Thomas JANSSEN, Bremen

Ausbildung algebraischen Struktursinns im alltäglichen Klassenunterricht

Schon Malle (1993) bemängelte, dass viele Schülerinnen und Schüler ausschließlich kalkülhaft mit Termen und Gleichungen umgehen, die dahinter stehenden Strukturen aber nicht erkennen. Ausdrücklich fordern Arcavi (1994, 2005) die Entwicklung eines *Symbol Sense*, Linchevski und Livneh (1999) einen stärker ausgebildeten *Structure Sense*. Diesen letztgenannten Begriff definiert schließlich Hoch (2007) als dreistufige Kompetenz. In Tests stellt sie nochmals die zuvor allgemein bemängelten Defizite fest, zeigt aber auch, dass sich durch individuelle Förderung eine nachhaltige Verbesserung erreichen lässt. Offen bleibt jedoch, wie ein solcher Lernprozess im alltäglichen Klassenunterricht stattfindet und wie er unterstützt werden kann. Gesucht sind also eine Beschreibung der Entwicklung algebraischen Struktursinns und eine Eingrenzung der relevanten Einflussfaktoren, insbesondere der Rolle des *Struktursehens* (vgl. Bikner-Ahsbahs 2005). Am Ende sollen Vorschläge für Unterricht stehen, der diesen Prozess unterstützen kann.

1. Theoretischer Hintergrund: Kulturhistorische Tätigkeitstheorie

Diese Aufgabenstellung erfordert einen theoretischen Rahmen, der eine dynamische Beschreibung zulässt. Ein solcher findet sich in der *Kulturhistorischen Tätigkeitstheorie*, wie Leontjew (1982) sie darlegt. Danach wird Tätigkeit von einem bestimmten Motiv geleitet, das sich auf einen Gegenstand bezieht. Werden dabei bestimmte Ziele verfolgt, so spricht man von Handlungen. Durch Tätigkeit entwickelt sich die Persönlichkeit des Subjekts – es findet also Lernen durch Tätigkeit und für weitere Tätigkeit statt. Roth und Radford (2011) machen diese Perspektive für die Mathematikdidaktik nutzbar. Sie beschreiben, wie sich Schülerinnen und Schüler in mathematischen Tätigkeiten Motive erschließen (Objectification) und wie sich dabei ihre Persönlichkeit entwickelt (Subjectification).

Mit dieser Basis lässt sich *Algebraischer Struktursinn* hypothetisch als die sich in Handlungen zeigende und durch Tätigkeit sich entwickelnde Persönlichkeitsstruktur beschreiben, die dem Subjekt einen bestimmten Blick auf algebraische Strukturen (Terme und Gleichungen) und den Umgang mit ihnen ermöglicht. Es geht dabei nicht in erster Linie um algorithmisches Umformen, sondern darum, besondere Eigenschaften der Struktur zu erkennen und zu nutzen.

2. Methodisches Vorgehen

Die Verschränkung von Theorie und Praxis wird in einer Designstudie erfasst. Deren Zweck ist nach Cobb et al. (2003, 9 f.) „(…) to develop a class of theories about both the process of learning and the means that are designed to support that learning. (…) The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them“.

Konkret wird im Rahmen der laufenden Studie der Mathematikunterricht einer 8. Oberschul-Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern über etwa ein halbes Jahr in den Unterrichtseinheiten begleitet, in denen algebraische Strukturen eine Rolle spielen. Die Unterrichtsplanung unterliegt insgesamt der oben beschriebenen Vorstellung des sich entwickelnden Struktursinns: Das Tätigkeitsmotiv soll in der Verfolgung von Handlungszielen angeregt werden.

Die erste abgeschlossene Unterrichtseinheit war in zwei Teile unterteilt; auf den ersten beziehen sich die hier vorgestellten Analysen. Bevor im zweiten Teil durch den aktiven Nachvollzug von Musterlösungen lineare Gleichungen als Problemlösewerkzeuge eingeführt wurden, wurde im ersten Teil viel Zeit in das Erkunden von Gleichungen investiert. Dazu wurden die linearen Gleichungen anhand von Streichholzschachtelgleichungen (vgl. Affolter et al. 2003) motiviert und anschließend formalisiert.

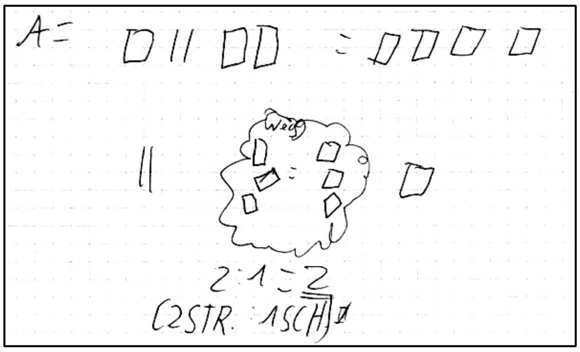
Erhoben wurden Videodaten sowie Unterrichtsdokumente: Schüleraufzeichnungen, Poster, Tafelbilder und -collagen, Klassenarbeiten. Dazu kommen Beobachtungsprotokolle sowie die Dokumentation der Unterrichtsplanung. Diese findet aufbauend auf iterativen Analysen in fortlaufenden Beratungen mit der Lehrerin statt. Dabei werden folgende Fragen zunächst anhand des schriftlich vorliegenden Materials behandelt: Wie lassen sich die Handlungen und Tätigkeiten situationsübergreifend beschreiben? Wo und in welcher Weise drückt sich (die Entwicklung von) Struktursinn aus? Welche prinzipiellen Eigenschaften des Designs und seiner Implementierung spielten dabei welche Rolle und was bedeutet das für den Fortgang der Intervention? Außerdem wurde auf klassenspezifische Aufgabenstellungen geachtet, die im weiteren Verlauf zu beachten wären, sie sind aber nicht Gegenstand dieser Darstellung.

