Laura OSTSIEKER, Rolf BIEHLER, Paderborn

Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen

Vielen Studienanfänger/innen bereitet der Übergang von der Schule zur Hochschule große Schwierigkeiten. Dies wird unter anderem an den hohen Abbruch-Quoten deutlich. Im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) untersuchen wir diese Frage in unterschiedlichen Teilprojekten. Ein Bereich, in dem viele der Studierenden zu Beginn Probleme haben, ist der des formalen Beweisens. In der Schule werden formale Beweise eher selten behandelt, in der Hochschulmathematik sind sie dagegen von enormer Bedeutung. Robert C. Moore (1994) hat die Schwierigkeiten mit formalen Beweisen in verschiedene Bereiche unterteilt. Als einen dieser Bereiche nennt er die mathematische Sprache. Damit haben sich auch Elena Nardi und Paola Iannone (2005) befasst. In ihrer Studie beschreiben Mathematiker, dass die Studierenden sehr schnell bemerkten, dass in der Hochschulmathematik eine andere Sprache gesprochen werde. Sie versuchten oft, diese Sprache zu imitieren. Diese Thematik untersuchen wir am Beispiel des Begriffs der Konvergenz von Folgen bei Bachelor-Studierenden aus der Vorlesung Analysis I. Dabei geht es sowohl um die Schwierigkeiten bei der formalen Darstellung eines Beweises als auch um Schwierigkeiten mit der formalen Definition der Konvergenz.

1. Design der Studie

Da die Lösungsprozesse analysiert werden sollen, müssen diese beobachtbar gemacht werden. Wir haben uns für die kooperative Bearbeitung von Aufgaben entschieden, da diese für die Teilnehmenden eine natürlichere Situation darstellt als die Methode des lauten Denkens. Es wurden sechs Gruppen bestehend aus jeweils zwei bis drei Studierenden der Veranstaltung Analysis I beobachtet. Den Gruppen wurden nach und nach bis zu drei Aufgaben zur Konvergenz von Folgen vorgelegt. Sie hatten den Auftrag, eine gemeinsame Lösung zu erstellen, den Prozess auf „Konzeptpapier“ zu notieren und dann in eine „Reinschrift“ zu übertragen. Danach wurden die Ergebnisse dem anwesenden Tutor präsentiert. Wir waren besonders daran interessiert zu sehen, wie unterschiedliche mathematische Überlegungen in der Konzeptversion und in der Reinschrift notiert werden und ob die Reinschrift weitere reflektive Prozesse anstößt. Der gesamte Lösungsprozess wurde von uns mit zwei Kameras gefilmt.

Die Studie wurde während der fünften Semesterwoche durchgeführt. In der Vorlesung Analysis I wurden bis zu diesem Zeitpunkt die Themen Mengen und vollständige Induktion, reelle Zahlen und komplexe Zahlen behandelt. Ab der dritten Semesterwoche wurden Folgen und Konvergenz in den komplexen Zahlen eingeführt.

Die erste Aufgabe, die den Studierenden vorgelegt wurde, ist die folgende:

> Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = \frac{1-n}{4n-1}$ auf Konvergenz. Gib gegebenenfalls den Grenzwert begründet an und bestimme für ein beliebiges vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein mögliches von ϵ abhängiges $N \in \mathbb{N}$ im Sinne der Definition der Konvergenz.

Diese Aufgabe wurde leicht verändert von Büchter und Henn (2010) übernommen. Es handelt sich unserer Einschätzung nach um eine eher leichtere Aufgabe, da im Wesentlichen „lediglich“ die Definition angewendet werden muss. Es handelt sich um zwei Teilaufgaben. Wenn im ersten Teil richtig mit den Grenzwertsätzen gearbeitet wird, ist der Nachweis der Konvergenz über die Bestimmung eines N logisch überflüssig. Es sollte aber getestet werden, wie die Studierenden mit diesem Aspekt umgehen.

2. Erste Ergebnisse

Die durchschnittliche Bearbeitungsdauer bis hin zu einer Reinschrift betrug etwa 33 Minuten. Auffällig ist, dass fünf von sechs Gruppen als erste Vermutung äußerten, es handele sich um eine Nullfolge. Einige dieser Gruppen bemerkten ihren Fehler sehr schnell und fanden den tatsächlichen Grenzwert -1/4. Bei einer der Gruppen dauerte es über 20 Minuten bis sie den Irrtum bemerkten und eine Gruppe war bis zuletzt der Meinung, es handele sich um eine Nullfolge. Dieser Gruppe gelang es nicht, eine Reinschrift zu erstellen. Daher liegen lediglich fünf Reinschriften vor. Positiv zu bemerken ist, dass fünf der sechs Gruppen den Grenzwert ohne Hilfe richtig bestimmten. Das Vorgehen war unterschiedlich. Etwa die Hälfte der Gruppen formte den Folgenterm um und bestimmte den Grenzwert mithilfe der Grenzwertsätze. Die übrigen Gruppen bestimmten zunächst hohe Folgenglieder um auf den Grenzwert zu schließen. Einige von ihnen bewiesen diesen Grenzwert anschließend noch durch Umformungen und die Grenzwertsätze. Der Großteil der Studierenden war folglich in der Lage, die Umformungen durchzuführen und die Grenzwertsätze anzuwenden. Es ist allerdings anzumerken, dass die Grenzwertsätze oft lediglich als Rechenregeln verstanden wurden und die Existenzaussage nicht beachtet wurde.

