Angela HERRMANN, Essen

Beweisstrategien in der Linearen Algebra – eine Fallstudie zum Thema Unterraum

1. Einleitung

Immer wieder lässt sich beobachten, dass Studienanfänger in der Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra Schwierigkeiten haben, selbst vermeintlich leichte Beweisaufgaben zu lösen. Ein möglicher Grund dafür könnte fehlendes Wissen über Strategien zum Lösen von „Standardbeweisaufgaben“ sein.

Um die tatsächlichen Ursachen für das Scheitern zu untersuchen, wurde eine Pilotstudie an der Universität Duisburg-Essen durchgeführt. In Interviews wurden Studierende am Ende des ersten Semesters gebeten, Aufgaben zum Thema Unterraum zu lösen und dabei ihre Vorgehensweise zu erläutern. Unter den Aufgaben befand sich auch folgende:

> $V := \mathbf{R}^3$ ist ein $\mathbf{R}$-Vektorraum.
>
> Zeige: Die Menge $U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$ ist ein Unterraum von V.

Im Artikel wird zunächst eine mögliche Beweisstrategie erörtert und anschließend eine Anforderungsanalyse durchgeführt. Eine Fallstudie soll zeigen, in welcher Weise diese Strategie und die in der Aufgabe steckenden Anforderungen Auslöser für Fehler in studentischen Bearbeitungen sein können.

2. Beweisstrategie und Anforderungsanalyse

Aus Platzgründen muss hier auf die Angabe einer Musterlösung verzichtet werden. Eine Lösung zu einer ähnlichen Aufgabe im $\mathbf{R}^n$ findet sich in Ableitinger & Herrmann (2011, S. 229).

Strategie: Eine mögliche Vorgehensweise beim Bearbeiten dieser Aufgabe wäre, das Unterraumkriterium anzuwenden. Dabei geht man in drei Schritten vor, die durch die Teilkriterien des Unterraumkriteriums bestimmt sind. Im ersten Schritt muss man beweisen, dass U nicht die leere Menge ist. Dafür weist man nach, dass der Nullvektor von V die definierende Eigenschaft von U (hier: $2x_1+x_2=0$) erfüllt und somit in U enthalten ist.

Im zweiten und dritten Schritt nimmt man sich zwei beliebige Vektoren u_1, u_2 aus der Teilmenge U bzw. einen beliebigen Vektor u aus der Teilmenge und ein beliebiges Skalar λ aus dem Körper $\mathbf{R}$ und zeigt, dass dann auch $u_1 + u_2$ bzw. λu in U enthalten ist. Hierfür weist man wiederum nach, dass $u_1 + u_2$ bzw. λu die definierende Eigenschaft von U erfüllt. Dazu nutzt man die auf V definierte Addition bzw. skalare Multiplikation und die definierende Eigenschaft von U aus, die u_1 und u_2 bzw. u bereits erfüllen.

Anforderungen: Zum Bearbeiten der Aufgabe muss man sich zunächst mit der vorliegenden Situation vertraut machen. Dazu sollte man beispielsweise die Aussage „$u \in U$" entsprechend der Mengenbeschreibung umformulieren können. Für eine solche *Interpretation der Mengenbeschreibung* braucht man „symbol sense" und dabei vor allem den Teilaspekt des „reading through symbols" (nach Arcavi 1994). Ein nächster Schritt beim Bearbeiten ist das *Erkennen einer geeigneten Beweismethode* (hier: Verwendung des Unterraumkriteriums) und damit zusammenhängend auch das *Herausfiltern von und das Unterscheiden zwischen Voraussetzung und Behauptung* (hier: sowohl im übergeordneten Beweis als auch in den Teilbeweisen des Unterraumkriteriums). Bei der eigentlichen Durchführung muss dann noch *exakt formuliert* sowie die vorliegende Situation *zielgerichtet uminterpretiert* werden und es müssen Terme z*ielgerichtet umgeformt* werden. Zum Uminterpretieren gehört beispielsweise das Zugänglichmachen der $\forall$-Aussage durch die Wahl beliebiger Elemente und die Umformulierung der Behauptung „$\lambda u + \mu v \in U$". Um die definierende Eigenschaft für $\lambda u + \mu v$ zu überprüfen, muss man im vorliegenden Fall zielgerichtet umformen, wofür man Struktursinn (nach Hoch & Dreyfus 2010) braucht.

3. Fallstudie Nina

Im Interview erläuterte Nina zunächst allgemein ihre Vorgehensweise beim Beweisen der Aussage, dass es sich bei einer gegebenen Teilmenge U eines Vektorraums V um einen Unterraum handelt. Danach sollte sie u. a. obig abgedruckte Aufgabe bearbeiten. Wir wollen hier einige ausgewählte schriftliche Ergebnisse und zugehörige mündliche Erläuterungen analysieren und Fehlerquellen bei Ninas Bearbeitung identifizieren.

In Abb. 1 ist zu sehen, was Nina zur Einstiegsfrage nach der allgemeinen Vorgehensweise notiert. Sie gibt das Unterraumkriterium nur unvollständig wieder. Der logische Zusammenhang zwischen den beiden Teilen $u_1, u_2 \in U$ und $u_1 + u_2 \in U$ wird von ihr nicht dargestellt. Die Tatsache, dass es sich hier um eine $\forall$-Aussage handelt, wird bei Nina nicht deutlich. Diese unpräzise Formulierung der Strategie führt im späteren Beweis der Aufgabe auch zu einer fehlerhaften Lösung (Abb. 2).