3. Ziele und Motive in den Schüleraufzeichnungen

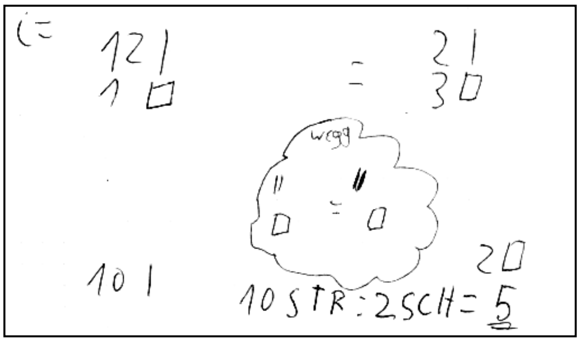
In ihren Aufzeichnungen zeigen die meisten Schülerinnen und Schüler eine ausgeprägte Zielbezogenheit im Umgang mit den (Streicholzschachtel-) gleichungen. Sie wählen zahlreiche unterschiedliche Darstellungsformen (ikonisch, symbolisch, alltagssprachlich), die deutlich in ihrer Explizitheit, Stabilität und Nachvollziehbarkeit für andere variieren.

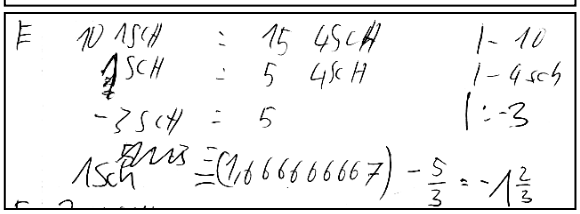
Explizit und für andere gut nachvollziehbar werden Ziele kommuniziert, wenn sie in Worten notiert werden. Dabei zeigt sich, dass bestimmte Begriffe immer wieder bei unterschiedlichen Schülerinnen und Schülern auftreten. Sie machen deutlich, dass sie „überall“ beziehungsweise präziser „auf beiden Seiten“ „gleich (viel)“ manipulieren und markieren ihre Ziele durch Schlüsselwörter wie „bis“, „damit“, „am Ende“ oder „so dass“. Teilweise wird auch rückwirkend begründet, die Schlüsselwörter lauten dann „deswegen“, „also“ oder „weil“. Eine besondere Rolle spielte das Wort „wegnehmen“. Während dies im Umgang mit den Streichhölzern tatsächlich noch die zielführende Handlung war, ist der Begriff im mathematischen Umgang mit mathematischen Gleichungen metaphorisch zu verstehen. Eine solche Metapher stützt bestimmte Vorstellungen, die sich im Handeln als zielführend erwiesen haben (vgl. Lakoff & Johnsen 2004).

In Diagrammen werden Ziele wesentlich impliziter und uneinheitlicher dargestellt. Die besonders kreative Illustration eines Schülers ist neben dem Text abgebildet. Die Streichhölzer und Schachteln, die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auftreten, verschwinden in einer Wolke um das Gleichheitszeichen. Der Schüler betont so das Ziel, die Gleichheit zu erhalten, indem auf beiden Seiten gleich viel weggenommen wird. Die Angabe beziehungsweise Illustration von Zielen strukturiert den Arbeitsprozess und verweist auf die strukturellen Merkmale der Situation, die genutzt werden.



Die Darstellung ist auch deshalb interessant, weil sie Ausgangspunkt zur Entwicklung eines Motivs ist, das die Tätigkeit des Umgangs mit linearen Gleichungen auszeichnet (rechts). Der Schüler fasst im weiteren Prozess Schachteln und Streichhölzer zusammen und bereitet so eine Schreibweise vor, die der historisch entwickelten, in der Algebra üblichen Notation schon sehr nahe kommt.





Die Betrachtung von Handlungszielen und der darauf aufbauenden Entwicklung eines Motivs bringt also eine zunehmende und sich festigende Aufmerksamkeit gegenüber algebraischen Strukturen zu Tage, die sich als eine Ausbildung algebraischen Struktursinns deuten lässt, auch wenn eine nähere Betrachtung der individuellen Prozesse noch aussteht.

4. Ausblick

Nach der ersten Phase der Designstudie lässt sich festhalten, dass man eine Vielfalt von möglichen Handlungszielen als Ausgangspunkte einer Entwicklung algebraischen Struktursinns zulassen sollte. Zur Vorbereitung der kulturell entwickelten algebraischen Tätigkeit ist es dabei von Vorteil, von Anfang an eine bewusste, explizite Sprache herauszufordern, insbesondere können Metaphern und Schlüsselwörter hilfreiche Handlungen festigen. Wenn es so gelingt, Prozesse wie die hier vorgestellten zu wiederholen, ist die Basis für eine eingehendere Untersuchung der Ausbildung algebraischen Struktursinns gelegt.

Literatur

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B. und Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern: Schulverlag blmv & Zug: Klett und Balmer.

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 14 (3), S. 24–35.

Arcavi, A. (2005): Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 25 (2), S. 42–47.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. und Schauble, L. (2003): Design Experiments in Educational Research. In: Educational Researcher 32 (1), S. 9-13.

Hoch, M. (2007): Structure Sense in High School Algebra. Unveröffentlichte Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Lakoff, G. und Johnsen, M. (2004): Leben in Metaphern. Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern. Heidelberg: Carl-Auer-Systeme.

Leontjew, A. N. (1982). Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein.

Linchevski, L. und Livneh, D. (1999): Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. In: Educational Studies in Mathematics 40, S. 173–196.

Roth, W.-M. und Radford, L. (2011): A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning. Rotterdam u.a.: Sense Publishers.