Rainer KAENDERS, Köln

Perspektivwechsel bei der Begriffsentwicklung in der Analysis

Die modernen digitalen Möglichkeiten im Bereich der Analysis erfordern neue Antworten auf alte epistemologische Probleme. So wurde etwa die jahrzehntelang im Mathematikunterricht praktizierte Kurvendiskussion häufig dadurch motiviert, den Verlauf eines Graphen einer Funktion zu untersuchen. Für viele Mathematiklehrer bot sie außerdem eine willkommene Gelegenheit, Begriffsentwicklung im Bereich der Analysis zu initiieren und voranzutreiben. Nun, da die Motivation für diese Übung durch digitale Hilfsmittel obsolet geworden ist, benötigen wir neue Anlässe zur Entwicklung mathematischer Begrifflichkeiten, die sich an den mathematischen Objekten und nicht an deren Darstellung orientieren.

Ein Perspektivwechsel bietet die Möglichkeit, mathematische Begriffe losgelöst von der jeweiligen (graphischen) Darstellung weiter zu entwickeln.

1. Probleme der Identifikation von Funktionen mit ihren Graphen

Zum Beispiel wird ein Begriff wie *Monotonie* in den meisten Schulbüchern mit dem nach oben bzw. nach unten gerichteten Verlauf eines kartesischen Graphen assoziiert. Eine von der graphischen Darstellung unabhängige Definition kommt zusehends weniger vor. Auch eine Definition, wie etwa

Defintion: x_0 heißt *Maximum* einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in [a,b]$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.

kommt in heutigen deutschen Schulbüchern zwar noch vor, wird jedoch nur noch selten zur Überprüfung einer entsprechenden Behauptung verwandt. Solche Definitionen werden häufig als *formal* bezeichnet, doch beschreibt dies ihren Charakter nur sehr unzureichend. Es handelt sich hier vor allem um Definitionen, die von der Funktion f selbst und nicht von der Wahl einer speziellen Darstellung dieser Funktion abhängen. Damit sind diese Definitionen auch mathematisch sehr viel tiefer und nützlicher als die Vorstellung von nach oben/unten gerichteten Graphen oder von Funktionsgraphen mit einer Art *Hügel*. Die größere Tiefe zeigt sich etwa darin, dass diese Definitionen direkt verallgemeinerbar sind, wie etwa auf allgemeine Funktionale oder auf den Begriff *Zufallsvariable*.

Die Identifikation von Funktionen mit ihren Graphen führt zu begrifflich problematischen Konstrukten, wie der Definition der Ableitung mithilfe der Tangenten und der Definition der Tangente mithilfe der Ableitung (z.B. in Elemente der Mathematik). Auch die begrifflich zentrale Rolle des Mittelwertsatzes oder die des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung kommen durch die suggestive Kraft der kartesischen Graphen nicht zu ihrem Recht.

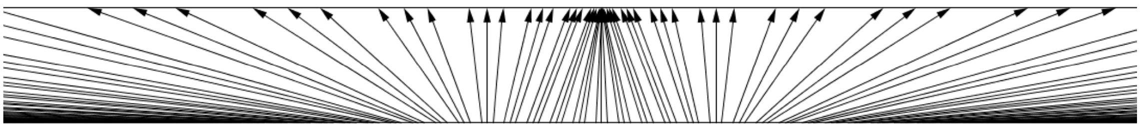
2. Perspektivwechsel durch Nomogramme

Schon Freudenthal (1978) und viele andere haben auf die Bedeutung des Perspektivwechsels für die Begriffsentwicklung hingewiesen. Sie ist fester Bestandteil jeder mathematischen Aktivität.

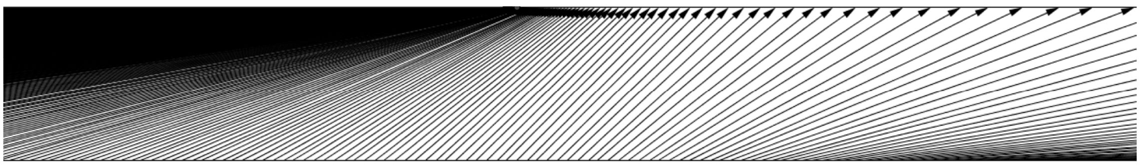
Was den Funktionsbegriff betrifft, so gab es zunächst klassische Kurven wie die Kegelschnitte, Konchoiden, Kissoiden und viele andere. Descartes hat gezeigt, wie solche Kurven Abhängigkeiten zwischen Koordinaten von Punkten bestimmen. Heute drehen wir dies um: zu einer Abhängigkeit von Koordinaten, d.h. einer Funktion, suchen wir eine entsprechende Kurve.

