

Vanessa RICHTER, Dortmund

„Passt auf, dass ihr bei der Multiplikation nicht den Startwert doppelt rechnet“ – Vorstellungsentwicklungsprozesse funktionalen Denkens am Beispiel des Phänomens Linearität

Im vorliegenden Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich Vorstellungen von Lernenden zu linearen Funktionen im Lernprozess verändern und welche typischen Verläufe und Hürden sich in einer Entwicklung hin zu mathematisch tragfähigen Vorstellungen zeigen.

Linearität gilt als eine der zentralen Ideen der Sekundarstufe I und liefert eine Basis für weitergehende komplexere Konzepte (z.B. in der Analysis). Der Bedarf neuer Lehr-Lernarrangements sowie die Weiterentwicklung spezifischer Elemente der Theorie des funktionalen Denkens wird besonders deutlich, wenn man die inadäquate Verwendung proportionaler Rechenstrategien vieler Lernender fokussiert: vielfach lässt sich eine Übergeneralisierung der Anwendung auf jegliche Art von funktionalen Zusammenhängen beobachten (vgl. u.a. De Bock et al. 2002).

Das Forschungsinteresse wird im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung und konkret im Ansatz des Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN realisiert (vgl. Hinz, Hußmann, Prediger, Ralle & Thiele 2012). Zentral ist dabei die Gegenstandsorientierung (Hinterfragung und Rekonstruktion der fachlichen Inhalte und ihrer fachlichen Strukturierung), die Prozessorientierung (Beobachtung von Lernprozessen mit ihren Voraussetzungen, Verläufen und Hürden) sowie die Iterativität und Vernetzung (Ablauf von Forschung und Entwicklung geschieht zyklisch mit dem Bestreben einer konsequenten Verschränkung der Arbeitsbereiche; s. Abb. 1). Konkret soll dabei neben der in diesem Beitrag fokussierten Frage nach typischen Verläufen der Entwicklung und Hürden im Lernprozess auch beforscht werden, mit welchen Vorstellungen Lernende zu Beginn des Lehr-Lernarrangements arbeiten und inwiefern verschiedene Darstellungen und deren Wechsel zum Vorstellungsaufbau genutzt werden.

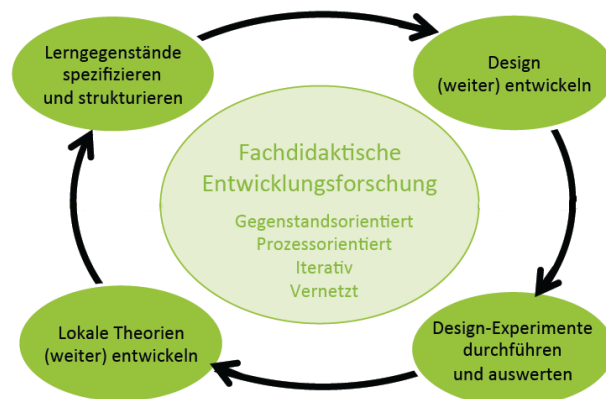


Abbildung 1: Modell fachdidaktischer Entwicklungsforschung im Forschungs- und Nachwuchskolleg FUNKEN

1. Spezifizierung und Strukturierung der Lerngegenstände

Mit dem Ziel die Entwicklung tragfähiger Vorstellungen im funktionalen Denken – „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath 1989, S.6) – bzgl. linearer Funktionen zu unterstützen ist eine Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes nötig.

Zentrale Nahtstelle zwischen realen Situationen und der Mathematik sind die drei für das funktionale Denken wichtigen Grundvorstellungen der Zuordnung, Kovariation und der Funktion als Ganzes, sowie die Darstellungsformen (graphisch, tabellarisch, symbolisch, Text) in denen sie den Lernenden begegnen können. Nach Duval (2002) resultiert mathematisches Verständnis erst aus der Koordination von mindestens zwei dieser Repräsentationsformen. Die Grundvorstellungen werden in den Darstellungsformen unterschiedlich sichtbar, z.B. betont der Graph einer Funktion besonders den Verlauf und Aspekte wie Monotonie oder Linearität, in der tabellarischen Darstellung dagegen lässt sich die Kovariation schlecht bzw. nur mit größerem Rechenaufwand herausfiltern.

2. Entwicklung des Designs

In die Entwicklung des Designs sind Erkenntnisse über Lernstände, sowie empirische und theoretische Einsichten zu Lehr-Lernprozessen eingeflossen. Im Folgenden sei eine kurze Auswahl der berücksichtigten Aspekte dargestellt: (a) Lernende wenden unterschiedliche proportionale Rechenstrategien flexibel an; (b) gleichzeitig neigen viele Lernende aber zu einem unzulässigen Einsatz – „overuse“ – proportionaler Erklärungsmuster (vgl. Van Dooren & Greer 2010); (c) außerdem werden direkte Abhängigkeiten zwischen Elementen einer Darstellungsform gesehen, z.B. das Anwachsen bzw. Sinken der Gerade hängt mit dem Ort zusammen von dem sie kommt (vgl. Moschkovich 1990).

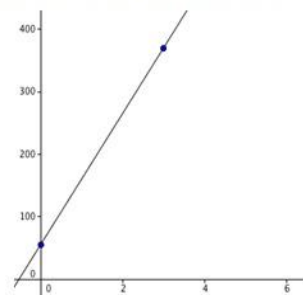
Das Forschungsinteresse wird im Projekt KOSIMA (vgl. Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger 2011) realisiert. Im Lehr-Lernarrangement „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen“ (Jgst. 8) sollen die Lernenden eigenständig das Phänomen Linearität im Kontext der Routenplanung erkunden, schrittweise Erkenntnisse erzielen und diese Erkenntnisse kritisch prüfen und reflektieren. Erkenntnisleitende Kernfrage ist dabei, woher so ein Routenplaner eigentlich weiß, wann man sein Ziel erreicht.

