Johanna HEITZER, RWTH Aachen

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$?! — Ein Schauderfehler als Ausgangspunkt für strukturmathematische Entdeckungen

Umformungen wie diese kommen in den besten Kursen vor, spätestens indirekt bei verführerischen Termen wie $\sqrt{9x^2 - 25y^4}$ oder $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Die Unterstellung linearen Verhaltens ist einer der hartnäckigsten Fehler der Schulmathematik. Danckwerts hat 1988 gezeigt, wie dies auf strukturelle Erkenntnisse im Eindimensionalen führen kann. Auch hier geht es um mathematische Struktur, allerdings mit Blick auf mehr Dimensionen bzw. andere mathematische Objekte. „Ja, stimmt das denn nie?“, fragte zum oben genannten Fehler noch kurz vor dem Abitur ein Schüler meines Leistungskurses in gespielter Verzweiflung. Das gab Anlass zu einem Exkurs, dessen fachlicher Kern hier stichpunktartig wiedergegeben wird.

Ausgangsfrage: Seien Δ und $\square$ zwei Zahlen oder andere mathematische Objekte. Kann die Umformung $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2$ unter irgendwelchen Umständen richtig sein?

Zahlen, Binome, Nullteilerfreiheit und Pythagoras

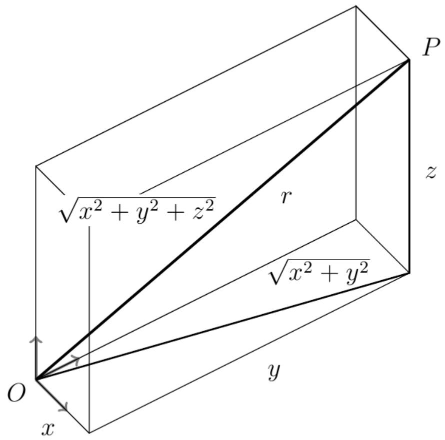
Wenn man mit $\Delta, \square$ und den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie gewohnt rechnen darf, das heißt wenn Kommutativ- und Distributivgesetz gelten, gilt $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + 2 \cdot \Delta \cdot \square + \square^2$. Ergo: $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2 \Leftrightarrow \Delta \cdot \square = 0$
Sind Δ und $\square$ Zahlen (aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so gilt dies wegen der Nullteilerfreiheit nur im trivialen Fall: $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \vee \square = 0$
Möglicherweise erinnert die linke Gleichung vage an das $c^2 = a^2 + b^2$ im Satz des Pythagoras. Aber im rechtwinkligen Dreieck ist ja nie $c = a + b$.

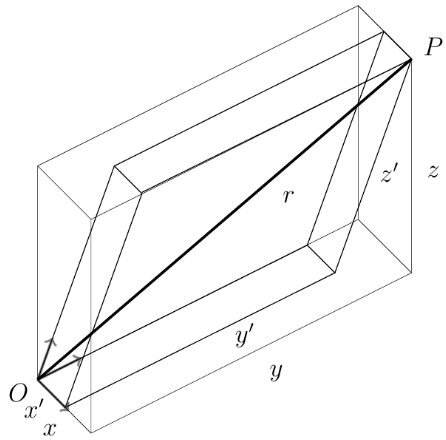
Vektoren, Skalarprodukte und mehr Pythagoras

Vektoriell betrachtet ist im Dreieck sehr wohl $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, und es gilt

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad * \quad ,$$

sofern der Malpunkt bzw. $(..)^2$ für das Skalarprodukt stehen. Dann nämlich ist $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2$ das Quadrat der Seitenlänge und * die vektorielle Form des Satzes von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle(a, b) = 90°$





Die Abbildungen zur Längenberechnung von Raumdiagonalen führen auf den Fall der vektoriellen Summe dreier Vektoren. Es gilt