Ziel der explorativen Studie war es auch, für Fehler und Schwierigkeiten in den Reinschriften ein geeignetes Kategoriensystem zu entwickeln. Wir unterscheiden folgende Kategorien:

Fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen: Ein Schritt wurde nicht oder nicht ausreichend begründet. Diese Kategorie beinhaltet aber das Problem, dass in Vorlesung und Übungen oft gar keine klaren expliziten Bezugsnormen entwickelt werden.

Mängel beim Umformen symbolischer Ausdrücke:

Unterkategorien:

- *Schulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule ausführlich behandelt wird, zum Beispiel Bruchrechnung.
- *Höheres Schulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule zwar behandelt wird, bei der die Studienanfänger/innen jedoch nicht die nötige Routine haben, zum Beispiel Rechnen mit Ungleichungen oder Beträgen.

  Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

  $$\frac{1}{4N-1} < \frac{4}{3}\varepsilon \Longleftrightarrow 4N-1 < \frac{3}{4\varepsilon}$$

  Hier handelt es sich um einen Umformungsfehler beim Rechnen mit Ungleichungen.
- *Hochschulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule nicht behandelt wird, zum Beispiel wurden die Grenzwertsätze falsch angewendet.

Unvollständige formale Aussagen: Ein Teil einer Aussage fehlt, zum Beispiel Quantoren oder die Angabe der Grundmenge.

Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

noch zz.: $|a_n - a| < \varepsilon$

Hier fehlt die Angabe der Grundmenge, aus der n stammen soll. Zu ε werden keine weiteren Angaben gemacht.

Logische Probleme mit folgenden Unterkategorien:

- *Aussagenstatus:* Der Status von Aussagen wird verwechselt, zum Beispiel wird die Behauptung als Voraussetzung benutzt.
- *Äquivalenz:* Diese Kategorie beinhaltet alle Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Äquivalenz auftreten, zum Beispiel wird ein Folgepfeil geschrieben, obwohl die Äquivalenz benutzt wird.
- *Unvollständige logische Darstellung:* Hierunter fallen Fehler wie das Benutzen eines falschen Symbols.

Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung: Über die gesamte Aufgabenbearbeitung werden die Umformungen unzureichend kommentiert.

n-N-Problem: Die Studierenden haben Schwierigkeiten mit dem Status von n und N in der Konvergenzdefinition.

Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

$\Longleftrightarrow \frac{3}{16n-4} < \varepsilon$, da $n \in \mathbb{N}$

Setze $n := N$ nach Voraussetzung

$\frac{3}{16N-4} < \varepsilon$

Hier ersetzen die Studierenden n durch N ohne sich inhaltlich darum zu kümmern, dass eine Aussage für alle n≥N gelten soll.

Wir möchten noch angeben, wie häufig Fehler der einzelnen Kategorien in den fünf Reinschriften vorgefunden wurden. Vier der fünf Gruppen hatten Mängel der Kategorie *fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen*. *Mängel beim Umformen symbolischer Ausdrücke* waren auf *Schulniveau* und *höherem Schulniveau* jeweils bei zwei Gruppen festzustellen. *Unvollständige formale Aussagen* ließen sich bei drei von fünf Gruppen finden. *Logische Probleme* der Unterkategorien *Aussagenstatus* und *Äquivalenz* waren jeweils bei zwei Gruppen vorhanden, *unvollständige logische Darstellung* bei drei der fünf Gruppen. Ein *Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung* war bei zwei Gruppen festzustellen. Das *n-N-Problem* wurde bei vier von fünf Gruppen deutlich.

3. Ausblick

Zusätzlich zu dem Datenmaterial aus der hier vorgestellten Studie liegen uns 52 eingescannte Studierendenbearbeitungen zu ähnlichen Aufgaben vor. Anhand dieser soll das Kategoriensystem überprüft und gegebenenfalls angepasst werden. Im Wintersemester 2012/13 soll die Hauptstudie durchgeführt werden.

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.W. (2010): Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag.

Moore, R.C. (1994): Making the transition to formal proof. In: Educational Studies in Mathematics, 27(3), 249 - 266.

Nardi, E. & Iannone, P. (2005): To appear and to be: Acquiring the ‚genre speech‘ of university mathematics. In: Proceedings of the 4th Conference on European Research in Mathematics Education, 1800 - 1810.