristik-Trainings (Brockmann-Behnsen in diesem Band) an: „**Papppusscher Dreieckssatz**, eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes: Zeichnet man über zwei Seiten eines Dreiecks ABC je ein beliebiges Parallelogramm ACDE beziehungsweise BCFG, verlängert deren Seiten DE beziehungsweise FG, bis sie sich im Punkt H schneiden, zeichnet zu HC die Parallelen durch A und B und verbindet die Punkte K und L, in denen HE und HG von den Parallelen geschnitten werden, so entsteht das Parallelogramm ABLK, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen der beiden ersten Parallelogramme ist.“ (Brockhaus online) Lambacher-Schweizer (1970) erweist die unterrichtliche Behandelbarkeit – aber trotz der Figur erschließen sich auch hier der Sinn des Satzes und der Zusammenhang zum Pythagoras nicht ohne Weiteres:

**5.** a) Beweise mittels Scherungen den Satz (Fig. 21.1): Zeichnet man über den Seiten $AC$ und $BC$ eines Dreiecks $ABC$ Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ und schneiden sich $ED$ und $GF$ in $H$, so ist die Summe der Parallelogramminhalte gleich dem Inhalt des Parallelogramms $ABIK$, bei welchem $\overline{AK} = \overline{CH}$ und $AK \parallel CH$ ist.

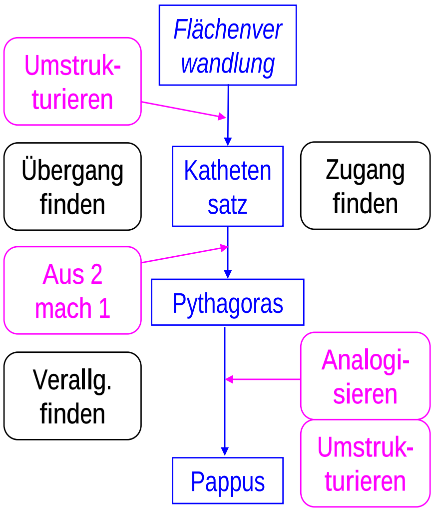



Dies ist Heuristik auf Basis-Niveau: Satz, Figur und Beweishilfsmittel sind vorgegeben. Hier setzt die Schlüsselfrage 2c. der HR an: *Was davon lässt sich von den SuS selbständig erschließen?*

Im Prozess der HR werden dabei folgende **didaktische Probleme** gelöst:

**Verallgemeinerung finden:** Der Pythagoras muss so behandelt werden, dass die Aussage verallgemeinert und der Beweis übertragen werden kann. Daher wird der Scherungsbeweis ausgewählt und die Scherung durch ein „operatives Vorspiel“ zu einem flexiblen Beweisfindungsmittel gemacht.

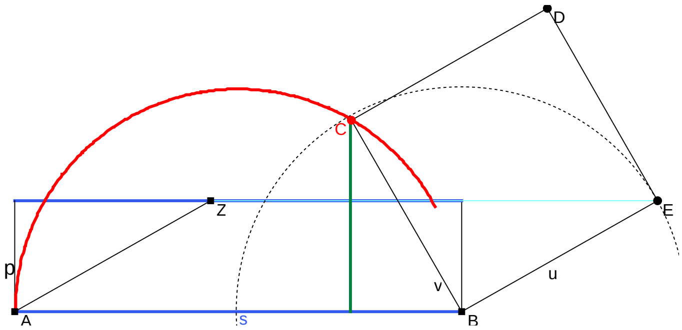
**Zugang finden**: Auch der Pythagoras soll möglichst eigenständig gefunden werden. Als motivierendes Ausgangsproblem der Flächenverwandlung dient die Rechtecksquadratur – für den Kathetensatz muss allerdings die Flächenverwandlungsrichtung umgekehrt und das rechtwinklige Dreieck ABC hervorgehoben werden – die SuS lernen den Heurismus Umstrukturieren.




