Günter GRAUMANN, Bielefeld

Entdecken symmetrischer Dreieckspyramiden - ein Problemfeld für Systematisierungsübungen und Förderung der Raumanschauung

Die Dreieckspyramiden (allgemeine Tetraeder) sind wie die Dreiecke in der Ebene die Simplexe der Raumgeometrie. Umso mehr ist es verwunderlich, dass sie im Unterricht kaum vorkommen, obgleich Kanten-, Flächen- und Vollmodelle leicht hergestellt werden können. Formbetrachtungen über unterschiedliche Dreieckspyramiden sollten deshalb in der Klassenstufe 5/6 schon stattfinden. Nach der Behandlung symmetrischer Figuren der Ebene lassen sich Symmetriebetrachtungen zu Dreieckspyramiden gut anschließen. Hierzu sollen einige Anregungen gegeben werden.

Eine Dreieckspyramide ABCD ist festgelegt durch vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, sowie den Verbindungsstrecken von je zwei dieser vier Punkte. Auf der Suche nach symmetrischen Dreieckspyramiden können wir deshalb als Erstes feststellen, dass als ***Symmetrieabbildung*** alle möglichen Permutationen der vier Punkte (mit Ausnahme der Identität) in Frage kommen. Mit Hilfe üblicher systematischer, kombinatorischer Überlegungen (alle Permutationen, bei denen A auf A bzw. B bzw. C bzw. D abgebildet wird, etc.) erhalten wir *24 mögliche Permutationen*, die durch Notation der Bildquadrupel wie folgt benannt werden können:
ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.
Als nächstes werden wir versuchen *geometrische Interpretationen* dieser 24 Permutationen zu finden. Dazu versuchen wir es mit den uns bekannten Kongruenzabbildungen im Raum: den Ebenenspiegelungen, Achsendrehungen oder Kombinationen zweier dieser beiden Typen.
Zunächst finden wir *6 mögliche Ebenenspiegelungen*, die eine Dreieckspyramide auf sich abbildet, wobei die Spiegelebene jeweils durch eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante gebildet wird. Damit eine solche Ebenenspiegelung auch wirklich eine Symmetrieabbildung der Dreieckspyramide ist, muss die gegenüberliegende Kante natürlich senkrecht zur Spiegelebene verlaufen.
Weiterhin finden wir *8 mögliche Achsendrehungen mit Drehwinkel 120° bzw. 240°*, wobei eine Drehachse jeweils durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht. Diese Seitenfläche muss dann natürlich ein gleichseitiges Dreieck sein und senkrecht auf der Drehachse stehen.

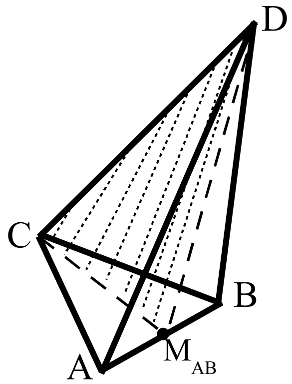
Zwischenüberlegung: Wir suchen zu den genannten 14 möglichen Abbildungen zunächst einmal die zugehörigen Permutationen und stellen dabei fest, dass bei den Ebenenspiegelungen zwei Fixpunkte vorliegen und die restlichen beiden Punkte vertauscht werden (also einen Zyklus darstellen). Bei den genannten Achsendrehungen haben wir einen Fixpunkt und die restlichen drei Punkte bilden einen Zyklus. Wenn wir drei Fixpunkte annehmen, so muss offensichtlich der vierte Punkt auch auf sich selbst abgebildet werden. Und die Abbildung mit vier Fixpunkten ist die Identität.
Bei der Erkundung weiterer möglicher Deckabbildungen der Dreieckspyramide können unter den verbleibenden Permutationen solche mit Zyklen suchen und finden zunächst solche mit zwei Zweier-Zyklen.
Wir finden auf diese Weise *3 mögliche Achsendrehungen mit Drehwinkel 180°*, wobei jeweils zwei gegenüberliegende Kanten um 180° gedreht werden. Damit es sich auch wirklich um Symmetrieabbildungen der Dreieckspyramide handelt muss die Drehachse die Verbindung der beiden Mittelpunkte der beiden gegenüberliegenden Kanten sein und sie muss senkrecht zu den beiden gegenüberliegenden Kanten sein.
Die verbleibenden *6 Permutationen* stellen sich *als Viererzyklen* heraus und haben auch keinen Fixpunkt. Wir versuchen ihre geometrische Deutung deshalb mit einer *Kombination aus Ebenenspiegelung und Achsendrehung* und stellen fest, dass dieses möglich ist, und zwar auf verschiedene Weise.

