Christian RÜEDE, Zürich

Zur Förderung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke

Das Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks ist nach Malle (1993, S. 254) die Voraussetzung für das algebraische Umformen:

„Viele Lehrer sind sich der Tatsache gar nicht bewusst, dass dem Umformen algebraischer Ausdrücke ein Termstrukturerkennen zugrunde liegt. Man begnügt sich daher meist mit einem ‚endlosen' Üben des Umformens, ohne gezielt auf diese Voraussetzung – die man geradezu als ‚crux' aller Schülerfehler beim Umformen ansehen kann – einzugehen."

Konsequenterweise macht Malle mehrere Vorschläge zur Förderung des Strukturierens. In diesem Beitrag werden zwei weitere Aufgabenformate vorgestellt. Diese fokussieren auf das *Umstrukturieren*. Dadurch wird das Strukturieren tatsächlich gefördert, wie im Folgenden mit Hilfe eines vierstufigen Modells plausibel gemacht wird.

Ein vierstufiges Modell des Strukturierens

Zur Illustration des Modells des Strukturierens dient die Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$. Die nachstehenden Schüleraussagen sollen die jeweilige Stufe illustrieren (Genaueres in Rüede (2012)):

· Auf Stufe 1 verfolgt jemand das Ziel, den Ausdruck **optisch einfacher** zu machen. So streicht eine Schülerin die Klammern weg und erhält $7 = 100 - 3$ mit der Begründung „Ich habe $16 + 3x$ weg gestrichen, weil ein Minus dazwischen ist".

· Auf Stufe 2 verfolgt jemand das Ziel, den Ausdruck zu **ändern**. So multipliziert ein Schüler aus und fasst zusammen mit der Begründung „Ich schaue halt, ob man auf beiden Seiten etwas ausrechnen könnte".

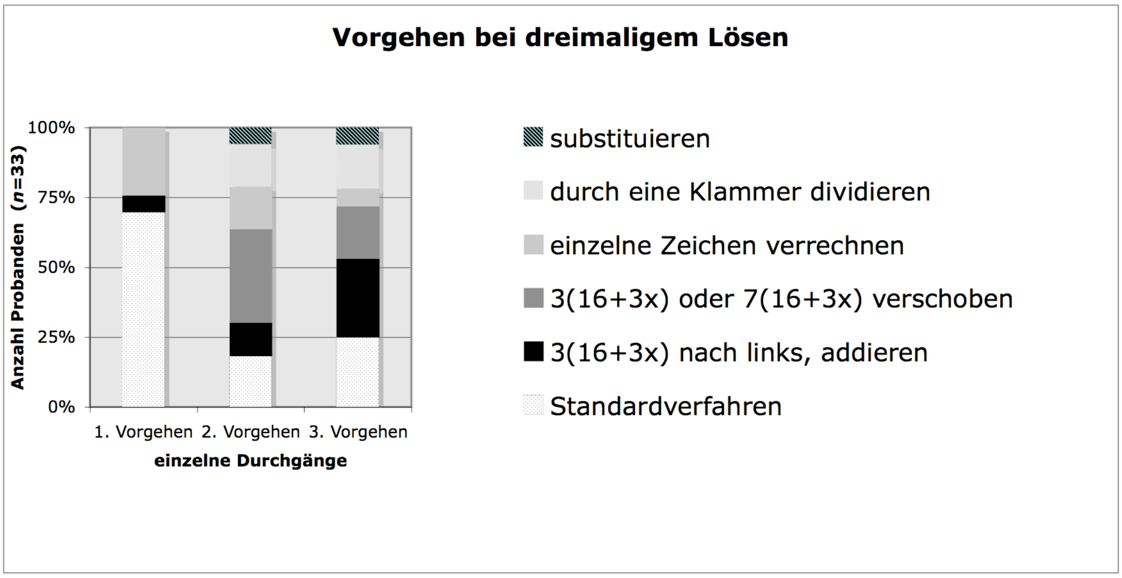
· Auf Stufe 3 wird das Ziel verfolgt, die Aufgabe zu **lösen**. Ein Schüler formt die Gleichung im zweiten Anlauf um auf $7(16 + 3x) + 3(16 + 3x) = 100$ mit der Begründung, dass dies „einfacher" sei. Er habe dies vorhin nicht gesehen „weil ich mich nur auf diese Klammer konzentriert habe und nicht noch auf die Zahl, also nur noch minus, dann ändert es [in der Klammer], aber nicht, dass ich das jetzt noch plus rechnen könnte".