Nomogramme bilden eine alternative Möglichkeit, Funktionen darzustellen: Wir zeichnen zwei parallele Zahlenstrahlen in die Ebene, eine *Definitionsgerade* und eine *Wertegerade* – beide mit gleicher Skalierung, so dass sich die Nullpunkte gegenüber liegen. Nun verbinden wir einen Punkt auf der Definitionsgeraden, der durch eine Zahl x repräsentiert wird, mit dem Punkt zu $f(x)$ auf der Wertegeraden durch einen Pfeil von x nach $f(x)$. Dies tun wir für viele äquidistante Punkte x und erhalten ein *Nomogramm*. Diese einfache Idee für Nomogramme findet sich schon bei Spivak (1967) und Van Dormolen (1978) ohne, dass auf die Eigenschaften dieser Darstellung eingegangen wird. Erst seit es Software wie GeoGebra gibt, können solche Darstellungen breit und intensiv im Unterricht eingesetzt werden. Für eine ausführlichere Darstellung verweisen wir auf (Kaenders, 2011).

Zum Beispiel hat die Funktion $x \to x^3$ die Gestalt

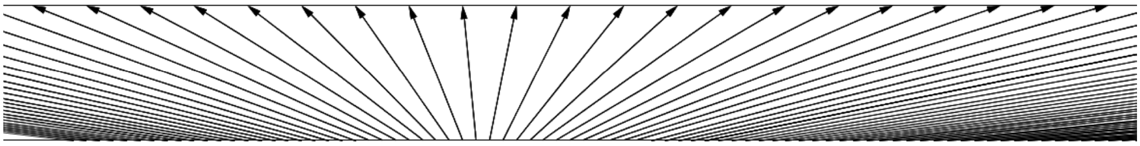


und die Funktion $x \to e^x$ hat das Nomogramm:

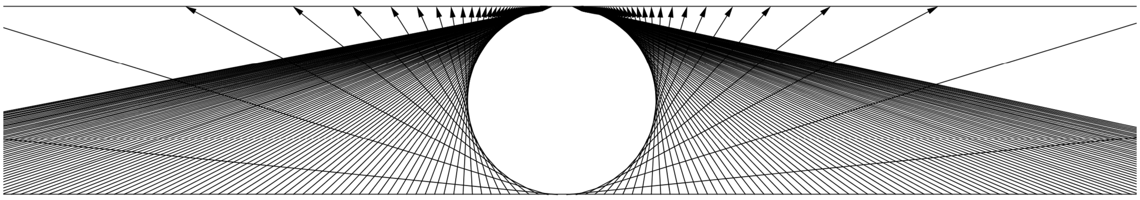


3. Eigenschaften von Nomogrammen

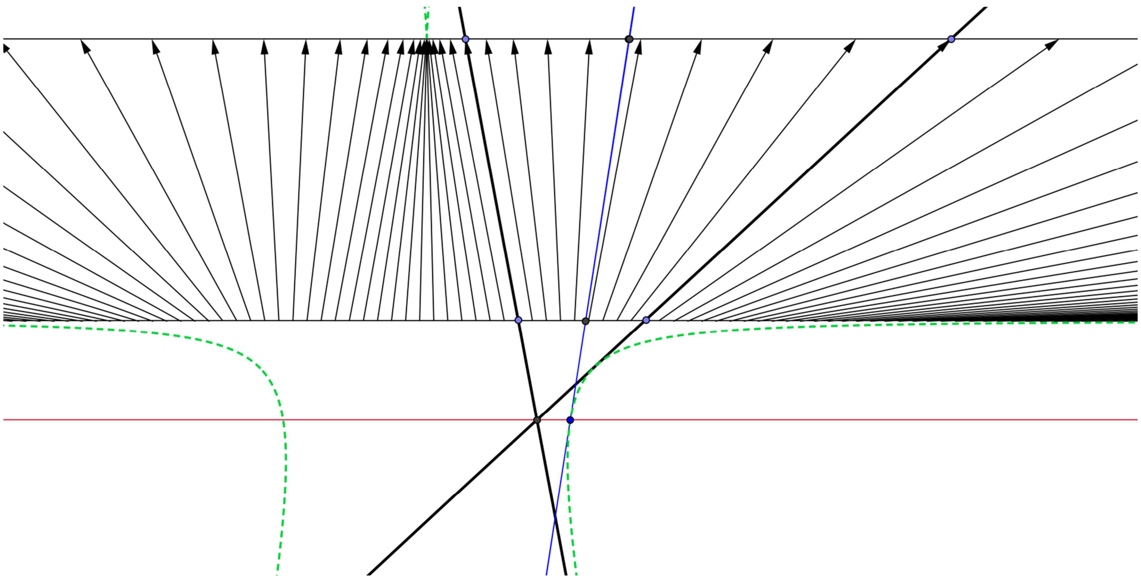
Nomogramme geben Anlass zu Perspektivwechsel: Vertraute Begriffe wie *Nullstelle*, *a-Stelle*, *Definitheit*, *Monotonie*, *Maß der Steigung*, *Übereinstimmung zweier Funktionen an einer Stelle*, … müssen neu interpretiert werden. Dabei gibt es viele Verbindungen zu geometrischen Fragestellungen. Eine erste natürliche Frage ist die nach der Gestalt linearer (eigentlich *affiner*) Abbildungen $y=mx+b$. Es stellt sich heraus, dass dies solche Nomogramme sind, deren verlängerte Pfeile entweder alle parallel verlaufen oder sich alle in einem Punkt schneiden. Damit wird eine lineare Abbildung durch einen einzigen Punkt in der Ebene charakterisiert.