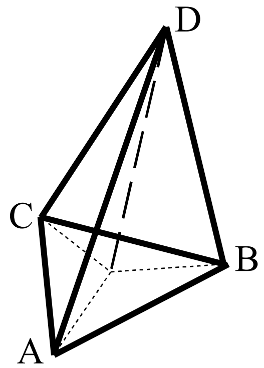
Wir haben damit alle möglichen 24 Permutationen als bekannte geometrische Abbildungen gedeutet und können auch leicht feststellen, dass sie alle Symmetrieabbildungen des regulären Tetraeders sind.

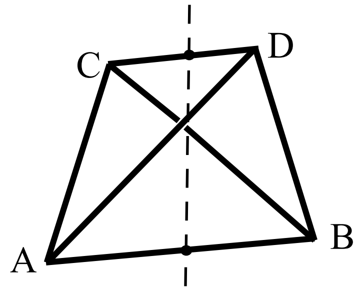
Wollen wir nun ***symmetrische Dreieckspyramiden*** finden, die nicht gleich dem regulären Tetraeder sind, so müssen wir systematisch die einzelnen obigen Typen von Abbildungen durchgehen und nach Dreieckspyramiden suchen, die jeweils die oben dazu genannten Eigenschaften erfüllen. Weiterhin müssen wir nach Dreieckspyramiden suchen, die zwei oder mehr der genannten Abbildungen als Symmetrieabbildung haben.
Wir führen zunächst Kurzbezeichnungen für die vier Typen von Symmetriebbildungen ein:
E = Ebenenspiegelung,
R = Rotation mit 120° oder 240°,
A = Achsenspiegelung (Rotation mit 180°),
K = Kombination von zwei Abbildungen zur Bildung eines Viererzyklus.

Aus den oben genannten notwendigen Eigenschaften einer Dreieckspyramide mit einer der genannten Abbildungen als Symmetrieabbildung ergeben sich leicht die folgenden *Typen von symmetrischen Dreieckspyramiden*:

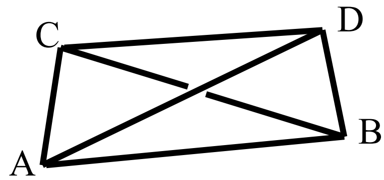
E: Dreieckspyramide mit einer Symmetrieebene
R (REEE): Dreieckspyramide mit einer Rotation Typ R
A: Dreieckspyramide mit einer Rotation Typ A
K (KKEEA): Dreieckspyramide mit einer Symmetrie Typ K