· Und auf Stufe 4 verfolgt jemand das Ziel, die Aufgabe zu **diskutieren**. So kommentiert ein Schüler: „Klammern. So was kann man da umstellen. Die Klammern sind gleich? Ja, die Klammern sind die gleichen [...] also kann man so plus 3-mal die Klammern". In der Folge formt er die Gleichung direkt um zu $7(16 + 3x) + 3(16 + 3x) = 100$.

Im Fokus der folgenden Ausführungen steht der Übergang von Stufe 2 auf Stufe 3. Auf Stufe 2 wird ein Ausdruck vor allem darauf hin betrachtet, ob irgendetwas gerechnet – also ein Verfahren verwendet – werden kann. Die entsprechenden Bezüge dienen dem Ändern des Ausdrucks. Im Vordergrund steht das Ausführen eines Verfahrens, nicht das Erreichen eines intendierten Ziels wie etwa das Lösen der Gleichung. Sobald der Ausdruck geändert werden konnte, wird die Aufgabe als bearbeitet betrachtet. Auf der Stufe 3 hingegen wird eine hergestellte Strukturierung daran gemessen, ob sie zum intendierten Ziel führt. Konsequenterweise wird der Ausdruck weiter umstrukturiert, falls die erste Strukturierung unangemessen war. Eine solche Umstrukturierung wird durch die Orientierung am intendierten Ziel ausgelöst. Mit welchen Aufgaben könnte der Übergang von Stufe 2 zur Stufe 3 angeregt werden?

Erstes Aufgabenformat

Das erste Aufgabenformat besteht darin, mehrmals zum Lösen derselben Aufgabe aufzufordern. Der Effekt dieses Aufgabenformats wurde anhand der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ untersucht. 33 Probanden wurden aufgefordert, diese Gleichung zu lösen, sie dann noch einmal zu lösen, aber anders, und sie schließlich nochmals anders zu lösen. Das Ergebnis ist ermutigend:



Zu Beginn neigten die Probanden zur Verwendung des Standardverfahrens, nahezu drei Viertel multiplizierten aus und fassten zusammen. Doch beim zweiten und dritten Lösungsversuch strukturierten viele Probanden um und verschoben meistens $7(16 + 3x)$ oder $3(16 + 3x)$. Über alle drei Versuche hinweggesehen, schaffte es sogar die Hälfte der Probanden, (selbstständig!) auf $10(16 + 3x) = 100$ umzuformen.

Dieses Aufgabenformat stößt Diskussionsanlässe im Unterricht an. So können die Schülerinnen und Schüler ihre unterschiedlichen Herangehensweisen analysieren, vergleichen und beurteilen im Hinblick auf Fragen wie: Was ist das Ziel der Umformung? Welche Wege führen zu diesem Ziel? Welcher Weg ist der eleganteste?

Die Hoffnung ist, dass sich durch die Auseinandersetzung mit Fragen wie diesen die Leseperspektive auf Gleichungen ändert. Eine Gleichung ist nicht einfach dazu da, irgendwie verändert zu werden, sondern sie bestimmt implizit eine Zahl (oder eine Menge von Zahlen), die durch das Umformen der Gleichung zu finden ist.