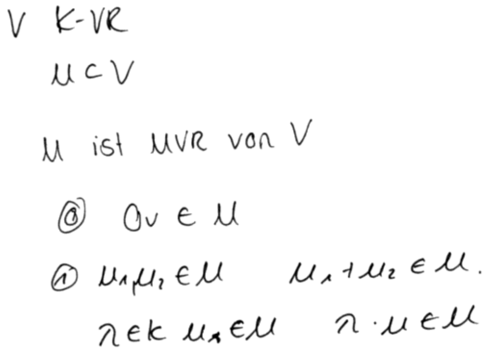

Abb.1: Unterraumkriterium (Nina)

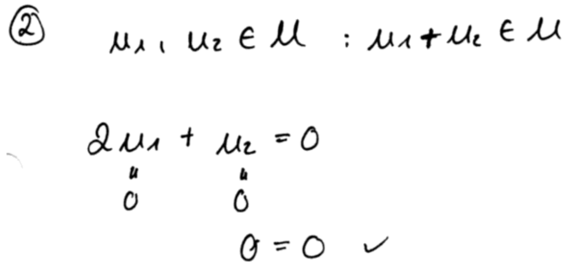

Abb. 2: Ausschnitt aus Ninas Bearbeitung

Statt u_1 und u_2 beliebig zu wählen, setzt sie für u_1 und u_2 jeweils den Nullvektor ein. Dies erkennt man auch an Ninas Erläuterungen zur Bearbeitung dieses Aufgabenteils:

> „Also es muss ja jetzt wieder die Addition, die Abgeschlossenheit der Addition gelten. Und naja, da hab' ich zwei Elemente also u_1 und u_2 ne, und die hab' ich für x_1 und x_2 eingesetzt. Und da ich ja schon weiß, dass das Nullelement enthalten ist, hab' ich u_1 und u_2 als Null gewählt. Zweimal Null plus Null ist gleich Null. Also ist das enthalten."

Hier wird auch ihre Strategie deutlich: Nina hält den Beweis für beendet, sobald sie eine wahre Aussage erhält. Ihre falsche Vorgehensweise, für u_1 und u_2 den Nullvektor einzusetzen, stellt sie dabei nicht in Frage.

Neben der *fehlerhaften Strategie* steckt noch ein weiterer Fehler in ihrer Bearbeitung. Sie will zeigen, dass $2u_1 + u_2 = 0$ gilt. Dies muss aber für $u_1 + u_2 \in U$ nicht bewiesen werden. Dieser Fehler kommt durch eine *falsche Interpretation der Menge* zustande. Nina erfasst den Zusammenhang zwischen dem Vektor (x_1 x_2 x_3) und der Bedingung $2x_1+x_2=0$ aus der Mengenbeschreibung nicht. Für sie ist sowohl (x_1 x_2 x_3) ein Vektor als auch x_1 und x_2 in der Bedingung. Dies wird zu Beginn der Bearbeitung der Aufgabe deutlich, als sie versucht, die Bedingung mit dem Vektor (x_1 x_2 x_3) in Verbindung zu bringen:

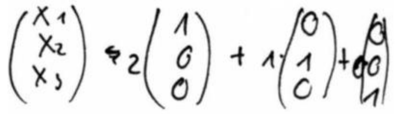

Abb. 3: Ninas Interpretation der Mengenbeschreibung

Sie setzt hier für x_1, x_2, x_3 die Standardbasisvektoren ein und interpretiert dabei das Nichtauftreten von x_3 in der Bedingung als „$0 \cdot x_3$".

4. Konsequenzen

Es wurden zwei Hauptursachen für Ninas Probleme herausgearbeitet – die fehlerhafte Strategie und die Fehlinterpretation der Mengenbeschreibung. Es stellt sich nun die Frage, welche Hilfestellungen man Studierenden mit solchen Schwierigkeiten anbieten kann. Strategien zu typischen Beweisen werden in den Vorlesungen und Übungen meist nur verbal vermittelt. Da das Tempo dieser Mathematikveranstaltungen häufig recht hoch ist, nehmen viele Studierende diese nützlichen Hinweise oft nicht wahr. Eine Möglichkeit, diesem Problem Abhilfe zu schaffen, wäre das schriftliche Formulieren solcher Strategien. Im Projekt *Mathematik besser verstehen* der Universität Duisburg-Essen wird dies mit ausführlichen Musterlösungen versucht (vgl. Ableitinger & Herrmann 2011).

Ninas zweite Fehlerquelle ließe sich eventuell durch ein abgewandeltes Aufgabenformat abmildern. Beweisaufgaben in der Mathematik sind meist prägnant formuliert und liefern nur selten Hinweise für eine geeignete Herangehensweise. Experten machen sich mit solchen Beweisen vertraut, indem sie sich anschauen, welche Art von Objekten durch die Symbole dargestellt werden. Außerdem erinnern sie sich häufig auch an ähnliche Situationen, in denen in spezieller Art und Weise mit diesen Objekten umgegangen wurde. Diese (oft unterbewusst) ablaufenden Prozesse helfen den Experten, ein Gespür für die Situation zu entwickeln. Viele Studierende dagegen gehen an solche Aufgaben heran, ohne sich vorher mit den Objekten zu beschäftigen. Um diese Arbeitshaltung zu ändern, könnte man Teilaufgaben formulieren, die genau dies fordern. Diese könnten zum Beispiel eine Verbalisierung der Mengenbeschreibung, die Angabe von Beispielelementen aus der Menge, das Überprüfen gegebener Elemente auf Enthaltensein in der Menge, etc. verlangen.

Es erscheint meines Erachtens lohnenswert zu sein, weitere Fehlerquellen beim Bearbeiten solcher Beweisaufgaben zu lokalisieren, um Studierenden geeignete Unterstützungen anzubieten.

Literatur

Ableitinger, Ch., Herrmann, A. (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 14, Issue 3, 24-35.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2010): Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 52, Heft 33, 25-29.