**Übergang finden**: Zum Kathetensatz kommen SuS meist nur mit Lenkung des Lehrers – daher wird hier ein geeigneter heuristischer Kontext geschaffen, indem man „die DGS über die reine Bestätigung eines geometrischen Sachverhaltes hinaus so verwenden [kann], dass dieser, eingebettet in allgemeinere oder speziellere Fragestellungen, in seiner Besonderheit erkennbar ist“ (Hölzl 1999). Dazu dient folgende *Stufung* der Hilfsaufgabe:

Gegeben ein Rechteck mit Seiten p, s, gesucht ein flächengleiches Quadrat.

*RE(p,s)⟶ Q (u):* Ist ein „klassisches Quadraturproblem“ , aber schwer – wie findet man u geometrisch? Dazu dient die Rückführung auf eine leichtere Aufgabe:




*RE(p,s)⟶ RE(u,v):* Ist leicht – im Fall p<u<s durch das Zwischenziel Parallelogramm oder das Hilfsmittel Scherung: PG(u,s) entsteht durch Scheren längs s´||s und RE(u,v) durch Scheren längs u´||u.

Dies ist der *Kontext*, in dem SuS den Spezialfall u=v in seiner Besonderheit erkennen können – und die beobachteten Eigenschaften konstruktiv nutzen (Rückwärtsarbeiten). Ziehen an Z variiert u (DGS als heuristisches Werkzeug, vgl. das elektronische Arbeitsblatt (elAB) in Anhang 1) und über die situative Heuristik des Schema zweier geometrischer *Örter* (Polya) erhält man die gesuchte Ecke C von Q(u) als Schnitt zweier Ortslinien. Durch Umstrukturieren erhält man hieraus den Kathetensatz.

**Analogisieren:** „Analoge Dinge *stimmen in gewissen Beziehungen* zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander *überein*.“ (Polya 1945, 52) Verallgemeinern ist der Übergang von einer *Satzdarstellung* S: V⟶ B mit *Beweisdarstellung*: Bew: $V = A_1 \rightarrow A_2 \ldots\rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n = B$ zu S´: V´⟶ B´ mit V⟶ V´, Subst(B´,V´=V) = B und *analoger* Beweisdarstellung

Bew´: $V' = A'_1 \rightarrow A'_2 \ldots\rightarrow A'_{n'} = B'$

Beim Pythagoras wählen wir dazu die Darstellung : $V_1$: ABC ist rechtwinkliges Dreieck, $V_2$: P, Q, R sind Quadrate über c, b, a. B: |P| = |Q| + |R|.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, sowohl V als auch B zu modifizieren. Aber die Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke können SuS kaum eigenständig durchführen, denn der Kosinussatz lässt sich nicht entdecken – aber die Pappus-gemäße Modifikation von $V_2$?! Während man oft (wie im Schulbuch) beim Verallgemeinern mit V und B beginnt, soll hier mit Bew begonnen werden. Ausgangspunkt ist also $V_1$*´:* ABC ist ein Dreieck.

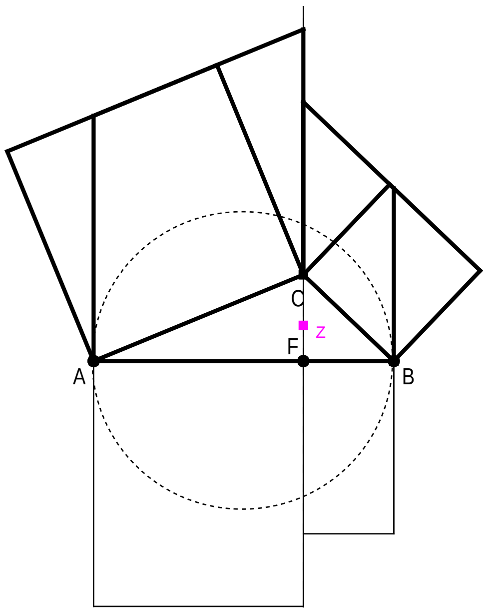
Erkundung (elAB, Anhang 2) zeigt: Ein Quadrat der Fläche |Q| + |R |  hat einen Defekt (oder Überschuss) gegenüber P. (HI: Exploratives Ziehen)

*Mögliche S-Idee für V2´:* Q, R Quadrate über a, b, P Rechteck über c.

