

Anke LINDMEIER, Kristina REISS, Petra BARCHFELD, Beate SODIAN

## **Mit welcher Karte gewinne ich eher? Fähigkeiten zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten in den Jahrgangsstufen 4 und 6<sup>1</sup>**

Stochastik hat in der Vergangenheit zwar eine kleinere Rolle im Curriculum der Primarstufe gespielt, mit den Bildungsstandards (KMK, 2004) hat sie als Leitidee „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ aber an Bedeutung gewonnen. Allerdings liegen nur begrenzt und unsystematisch Erkenntnisse über die Fähigkeiten der Kinder in dem Bereich vor. Theoretische Kompetenzmodelle liefern eine Basis, um empirische einordnen zu können (Reiss & Winkelmann, 2009). Eine Basisfähigkeit ist z.B. die Differenzierung zwischen sicheren, möglichen und unmöglichen Ereignissen. Kinder der 2. Jahrgangsstufe konnten in einer Studie zwischen sicheren und möglichen (nicht sicheren) Ereignissen gut differenzieren, allerdings fiel ihnen die Unterscheidung zwischen unmöglichen und unwahrscheinlichen Ereignissen noch schwer. Die Vierfeldertafelanalyse ist eine beispielhafte komplexe Anforderung, die in der 2. Jahrgangsstufe nur in einfachen Fällen verstanden wird (Lindmeier et al., 2011).

### **1. Vergleich von Wahrscheinlichkeiten**

Um die Fähigkeiten von Kindern in einem Bereich mittleren Anforderungsgrads einschätzen zu können, wurden Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich entwickelt. Fehlvorstellungen dazu sind beschrieben (Fischbein & Schnarch, 1997). So werden Unterereignisse nicht als solche erkannt (*conjunction fallacy*). Allerdings kann dabei eine Rolle spielen, welche Ereignisse besser vorstellbar sind (Fiedler, 1988). Außerdem werden Ereignisse, die der Grundpopulation ähneln, als wahrscheinlicher angesehen als unrepräsentativ wirkende Ereignisse (*misconception of representativeness*). Zudem werden Schwierigkeiten im Umgang mit zusammengesetzten Ereignissen beschrieben (*compound and simple events*).

### **2. Forschungsfragen**

Die berichtete Untersuchung bezieht sich auf folgende Fragen: Über welche Fähigkeiten zum Wahrscheinlichkeitsvergleich verfügen Kinder der Jahrgangsstufen 2 und 4 in einem formalen Kontext? Zeigen sich dabei bekannte Fehlvorstellungen?

---

<sup>1</sup> Die Untersuchung wurde im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Wissenschaft und Öffentlichkeit* im Projekt *Die Entwicklung der Fähigkeit zum Umgang mit fragiler und konfligierender wissenschaftlicher Evidenz im Grundschulalter* durchgeführt.

### 3. Design der Studie und Stichprobe

Bei Studien im Primarbereich sind besondere Erhebungsbedingungen zu beachten. Es bietet sich die Interviewform an, da dabei in altersadäquaten, spielähnlichen Kontexten die Fähigkeiten unabhängig von Lesekenntnissen erfasst werden können. Zudem kann in Grundschulalter nicht von einer standardisierten Sprache im Bereich Stochastik ausgegangen werden. Deshalb wurde darauf verzichtet, fachsprachliche Begriffe wie *Wahrscheinlichkeit* oder *sicheres Ereignis* zu verwenden.

Zur Erfassung der Fähigkeiten wurde ein Glücksspiel simuliert. Grundlage war ein Beutel mit 15 blauen (B) und 10 roten (R) Steinen, aus dem mit Zurücklegen gezogen wurde. Auf Karten wurden Ereignisse präsentiert, so dass mit der Karte R/B gewann, wer in zwei Zügen zuerst einen roten und dann einen blauen Stein zog. Mit der Frage „*Was glaubst du, welche Karte ist die bessere? Mit welcher gewinnst du eher?*“ wurden die Kinder aufgefordert, die Gewinnwahrscheinlichkeiten zweier Karten zu vergleichen. Die Karten konnten dabei entweder zwei Züge oder einen Zug erfordern, wobei ein grauer Symbolstein (G) für das Teilereignis „ein roter oder ein blauer Stein wird gezogen“ stand. Acht verschiedene Paare (Tab. 1) wurden mit den Kindern bearbeitet. Zusätzlich zur Identifizierung der besseren Karte wurde eine Begründung für die Entscheidung eingefordert.

Insgesamt nahmen an der berichteten explorativen Untersuchung  $N = 40$  (19 weiblich) Kinder teil, davon  $n = 17$  (8 weiblich) aus der Jahrgangsstufe 4 sowie  $n = 23$  (11 weiblich) aus der Jahrgangsstufe 6 einer Realschule.

### 3. Ergebnisse

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Ratewahrscheinlichkeit der Aufgaben beträgt 50%, so dass erst eine signifikante Abweichung der Lösungsrate von 0,5 als Fähigkeit der Kinder gewertet werden kann. Dies trifft bei zwei Aufgaben nicht zu. Der Vergleich der beiden Elementarereignisse B gegen R (Aufgabe WV 1) wurde sehr gut gelöst, was darauf hinweist, dass das Aufgabenformat von den Kindern verstanden wurde. Die Aufgabe R gegen B/B (WV 7) wurde nicht überzufällig gut gelöst, was den Erwartungen entspricht, da der Vergleich dieser Karten nicht mit elementaren Mitteln geleistet werden kann. Die Lösungsraten der beiden Aufgaben WV 6 und WV 3 können Aufschluss darüber geben, ob die Kinder eine Repräsentativitätsfehlvorstellung haben, wobei diese je nach Vergleichskarte erleichternd oder erschwerend wirken kann. Tatsächlich wurde erwartungsgemäß die Aufgabe WV 3 schlechter gelöst als die meisten anderen, während die Lösungsraten für die Aufgabe WV 6 hoch sind. Weiter fällt jedoch auf, dass eine Repräsentativitätsfehlvorstellung auch bei

den Aufgaben WV 5 und WV 8 erschwerend wirken würde. Bei beiden Aufgaben wird allerdings die repräsentative Karte (R/B) gegen eine mit grauem Stein verglichen. Offensichtlich erkannten die Kinder dessen Joker-Charakter, obwohl dies nicht expliziert wurde. Die Lösungsraten sind hier fast durchgängig 100%, so dass bei Einsatz des sicheren Teilereignisses keine Repräsentativitätsfehlvorstellung zu Tage treten konnte.

Aufgabe	Karte A		Karte B		4. Jahrgangsstufe	6. Jahrgangsstufe	Anmerkung
	1.	2.	1.	2.			
WV 5	R	B	B	G	1,00* (0,00)	1,00* (0,00)	Sicheres Teilereignis Repräsentativität/erschwerend
WV 8	R	G	R	B	0,94* (0,24)	1,00* (0,00)	Sicheres Teilereignis Untereignis Repräsentativität/erschwerend
WV 6	R	B	R	R	0,88* (0,33)	0,96* (0,21)	Repräsentativität/erleichternd
WV 1	B		R		0,82* (0,39)	0,96* (0,21)	Elementarereignisse
WV 4	B		B	B	0,88* (0,33)	0,91* (0,29)	Untereignis Einfach-Zusammengesetzt
WV 3	B	B	R	B	0,76* (0,44)	0,87* (0,34)	Repräsentativität/erschwerend
WV 2	R		R	B	0,47 (0,51)	0,52 (0,51)	Untereignis Repräsentativität/erleichternd Einfach-Zusammengesetzt
WV 7	R		B	B	0,47 (0,51)	0,48 (0,51)	Einfach-Zusammengesetzt

\* Lösungsrate signifikant vom 0,5 abweichend.

Tab. 1: Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich, geordnet nach Lösungsraten für die 6. Jahrgangsstufe

In den beiden übrigen Aufgaben mussten die Kinder jeweils eine Karte mit einem Zug gegen eine mit zwei Zügen vergleichen. Dies fiel im Fall B gegen B/B leicht während der Vergleich der Karten R gegen R/B (WV 2) nicht von der Ratewahrscheinlichkeit abweichend geleistet wurde. Dies ist insbesondere interessant, da die Aufgabe mathematisch äquivalent zum Vergleich R/G gegen R/B (WV 8) ist aber beide Aufgaben deutlich unterschiedliche Lösungsraten aufweisen. Dies kann als Indikator für Schwierigkeiten beim Vergleich von einfachen und zusammengesetzten Ereignissen gewertet werden. Untereignisse wurden von den Schülerinnen und Schüler meist erkannt, verbalisiert und dann auch genutzt.

Von Jahrgangsstufe 4 nach 6 ist in dieser Studie kein Fähigkeitszuwachs zu beobachten (Skalenmittelwerte Jgst. 4:  $M = 6,24$ ,  $SD = 1,03$ ; Jgst. 6:  $M = 6,70$ ,  $SD = 1,15$ ;  $t(38) = 1.31$ ,  $p > 0.05$ ). Allerdings wurden auch Begründungen für die Wahl der Kinder eingefordert. Diese lassen sich katego-

risieren, je nachdem ob sie auf zufällige Prozesse Bezug nehmen oder nicht. Bereits in Jahrgangsstufe 4 spiegeln ca. 50 % der Begründungen probabilistische Überlegungen, wobei deren Anteil in Jahrgangsstufe 6 auf ca. 65 % anwächst. Dies stellt allerdings noch keinen signifikanten Anstieg dar ( $t(38) = -1,85, p > 0,05$ ).

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorgestellten Studie wurden die frühen Fähigkeiten zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten in einem querschnittlichen Design untersucht. Dabei zeigte sich, dass bekannte Schwierigkeiten bei bestimmten Aufgabenkonstellationen zum Tragen kommen oder auch überdeckt werden können. In der Tendenz verfügen die Schülerinnen und Schüler der 6. Jahrgangsstufe über ein höheres Fähigkeitsniveau, was sich vor allem in besseren Begründungen zeigte. Das Aufgabenformat und die Interviewform erwiesen sich als geeignet für die Kinder im Primar- und beginnenden Sekundarschulalter. Durch systematische Variation der Aufgaben sollten die Befunde dieser explorativen Studie jedoch noch ausgebaut und gefestigt werden. Insgesamt tragen Studien dieser Art dazu bei, detaillierteres Wissen über bestimmte Fähigkeiten im Grundschulalter zu bekommen. Dies ist insbesondere wertvoll, da der Bereich „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ einer ist, der Kindern nicht unbedingt leicht zugänglich ist. Frühe Fähigkeiten werden aber bei geeigneten Aufgabenformaten durchaus sichtbar. Sind typische Fehlvorstellungen bekannt, so kann der Mathematikunterricht gezielt auf deren Überwindung abgestimmt werden.

## Literatur

- Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors. *Psychological Research*, 50(2), 123–129.
- Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education* 28, 96–105.
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*.
- Lindmeier, A., Reiss, K., Ufer, S., Barchfeld, P. & Sodian, B. (2011). Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz in den Jahrgangsstufen 2, 4 und 6: Stochastische Basiskonzepte und Kontingenztafelanalyse. In: R. Haug, L. Holzäpfel (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S.120–141). Weinheim: Beltz.