Auf ganz natürliche Weise stellt sich nun auch die Frage der *linearen Approximation* einer Funktion dar: Betrachten wir zwei Stellen einer Funktion f, dann findet sich der charakteristische Punkt der linearen Funktion, deren Funktionswerte an den beiden Stellen mit denen von f übereinstimmen, als der Schnittpunkt der entsprechend verlängerten Pfeile an den beiden Stellen. Damit können wir Sekanten konstruieren. Die lineare Approximation der Funktion an einer Stelle finden wir nun als Grenzwert der Schnittpunkte zweier solcher Geraden. Insgesamt können wir die Hüllkurve all dieser Geraden als *Ableitungskurve* auffassen.



Oben das Nomogramm der Funktion $x \to \frac{1}{x}$, deren *Ableitung* ein Kreis ist.



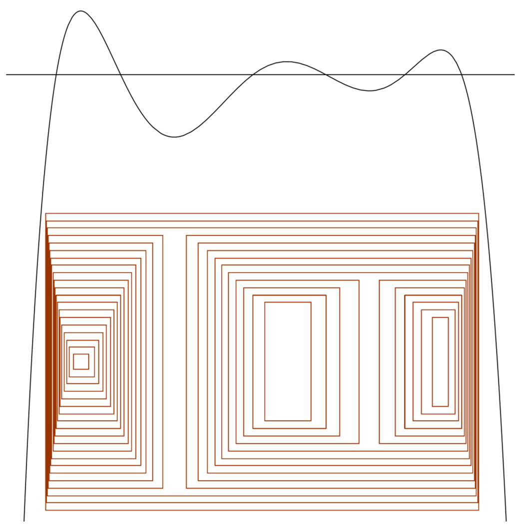
Hier oben sehen wir die typische Figur zum Mittelwertsatz als Nomogramm. Wir überlassen es dem Leser die Darstellung zu entschlüsseln.

Nomogramme erlauben es, einfache mengentheoretische Abbildungseigenschaften wie Injektivität und Surjektivität direkt zu erkennen. Des Weiteren geben sie eine einfache Visualisierung der Komposition zweier Funktionen (aufeinanderlegen und Pfeile addieren) wie auch der Darstellung der Inversen (Nomogramm umklappen). Iterationen sind durch Aufeinanderstapelungen von Nomogrammen darstellbar. Zudem können *Involutionen*, d.h. f mit $f \circ f = id$, wie $x \to \frac{1}{x}$ oder $x \to -x$ oder Projektionen, d.h. p mit $p \circ p = p$, wie $x \to \lfloor x \rfloor$ oder $x \to \mathrm{FRAC}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ leicht charakterisiert werden.

Insgesamt stellen Nomogramme einen Perspektivwechsel auf den abstrakten Funktionsbegriff dar und geben Gelegenheit zu entdeckendem Lernen. Sie ermöglichen eine Vorbereitung auf den allgemeinen Abbildungsbegriff, eine Vernetzung von Analysis und Geometrie sowie auch von Analysis und linearer Algebra und bereiten auf die alternative Darstellung von Daten vor.

4. Begriffsentwicklung durch Perspektivwechsel

Es gibt weitere Perspektivwechsel bei der Beschäftigung mit reellen Funktionen. Eine weitere Herangehensweise besteht im Einsatz von Höhenliniendiagrammen (vgl. Kaenders, 2011, S. 160 ff.). Eines der Beispiele dort sind Diagramme, wie wir sie hier rechts finden, die *Tobleronediagramm* genannt werden und deren Entschlüsselung wir ebenfalls dem Leser überlassen.



Auch kann man Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem mit anderen (etwa logarithmischen) Skalen, mit Hilfe von Spiralen, Maschinchen oder Pfeilketten darstellen.

Jeder dieser Perspektivwechsel trägt dazu bei, dass der mathematische Begriff der Funktion mit seinen abstrakten Eigenschaften in den Blick genommen und entwickelt werden kann.

Literatur

Freudenthal, H. (1978): Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, Mathematik – Didaktik und Unterrichtspraxis. München, Wien: Oldenbourg.

Kaenders, R. (2011): Funktionen kann man nicht sehen. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg-Teubner.

Spivak, M. (1967): Calculus. Berkeley: Publish or Perish Inc.

Van Dormolen, J. (1978): Didaktik der Mathematik. Wiesbaden: Vieweg Verlag.