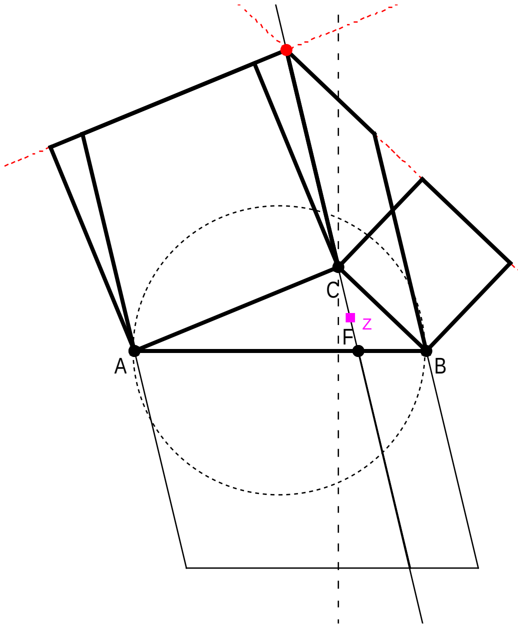
*L-Impuls:* „Das geht, ist aber nicht „schön“. Versucht, den Scherungsbeweis zu übertragen! Das zeigt euch, wie ihr V und B verändern müsst.“ Hierdurch lernen die SuS einen fortgeschrittenen Heurismus kennen:
Proof analysis nach Lakatos „to discover the lemma (perhaps hidden) to which the global counterexample is a local counterexample. The result of this stage is an improved conjecture featuring a *new proof-generated concept*.“ (Larsen & Zandieh 2008) Hier wird durch das elAB in Anhang 3 die im Pythagoras-Beweis verborgene Rolle des Punktes H als Schließungspunkt der Scherungsfigur explorativ verdeutlicht. Nachfolgend daraus zwei Phasen, mit sukzessive abgerufenem Anleitungs- und Hilfetext:

Erläutere den Zusammenhang zwischen blauen  Vierecken in der Figur.
Löse dann die Bindung von C an den Kreis.
Was beobachtest Du?

Die  hellen Vierecke sind nicht mehr flächengleich zu  den schraffierten Teilflächen des dunkelblauen Vierecks.
Die gescherten Vierecke passen nicht mehr zusammen.
Man kann auch sagen: Weil das Dreieck nicht mehr rechtwinklig ist, erfüllt die Senkrechte durch C nicht mehr ihren Zweck.
Wir wollen eine andere Scherlinie finden, so dass die Flächen wieder zusammen passen.
Löse dazu die Bindung von Z an das Lot und ziehe an Z. Was beobachtest Du?




HI: Nach Lösen der Bindung variiert man nicht mehr *in* einer Konfiguration, sondern diese selbst. Die Flächenaussage geht dabei zunächst verloren, kann aber mit einer neuentdeckten Regularität wiederhergestellt werden(„descending“ bzw. „ascending control“ im Sinne von Arzarello):




Beim Ziehen an Z wird das dunkelblaue Quadrat zu einem Parallelogramm, das immer zu g=FC parallel ist.
Man kann Z so verziehen, dass die gescherten Vierecke wieder aneinander stoßen. Dann sind sie auch wieder zu den schraffierten Teilparallelogrammen des blauen Vierecks flächengleich.
Wie finden wir F? Hierzu müssen wir umstrukturieren. Wenn g bekannt ist, finden wir F als Schnittpunkt mit AB.
Versuche daher, einen anderen Punkt von g konstruktiv zu beschreiben.

Der rote Punkt liegt auf g. Es ist der Schnittpunkt der Geraden durch die Außenkanten der hellen Quadrate

Die SuS erkennen: Scheren zur Linie CF verwandelt Q und R in ein flächengleiches Parallelogramm P. Und das geht auch, wenn Q und R ebenfalls Parallelogramme sind! Nun kann der Satz von Pappus ausgesprochen und sein explorativ gefundener Beweis ausformuliert werden – und die schrittweise gelenkte Eigenaktivität macht das den SuS sicher plausibler.

Die abschließende Prinzipdarstellung fasst Beweisen und Verallgemeinern als Spezialfall des Problemlösens auf und zeigt die dialektische Rolle der proof analysis á la Lakatos bei der Umstrukturierung von S zu S: