Alexander MEYER, Oldenburg

Diagnose in Algebra – Typische Schülerlösungen zu einer diagnostisch reichhaltigen Aufgabe

Algebra ist eine Herausforderung an Lehrpersonen, da Lernende an neue, ungewohnte Denkweisen sowie an die algebraische Symbolsprache heran geführt werden müssen. Vielfältige Forschungen setzen sich damit auseinander, wie der Zugang zum algebraischen Denken für Lernende erleichtert werden kann (z.B. Cai & Knuth 2011). Algebraisches Denken ist trotz seiner mit ihm verbundenen Schwierigkeiten eine wesentliche Voraussetzung für späteren Mathematikunterricht, besitzt aber auch einen Bildungswert in sich.

Diagnose und Förderung ermöglichen es, für Lernende optimale Lernbedingungen zu schaffen. Ziel einer Diagnose zur Verbesserung des Lernens sind das Erkennen von Lernressourcen und –defiziten, sowie die Überprüfung der Lernfortschritte der Lerner. Eine Förderung hat daran anschließend das Ziel, die folgenden Lernschritte individuell an den Bedürfnissen der Lerner zu orientieren (Ingenkamp 2005). Bei der Förderung stellt sich jedoch das Problem, welche Beschaffenheit eine Aufgabe haben muss, die das Denken des Lernenden fördert und damit „bessere" Lernerfolge ermöglicht (vgl. Kleber 1992). Eine systematische Analyse von Schülerfehlern scheint für die Auswahl einer solchen Förderaufgabe nicht unmittelbar hilfreich, da einem Fehler in der Algebra sehr unterschiedliche Denkprozesse zugrunde liegen können. Eine Diagnose des algebraischen Denkens der Lernenden am Ende des Lehrgangs zur Algebra kann aufzeigen, welche Lernschritte in Algebra erreicht worden sind, und in welchen Bereichen Förderbedarf besteht.

In diesem Beitrag setze ich mich mit der Frage auseinander, welche algebraischen Denkmuster Lernende in diagnostischen Problemlöseaufgaben zur Algebra zeigen. Diese Frage soll exemplarisch anhand der qualitativen Analyse einer Diagnoseaufgabe, die algebraisches Schlussfolgern herausfordert, beleuchtet werden.

Algebraisches Schlussfolgern in Diagnoseaufgaben

Ich beschränkte mich in meiner Untersuchung auf einen Teilbereich des algebraischen Denkens, dem algebraischen Schlussfolgern. Ein Lerner kann algebraisch Schlussfolgern, wenn

– er flexibel zwischen „Term lesen" und „Term umformen" wechseln kann (Arcavi 1994);

- er situationsangemessen Beziehungen zwischen mathematischen Strukturelementen herstellen kann und diese Beziehungen selbst als neues Strukturelement begreifen kann;
- Er anhand von gebildeten Beziehungen argumentieren und begründen kann;
- Er algebraische Denkhandlungen sachgerecht wählt und durchführt (zu algebraischen Denkhandlungen vgl. Fischer & Hefendehl 2010).

Diese Definition ermöglicht die Bildung von Kategorien, die der Analyse des empirischen Materials zugrunde gelegt wird.

Auf der Grundlage der Tätigkeitstheorie gehe ich davon aus, dass sich aus den Handlungen der Lerner in den Aufgaben und aus den Objekten dieser Handlungen auf das Denken der Lerner zurück schließen lässt (Leont'ev 1979). Die Aufgabenbearbeitungen der Lerner zeigen die algebraischen schlussfolgernden Denkprozesse an, da sie intentionales verstehendes Handeln abbilden.

Es wird zugrunde gelegt, dass das Herstellen von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten bzw. Strukturelementen ein wesentliches Merkmal mathematischen Denkens und Lernens ist. Aufgrund des Zeichencharakters mathematischer Objekte ist jede neue Beziehung, die geschaffen wird, ein Bezeichnungsprozess - und damit ein Prozess, der genuin mathematisches Denken ausmacht. Das Verständnis eines mathematischen Objekts zeigt sich demnach in den Beziehungen, die ein Lerner durch Handlungen an diesem Objekt ausdrückt.

Denkmuster in diagnostischen Aufgaben

Die Aufgaben, auf deren Grundlage im Folgenden algebraische Denkmuster dargestellt werden, bieten den Lernenden besondere Möglichkeiten, offen und mit individuellen Zugängen an sie heran zu gehen, sie sind also für Diagnose geeignet (Büchter & Leuders 2009). Sie fordern dabei algebraisches Schlussfolgern heraus.

Die folgende Aufgabe wurde 90 Lernenden aus 10. Klassen des Gymnasiums vorgelegt, mit der Bitte, ihre Gedanken ausführlich zu verschriftlichen.

Algebraische Denkmuster in der Aufgabe „Teilbarkeitsuntersuchung“

Aufgabe: „Gegeben ist eine ungerade Zahl. Multipliziere diese mit sich selbst und ziehe vom Ergebnis 1 ab.“

Zahlen, die nach dieser Vorschrift entstehen, sind immer gerade. Stefan behauptet nun, sehr große Zahlen sind sogar immer durch 16 teilbar. Überprüfe diese Aussage. Algebra und Variablen können Dir dabei helfen.

Tipp: mache Dir zuerst klar, dass sich ungerade Zahlen durch $2n + 1$ *schreiben lassen!*

Mithilfe eines an Typenbildung angelehnten qualitativen Verfahrens habe ich auf der Grundlage ähnlich beschaffener Aufgabenbearbeitungen zu der obigen Aufgabe Denkmuster rekonstruiert.

Denkmuster 1: „Teilbarkeit als arithmetische Operation“. Bei diesem Denkmuster wird Teilbarkeit arithmetisch betrachtet. Es werden „zufällig gewählte ungerade Zahlen“ gewählt, diese sind Grundlage zur Bildung der im Aufgabentext benannten Zahl. Anhand dieser Zahl wird die Teilbarkeit durch 16 geprüft und– je nachdem ob ein ganzzahliges Ergebnis vorliegt oder nicht – festgestellt, dass eine Teilbarkeit vorliegt oder eben nicht. Dabei wird lediglich anhand von wenigen probierten Zahlen geurteilt.

Denkmuster 2: „Teilbarkeit als algebraische Routine“. Bei diesem Denkmuster wird der algebraische Term $(2n + 1)^2 - 1$ benutzt, um schrittweise die geforderten Zahlen zu bilden, wobei für n eine Zahl gewählt wird. In einem zweiten Schritt wird die so gebildete Zahl auf ihre Teilbarkeit geprüft. Im Gegensatz zu Denkmuster 1 werden hier Zahlen auf Grundlage des algebraischen Terms ausprobiert. Hier fehlen Überlegungen, wie Teilbarkeit in einem algebraischen Term abzulesen ist, obwohl der algebraische Term Ausgangspunkt der Aufgabenbearbeitung zu sein scheint.

Denkmuster 3a: „Teilbarkeit als Geschichte“. Die Lernenden benutzen algebraische Symbolsprache, um der Reihe nach zu beschreiben, was in der Aufgabe zu tun ist. Ein Beispiel ist „$(2n + 1)^2 - 1 = x: 16$ [...]“. Die Einzelnen Terme sind eher prozedural zu lesen, d.h. als Anweisung, was jeweils (von links nach rechts) zu berechnen ist.

Denkmuster 3b: „Teilbarkeit als Zahleigenschaft“. Der oben zitierte Term lässt eine zweite Deutung zu. Der Lerner deutet den Term $(2n + 1)^2 - 1$ als eine unbestimmte Zahl, und gibt dieser Zahl deshalb den Namen x. Die Zahl x wird nun als beliebig angesehen, dabei geht aber die Struktur der ursprünglichen Zahl verloren. Es wird dennoch zum Ausdruck gebracht, dass diese Zahl in irgendeiner Weise durch 16 teilbar sein soll.

Denkmuster 4: „Teilbarkeit als funktionale Abhängigkeit“. Die in der Aufgabe zu bildende Zahl und die Teilbarkeit werden als Funktionen oder Folgen umgedeutet, also in $x^2 - 1$ und $16 \cdot x$. Diese Funktionen/Folgen werden mittels der Vorstellung von dazugehörigen Graphen in Beziehung zueinander gesetzt. Auf dieser Grundlage wird versucht zu argumentieren, dass die Funktion/Folge $x^2 - 1$ nicht (immer) die Werte annimmt, die die Funktion/Folge $16x$ annimmt, und somit keine generelle Teilbarkeit gegeben ist.

Diskussion und Ausblick

Die Rekonstruktion von Denkmustern in Diagnoseaufgaben stellt einen ersten Schritt dar, um Diagnose und Förderung in Algebra handhabbar zu machen. Dabei wird eine an Kriterien orientierte Datenreduktion (vgl. Thomas 2007, S. 83) ermöglicht, die für eine Diagnose im Unterricht wertvoll ist.

Ein nächster Schritt muss die Bewertung der Denkmuster hinsichtlich ihres Potentials für algebraisches Denken und dessen Förderung erfolgen. Dazu sollen ähnliche Denkmuster verglichen werden und herausgearbeitet werden, welche Merkmale eines Denkmusters ein erfolgreiches, d.h. mathematisch angemessenes algebraisches Denken kennzeichnen. Auf diese Weise kann in einer Diagnose im Unterricht die Bewertung einer Schülerlösung, die für Förderung immer erfolgen muss, anhand von Indikatoren erfolgen, die erfolgreiche algebraische Denkmuster als Grundlage haben – immer jedoch nur innerhalb der oben genannten Diagnoseaufgaben. Offen bleiben muss die Generalisierbarkeit der erfolgreichen algebraischen Denkmuster.

Literatur

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35.

Büchter, A., & Leuders, T. (2009): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen (4 Aufl.). Berlin: Cornelsen scriptor.

Cai, J., & Knuth, E. (2011): Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 52(33), 1-7.

Ingenkamp, K., & Lissmann, U. (2005): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik (5. vollständig überarbeitete Auflage). Weinheim: Beltz.

Kleber, E. W. (1992): Diagnostik in pädagogischen Handlungsfeldern. München: Juventa.

Leont'ev, A. N. (1979): The problem of activity in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.): The concept of activity in Soviet Psychology. New York: Sharpe.

Thomas, L. (2007): Lern- und Leistungsdiagnostik. In T. e. a. Fleischer (Ed.), Handbuch Schulpsychologie. Psychologie für die Schule. Stuttgart: Kohlhammer, 82-97.