Konkrete Prinzipien, die in die Design-Entwicklung eingeflossen sind, sind beispielsweise (vgl. Hußmann et al. 2012): (a) Gezieltes Anknüpfen an Vorwissen: proportionale Rechenstrategien werden direkt aufgegriffen. (b) Darstellungsangebot: Zur Erkundung des Phänomens Linearität werden

Tabelle (mit Lücken) und Graph (vollständige Gerade) parallel angeboten. Der Startwert (y-Achsenabschnitt) ist in beiden Darstellungen vorgegeben, der feste Faktor (Durchschnittsgeschwindigkeit pro Stunde) nur indirekt erkennbar und damit zu entdecken (s. Abb. 2).

Erledigungen machen. Daher bestimmen sie die Reisedauer erst ab Kilometer 55.

Reisedauer (in h)	Reisestrecke (in km)	Ort
0	55	Autobahnauffahrt
0,5		Raststätte Münster
1		Osnabrück
2		Dammer Berge
3	370	Kiel



Wie kann man die Zwischenwerte bestimmen? Verwende dazu auch die Prüfwege, mit denen

Abbildung 2: Auszug aus dem Lehr-Lernarrangement „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen“

3. Durchführung und Auswertung der Design-Experimente

Die ersten Designexperimente wurden sowohl in Klassensituationen (Gymnasium in NRW, Klasse 7) als auch in Interviewsituationen mit je zwei Lernenden (Gymnasium in NRW, Klasse 8) durchgeführt.

Erste Ergebnisse bekräftigen bisherige empirische Studien teilweise, legen aber auch neue Aspekte offen: Die Loslösung von proportionalen Rechenstrategien stellt sich als problematisch dar: in der abgebildeten Tabelle wurden die

Erkunden A
3 Vorhersagen machen, auch wenn es nicht bei Null los geht
Nach mühen rechnen

Reisedauer (in h)	Reiselänge (in km)	Ort
0	55	Autobahnauffahrt
0,5	<i>161,5</i>	Raststätte Münster
1	<i>123,5</i>	Osnabrück
2	<i>246,5</i>	Dammer Berge
3	370	Kiel

Abbildung 3: Schülerbearbeitung

Zwischenwerte vielfach proportional berechnet (s. Abb. 3). Zudem bereitete vielen Lernenden der Wechsel in die graphische Darstellung Probleme (Zeichnung von Geradenteilstücken mit Knick, aber auch die Änderung der Skalierung – der Startwert der Tabelle wurde als neue Null der y-Achse eingeführt – waren beobachtbare Strategien). Überraschend zeigte sich, dass das Aufstellen bzw. die Deutung eines linearen Terms den Lernenden keine weiteren Probleme bereitete.

4. (Weiter-) Entwicklung lokaler Theorien

Auf gegenstandsspezifischer Ebene sollen Lernziele ausdifferenziert und (neu) strukturiert werden. Zudem soll die Rolle und Strukturierung des Darstellungsangebots für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen expliziert werden. Auf eher gegenstandsübergreifender Ebene wird zu klären sein, welche konkreten Diagnose- und Förderansätze eine Veränderung individueller Vorstellungen bzw. eine Weiterentwicklung hin zu tragfähigen Vorstellungen bewirken können.

Ausblick und Fazit

Aufgrund der beobachtbaren Phänomene wurden einige Design-Veränderungen vorgenommen, sodass Fehlvorstellungen gezielter aufgegriffen, der Lernweg schlüssiger aufgebaut und zentrale Lernmomente gestärkt werden, immer unter Berücksichtigung eines gezielten Einsatzes von Darstellungen und Darstellungswechseln. Ein Beispiel für eine solche Veränderung ist: Der Startwert wird nicht mehr tabellarisch oder graphisch vorgegeben, sondern soll eigenständig entdeckt werden. Die Lernenden sollen erkennen, dass Rechenstrategien gebraucht werden, die über proportionale Verfahren hinausgehen. Diese „neuen“ Strategien sollen selbstständig entwickelt werden, sodass weiterhin ein geschicktes Berechnen von Zwischenwerten möglich ist. Ein Startwert ungleich 0 wird damit zum einen als Phänomen erkundet, soll aber gleichzeitig auch als Grund identifiziert werden, warum proportionale Rechenstrategien keine eindeutigen Ergebnisse mehr liefern, bzw. wie sich die Ergebnisse von Zwischenwerten verändern, wenn proportional gerechnet wird.

In neuen Designexperimenten (Klassensituationen + begleitende Partnerinterviews an zwei Gesamtschulen in NRW, Jgst. 8; Dauer: 4-5 Wochen) wurde das weiterentwickelte Lehr-Lernarrangement erprobt. Dabei zeigten sich neben der Übergeneralisierung proportionaler Rechenstrategien weitere spannende Phänomene, die einer tiefergehenden Analyse bedürfen.

Literatur

- Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T. & Prediger, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 71-74.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. In: Educational Studies in Mathematics, 50(3), 311-334.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking – Basic issues for learning. In: F. Hitt (Eds.), Representations and mathematics visualization. Mexico-City, 31-46.
- Prediger, S.; Hußmann, S.; Hinz, R.; Ralle, B. & Thiele, J. (2012): bisher unveröffentlichte interne Projektunterlagen.
- Hußmann, S.; Mühlenfeld, U. & Witzmann, C. (2015) Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 8. Berlin: Cornelsen.
- Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (JGPME) Vol II., 109-116.
- Van Dooren, W. & Greer, B. (2010). Students' behavior in linear and non-linear situations. In: Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 1-3.
- Vollrath, H.-J.(1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37.