

Katja KRÜGER, Paderborn

Die Kreisinverson in den Kreislimit-Graphiken von Escher – Verstehen durch Beweisen fördern

Zum selbstständigen Experimentieren und Erkunden fordern die Kreislimit-Graphiken von Escher in besonderer Weise heraus. Mit ihnen versuchte der Künstler, sein graphisches Werk zur regelmäßigen Flächenaufteilung (Parkettierungen) weiter zu vollenden: Wie lässt sich Unendlichkeit in Form der Wiederholung eines Motivs innerhalb einer begrenzten Fläche graphisch darstellen?

Im berühmten Holzschnitt-Druck „Himmel und Hölle“ (1960) wird im Folgenden nach dem zentralen Gestaltungsmuster gesucht. Entdeckung eines Beweismotivs und Erleben der Erklärungsfunktion von Beweisen stehen im Vordergrund. Dabei tritt ein Konstruktionsproblem auf, das sich für die Bearbeitung durch Lehramtsstudierende sehr gut eignet, weil sich das Finden einer Beweisidee, das Führen eines Beweises und dessen (hier künstlerische) Aufklärungswirkung im Zusammenhang mit eigenen Entdeckungen und Vermutungen entwickeln. Der Schlüssel ist die Kreisinverson. Sie ist – trotz weitreichender Vernetzungen – Lehramtsstudierenden gewöhnlich nicht (mehr) bekannt. So gibt es in diesem Themenbereich auch mathematisch Neues und durchaus weitreichend Anwendbares zu entdecken.

1. Untersuchung des Aufbaus der Graphik „Himmel und Hölle“

Welches Strukturmuster liegt hier zugrunde?

Schnell lassen sich drei Symmetrieachsen und im Zentrum der Graphik ein regelmäßiges Sechseck ausmachen. Die „Bausteine“ Engel und Teufel der Kreislimit-Graphik wiederholen sich und werden dabei zum Rand der kreisförmigen Begrenzung hin immer kleiner. Für genauere Untersuchungen bieten sich Experimente mit einer DGS an. Dazu wird die Graphik als Hintergrundbild geladen und ihr Aufbau mit Hilfe geometrischer Konstruktionen genauer erfasst.

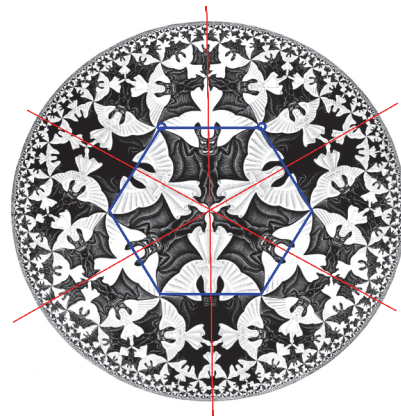


Abb. 1

Kreislmit IV

Betrachtet man etwa die Punkte, an denen sich die Flügel von Engeln und Teufeln treffen, so kann man experimentell zu der Vermutung gelangen, dass diese „Flügelpunkte“ auf Kreisbögen liegen. Eine Besonderheit dieser Kreisbögen ist es, dass sie den Kreisrand der Graphik orthogonal schneiden (vgl. Abb. 2).

Zum Verständnis des Strukturmusters helfen somit „Orthogonalkreise“ weiter. Man wird die Rekonstruktion wohl am besten innen beginnen, indem man zu je zwei Flügelpunkten von Teufeln oder Engeln den Orthogonalkreis zum umgebenden Kreis(rand) der Graphik sucht.

Aber wie konstruiert man einen Orthogonalkreis k^* durch zwei Punkte A und B im Inneren eines Kreises k , der diesen orthogonal schneidet?