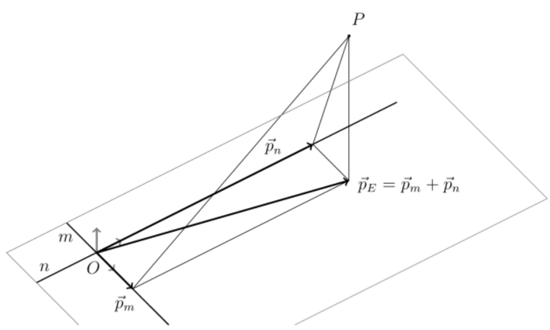
$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2 \Leftarrow \vec{a} \perp \vec{b} \wedge \vec{a} \perp \vec{c} \wedge \vec{b} \perp \vec{c} \quad ,$$

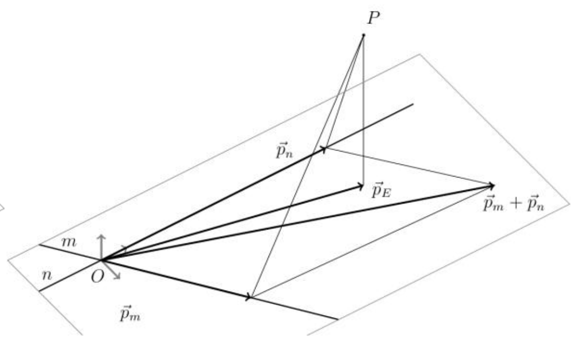
wobei diskutiert werden sollte, warum jetzt nur noch die eine Richtung gilt: Woran scheitert die Umkehrung? Wer findet ein Gegenbeispiel?

Orthogonalität: Etwas ganz Besonderes!

Der Ansatz $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2$ führt im Fall von Vektoren auf den Sonderfall der Orthogonalität. Tatsächlich haben Systeme paarweise orthogonaler Vektoren eine ganze Reihe außergewöhnlicher Vorteile:

- Das Längenquadrat des Ganzen kann als Summe der Längenquadrate der einzelnen Teile berechnet werden (Pythagoras).
- Lineare Unabhängigkeit des Gesamtsystems ist (anders als bei paarweiser linearer Unabhängigkeit) automatisch mit garantiert.
- Die Orthogonalprojektion auf das Ganze kann als vektorielle Summe der Orthogonalprojektionen auf eindimensionale Teile berechnet werden. Die Projektionskoeffizienten sind voneinander unabhängig.





Die letzte Aussage ist in den Abbildungen veranschaulicht. Alles zusammen bündeln wir in der Form: Orthogonalität ist „totale Unabhängigkeit“.

Orthogonalität in euklidischen Vektorräumen

Exkurs für Experten: Von Orthogonalität spricht man in allen euklidischen Vektorräumen, d.h. in Vektorräumen mit Skalarprodukt. Koppelt man an das Skalarprodukt analog zum geometrischen Raum einen Orthogonalitäts- und einen „Längen"- oder Normbegriff, so gelten auch sonst alle aus dem anschaulichen Raum bekannten Verfahren und Zusammenhänge weiter.

> Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein Skalarprodukt ist eine bilineare, symmetrische und positiv definite Abbildung von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathbb{R}$. In Vektorräumen mit Skalarprodukt sind Orthogonalität und Norm wie folgt definiert:
>
> $$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

Orthogonalität und „unabhängige Typen"

Für die Schule bietet sich eine erste Verallgemeinerung des Orthogonalitätsbegriffs an, wie sie in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften tatsächlich zur Klassifikation durch geordnete Zahlenlisten beschriebener Objekte benutzt wird: Beurteilt jeder der Reihe nach auf einer Skala von 0 bis 10, wie sehr er Fußball, Mode, Bier, HighTech, Gespräche und VIP-News mag, so nennt man zwei Personen orthogonal oder „total unabhängig", wenn bei ihnen die Summe der Produkte zusammengehöriger Werte Null ist. Was heißt das? Was steckt hinter Orthogonalität, wenn man z.B. stark polarisierende Speisen oder Stars auf Skalen von –5 bis +5 beurteilt.