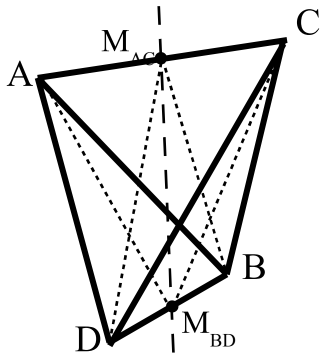


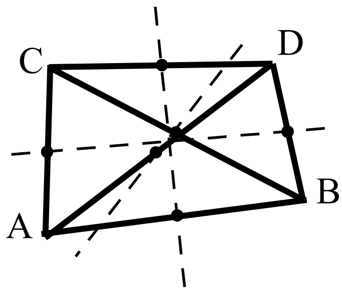
Bei der Betrachtung der Pyramide zum Typ R stellt man fest, dass die drei Ebenen durch die Rotationsachse und eine Kante, die diese Achse trifft, offensichtlich auch Symmetrieebenen sind, deshalb habe ich den Typ zusätzlich mit REEE bezeichnet.
Bei der näheren Betrachtung einer Dreieckspyramide, die einen Typ K als Symmetrieabbildung hat, stellen wir fest, dass aufgrund der Längeninvarianz der Abbildung vier Kanten gleich lang sein müssen und die restlichen zwei Kanten zueinander gleichlang sind. Damit ergeben sich zwei zusätzliche Symmetrieebenen



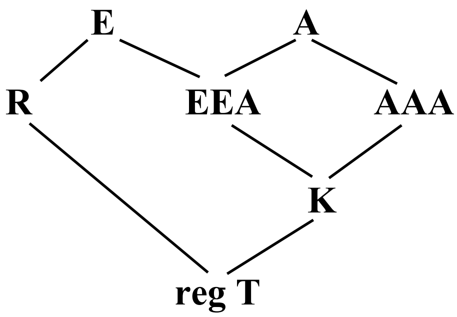
(nämlich jeweils mit einer der beiden zuletzt genannten Kanten innerhalb der Ebene). Durch wiederholte Anwendung der ursprünglichen Permutation erhält man außerdem eine Achsenspiegelung (an der Achse durch die Mitten der beiden zuletzt erwähnten Kanten) und eine weitere Symmetrieabbildung vom Typ K (nämlich die zur ursprünglichen inversen). Deshalb habe ich den Typ zusätzlich mit KKEEA bezeichnet.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften von Dreieckspyramiden, die *zwei Symmetrieebenen* (mit gemeinsamer Kante bzw. ohne gemeinsame Kante) oder *zwei Achsensymmetrien* oder *eine Symmetrieebene und eine Achsensymmetrie* oder *drei und mehr der obigen Symmetrien* haben. Das erfordert zwar einige Mühe, man erhält dann aber neben dem regulären Tetraeder (abgekürzt mit regT) nur noch zwei weitere symmetrische Dreieckspyramiden, nämlich die Typen
EEA: Dreiecksp. mit zwei Ebenen- und einer Achsensymmetrie
AAA: Dreisecksp. mit drei Achsensymmetrien.





Aufgrund der jeweils festgestellten Eigenschaften (oder auch durch Betrachtung der jeweiligen Symmetriegruppen) kann man die 7 Typen von symmetrischen Dreieckspyramiden wie folgt ordnen:



Eine sehr schöne Übung zur Vertiefung ist das Herstellen von Netzen und Modellen dieser sieben Dreieckspyramiden sowie das Suchen nach Sonderfällen bezüglich rechtwinkliger oder/und gleichschenkliger Seiten.

Literatur:

Bubeck, H. (2003). Analogisieren vom Dreieck zum Tetraeder. In: PM Prax. Math. Sch. 45, No 6, 276 – 281.

Fritsch, R. (2009). Zur Elementargeometrie des Tetraeders. In: Mathematikunterricht 55, No 1, 3 - 15.

Gossler, M. (1992). Zur Geometrie der verallgemeinerten Tetraeder. In: Prax. Math. 33(6), 261 – 262.

Graumann, G. (2011. Typen nicht-konvexer Vielecke. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 307 – 310.

Quaisser, E. (2003). Tetraeder und ihre Symmetrien. In: PM Praxis. Math. Sch. 45, No 4, 168 – 173 und No 6, 381 – 285.,

Schumann, H. (2004). Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel “Dreieck-Tetraeder". In: Math. Didact. 27, No. 1, 82 - 100.

Schumann, H. (2011). Tetraedergeometrie – eine raumgeometrische Theorieentwicklung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 791 – 794.

Schumann, H. (2011a) Elementare Tetraedergeometrie – Eine Einführung in die Raumgeometrie, Hildesheim u. Berlin: Franzbecker.