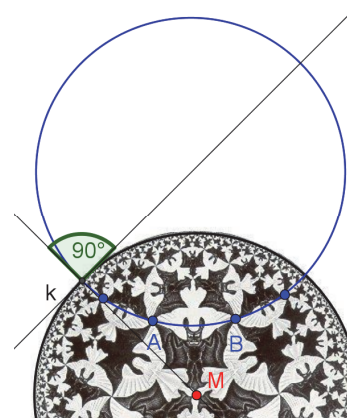


Abb. 2

2. Konstruktion von Orthogonalkreisen – experimentelle Teillösungen

Zunächst einmal muss der Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises k^* auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen. Wo aber genau? Die Bedingung des senkrechten Schneidens der Kreise führt nicht sofort weiter. Bedienen wir uns einer oft nützlichen Strategie beim Problemlösen: das Weglassen einer Bedingung mit anschließender Variation der Teillösung. Unser Problem wird vereinfacht, indem wir nur noch einen Punkt A im Inneren eines Kreises k betrachten und nach allen Orthogonalkreisen k^* zu A und k suchen, die den Ausgangskreis k senkrecht schneiden. Um einen solchen Orthogonalkreis k^* zu finden, wähle man einen – zunächst – beliebigen Punkt S auf k und konstruiere den Orthogonalkreis k^* zu k durch A und S wie folgt: Der Mittelpunkt M^* von k^* ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m zur Strecke AS mit der Tangente t im Punkt S an k .

Anschließend lässt sich diese Einzellösung des Teilproblems mithilfe der DGS bequem verallgemeinern, indem man S auf dem Kreis variiert und die Ortslinie der Mittelpunkte M^* aller entstehenden Orthogonalkreise aufzeichnet (Abb. 3). Ziehen an S erzeugt anscheinend eine Gerade, auf der alle Mittelpunkte M^* der Orthogonalkreise k^* liegen.

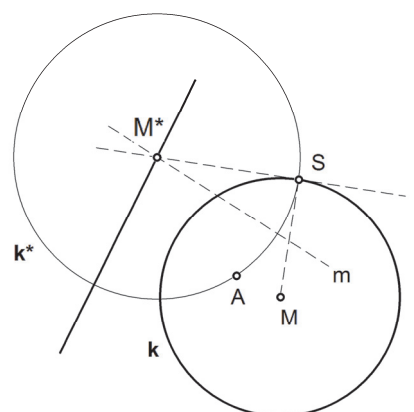


Abb. 3

3. Verstehen durch Beweisen

Um zu beweisen, dass die Ortslinie der Orthogonalkreismitten M^* eine Gerade bildet, könnte man einen analytischen Beweis führen, indem man die Konstruktion aus Abb. 3 in ein geeignetes Koordinatensystem einbettet und

die x- und y- Koordinaten der Mittelpunkte M^* berechnet. Diese erfüllen dann eine Geradengleichung. Dieser Beweis ist ganz elementar und so „straightforward“, dass er hier nicht wiedergegeben werden muss. Mehr Einsicht bringen wohl auch die folgenden beiden elementargeometrischen Beweise, einer für „Anfänger“, der andere für „Kenner“.

Wo bekommt man eine Beweisidee? Nun, die fragliche Gerade soll ja alle Orthogonalkreise zu A und k einfangen. Zeichnen wir also ein paar davon.

In Abb. 4 fällt auf, dass die verschiedenen Orthogonalkreise anscheinend außer dem Punkt A noch einen weiteren Punkt A^* gemeinsam haben. Und A^* liegt offenbar auf der Geraden $g(M,A)$. Wenn die Vermutung stimmt, dass alle Orthogonalkreise zu k durch A den Punkt A^* enthalten, dann müssen deren Mitten auf der Mittelsenkrechten von AA^* und damit auf einer Geraden liegen.

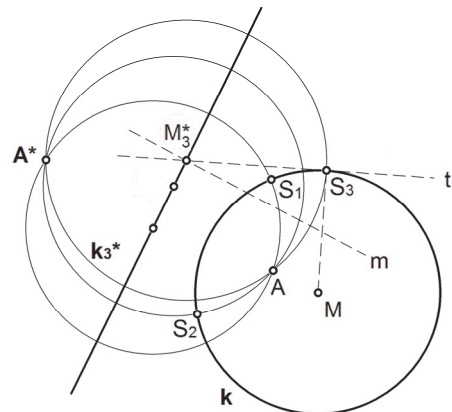


Abb. 4

Wie lässt sich nun beweisen, dass der eben entdeckte Punkt A^* tatsächlich allen Orthogonalkreisen zu k durch A gemein ist?

Wir nehmen dazu A^* genauer in den Blick und konstruieren ihn entsprechend unserer Beobachtung: Es wird zunächst ein beliebiger Orthogonalkreis k^* zu k durch A konstruiert. Anschließend erhält man A^* als Schnittpunkt der Geraden $g(M,A)$ mit diesem Orthogonalkreis k^* (vgl. Abb. 5). Nun müssen wir nur noch zeigen, dass A^* gar nicht von der Wahl des Orthogonalkreises k^* abhängt. Das ist der Fall, wenn der Abstand von A^* zu M konstant ist.