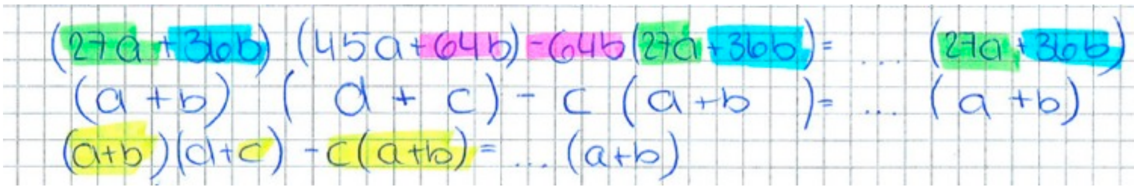
Zweites Aufgabenformat

Das zweite Aufgabenformat besteht in Aufgaben wie:

- Was gehört in die Box, damit die Gleichung allgemeingültig wird:
  $11 \cdot 2x - 2 \cdot 11x = 10x \cdot 3 - \square \cdot 3x$?
- Was gehört in die Box, damit die Gleichung allgemeingültig wird:
  $(7 + x)(21x + 14) - x(21x + 14) = 14 \cdot \square$?
- Ist die Gleichung allgemeingültig oder nicht?
  $247x - 178x = x + 246x - 178x$
- Ist die Gleichung allgemeingültig oder nicht?
  $8(4x + 2) - 16(2x + 1) = 16(2x + 1) - 8(4x + 2)$

Solche Aufgaben lenken davon ab, algebraische Ausdrücke als Input von Verfahren zu sehen. Denn bei obigen Aufgaben geht es darum, eine relationale Auffassung des Gleichheitszeichens zu entwickeln, indem die Gleichung zum Beispiel als Anwendung des Kommutativ- oder Distributivgesetzes verstanden wird. Eine analoge Aufgabe im Rahmen der Arithmetik wäre das Auffinden einer Zahl so, dass die Gleichung $65 - \square = 64 - 38$ stimmt (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Kinder können dadurch nebst dem operativen Zugang zur Arithmetik auch das relationale Denken lernen und so den Subtrahenden und Minuenden bei der Subtraktion gleichsinnig verändern.

Welche Überlegungen dieses zweite Aufgabenformat evozieren kann, zeigt die folgende Passage einer Probandin:



Hier bearbeitet eine Probandin den Ausdruck $(27a + 36b)(45a + 64b) - 64b(27a + 36b) = \square\,(27a + 36b)$. Er soll allgemeingültig gemacht werden. Dazu färbt sie zuerst detailliert jene Teile mit derselben Farbe, die gleichartig sind. Danach bezeichnet sie gleichfarbige Teile mit demselben Buchstaben. Indem sie schließlich $a + b$ und c sowie $c(a + b)$ gelb färbt, kann sie auch ganze Klammerausdrücke als Objekte auffassen. Damit sind die distributiven Bezüge auf der linken Seite hergestellt.

Mit diesen beiden Aufgabenformaten können die Schülerinnen und Schüler lernen, Gleichungen nicht nur ändern zu wollen. Vielmehr stellen sie mathematisch relevante Bezüge her und erfahren, dass Gleichungen mathematische Äquivalenzen ausdrücken. So werden die Schülerinnen und Schüler zur Auffassung geführt, dass bei einer Gleichung jene Zahl interessiert, welche beide Seiten äquivalent macht, und dass es nicht nur darum geht, die Gleichung zu ändern.

Selbstverständlich wird dieses Lernziel nur dann erreicht, wenn die Bearbeitungen dieser Aufgaben im Unterricht reflektiert werden. Dann entfalten diese Aufgabenformate ihr ganzes Potential.

Fazit

Die obigen beiden Aufgabenformate eignen sich meines Erachtens zur Förderung des Strukturierens. Es ist nicht die Idee, Päckchen von solchen Aufgaben abzuarbeiten, sondern zwei, drei derartige Aufgaben pro Woche im Algebraunterricht zur Verfügung zu stellen. Die Aufgabenformate veranlassen die Lernenden in natürlicher Art und Weise dazu, zu argumentieren und zu begründen. So vermögen sie das Strukturieren algebraischer Ausdrücke zu fördern.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth: Heinemann

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 113–141.