Matrizen: wieder anders und doch vergleichbar

Am Ende der Oberstufe kennen Lernende neben Vektoren auch Matrizen. Wie ist es damit? Kann für Matrizen die Titelgleichung gelten, auch wenn keine Nullmatrix dabei ist? Hier müssen wir in drei Fällen antworten.

<u>Fall 1 zur Klärung vorab</u>: Eine Matrix A heißt orthogonal, wenn Ihre Einträge spaltenweise zu einem Orthogonalsystem von Vektoren gehören. In diesem Fall gilt $A^{-1} = A^T$ und zugehörige Gleichungssysteme sind entsprechend einfach zu lösen. Das hat nicht unmittelbar mit unserer Frage zu tun.

<u>Fall 2 als aufschlussreiche Rechenübung</u>: Stehen Δ und $\square$ für quadratische Matrizen und der Malpunkt bzw. $(..)^2$ für die Matrizenmultiplikation, dann gilt $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \Delta \cdot \square + \square \cdot \Delta + \square^2$. Paare von Matrizen zu suchen, für die $\Delta \cdot \square = -\square \cdot \Delta$ und damit unsere Gleichung gilt, ist eine intelligente Übung zur Matrizenmultiplikation. Allerdings ist diese beileibe kein Skalarprodukt (nicht symmetrisch und vor allem keine Abbildung nach $\mathbb{R}$).

Dritter Fall für Experten: Die Menge aller 2×2-Matrizen bildet mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation sowie dem (Hilbert-Schmidt-) Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = Spur(A \cdot B)$ einen euklidischen Vektorraum, in dem $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthogonalbasis ist. Letztere spielt in der Bildkompression eine Rolle (z.B. Heitzer 2010).

Ereignisse und Zufallsvariablen

Offenbar hat Orthogonalität mit Unabhängigkeit zu tun. Von Unabhängigkeit hören Schüler auch bei stochastischen Ereignissen. Tatsächlich besteht ein Zusammenhang, in dessen Nähe man im Unterricht gelangt: Im Ereignisraum eines Zufallsexperimentes ist die Kovarianz von zugehörigen Zufallsvariablen ein Skalarprodukt. Mit $E(..)$ für den Erwartungswert gilt:

$$Cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big) \cdot \big(Y - E(Y)\big)\Big) \quad Var(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$$

Zwei Zufallsvariablen sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn ihre Kovarianz Null ist, und $\|X\| = \sqrt{Var(X)}$ ist ein Maß für die tatsächliche Zufallsabhängigkeit von X. Der Zusammenhang mit $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2$ liegt, da die Varianz bereits so etwas wie ein Quadrat ist, in:

$$Var(X+Y) = Cov(X+Y, X+Y) = Var(X) + 2 \cdot Cov(X,Y) + Var(Y)$$

Ergo: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \Leftrightarrow X, Y$ stochastisch unabhängig

Kleines Fazit

Für Vektoren, Matrizen und (in gewissem Sinne) Zufallsvariablen kann die im Titel genannte Gleichung sehr wohl gelten. Sie führt dort auf den weiten Begriff der Orthogonalität und alle mit ihm verbundenen Besonderheiten. Das zeigt beispielhaft, wie Fehler als Lernchancen genutzt werden können (u.a. Leuders 2003), und wie sich der Prozess des Begriffslernens über viele Jahre erstrecken kann (Vollrath, 1987).

Literatur

Alexits, G. (1971): Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonlität. Band 92 der Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar in Gießen.

Danckwerts, R. (1988): Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. In: Didaktik der Mathematik, 2, 149-160.

Heitzer, J. (2010): Orthogonalität und Beste Approximation. Hochschulschriftenreihe, RWTH Aachen. (online-veröffentlicht unter http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus3/volltexte/ 2010/3404/, ab Herbst bei Springer)