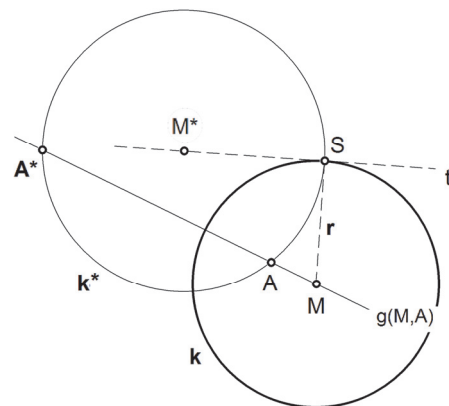


Abb. 5

Das lässt sich recht aufwändig durch mehrfache Verwendung des Satzes von Pythagoras sichern (z.B. hilft dabei die Hilfslinie MM^*). Als Ergebnis erhält man schließlich den folgenden Zusammenhang

$$|A^*M| \cdot |AM| = r^2.$$

„Kennerinnen“ und „Kenner“ können diese Gleichung direkt als Umschreibung des Sehnen-Tangenten-Satzes „sehen“. Radius r und AM sind

konstant. Also muss auch der Abstand von A^* zu M konstant sein. Damit ist gezeigt, dass alle Orthogonalkreise zu k und A auch A^* enthalten.

Der Beweis hat zugleich einen bemerkenswerten neuen Punkt A^* hervorgehoben, der in besonderer Weise mit dem Ausgangskreis k und dem Punkt A im Kreisinneren zusammenhängt: Man nennt A^* den Bildpunkt von A unter der Kreisinverson an k . Und mit dieser Entdeckung gelingt schließlich die Lösung unseres Ausgangsproblems. Um den Orthogonalkreis k^* durch die Punkte A und B im Inneren eines Kreises k zu konstruieren, führt man die Kreisinverson von A an k durch und erhält so den Bildpunkt A^* . Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechten der Strecken AA^* und AB . Deren Schnitt liefert den Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises.

4. Rückblick und Ausblick

In Eschers „Himmel und Hölle“ erzeugt die Kreisinverson das Strukturmuster. In Abb. 6 ist ein Orthogonalkreis durch zwei Flügelpunkte von Teufeln konstruiert worden. Die „Bausteine“ der Graphik sind durch Kreisbögen begrenzte Dreiecke, die abwechselnd Engel und Teufel enthalten und durch die Kreisinverson nach außen hin verkleinert abgebildet werden.

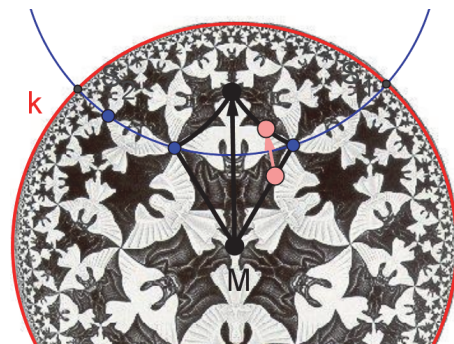


Abb. 6

Escher wurde bei der künstlerischen Umsetzung seiner Kreislimit-Graphiken von einer Abbildung zur Parkettierung der hyperbolischen Ebene im Poincare-Modell inspiriert, auf die er in einer Abhandlung des großen Geometers Harold Coxeter gestoßen war. Die Kreisinverson spielt in diesem Modell eine grundlegende Rolle. Sie sorgt für das Einfangen des „immer so weiter“ im begrenzten Bildrahmen.

Zudem bietet das Thema Kreisinverson auch noch mancherlei Beziehungen zu anderen, „handfesteren“ und gewichtigen Anwendungen, so dass Lehramtsstudierende zum Weiterfragen und zu eigenständigen Forschungen angeregt werden können. (Vgl. etwa das Buch von Schmidt 1950)

Literatur und Bildquelle

Abb. 1, 2 und 6: M.C. Escher's „Circle Limit IV“ ©2012 The M.C.Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com

Ernst, B. (1986): Der Zauberspiegel des M.C. Escher. Berlin, Taco Verlag, S. 102-111.

Herfort, P. (1999): The Geometry of Escher's Circle-Limit-Woodcuts, ZDM 5, 144-148

Schmidt, H. (1950): Die Inversion und ihre Anwendungen. München, Oldenbourg.