Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

Konzeptuelles Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden in der Linearen Algebra

1. Erkenntnisinteresse

Im Lehramtsstudium muss die „fachmathematische Ausbildung Erfahrungen mit einer ‚Schulmathematik vom höheren Standpunkt' […] ermöglichen" (Beutelspacher et al. 2011, S.2). Dabei, so fordern Danckwerts und Beutelspacher weiter, solle die Fachmathematik „ein tieferes, beweglicheres Verständnis der Fachinhalte des schulischen Sekundar-Curriculums" (ebd., S.9) hervorrufen und hin zu einer „verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung" (ebd., S.15) führen.
Die Lineare Algebra als streng formalisierte, abstrakte Theorie bereitet vielen Studierenden Schwierigkeiten (u. a. Carlson et al. 1997). Die zentrale Leitfrage dieses Aufsatzes ist folgende: Ist das konzeptuelle Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden nach erfolgreichem Bestehen des Moduls Lineare Algebra wirklich tief und beweglich?

2. Was ist konzeptuelles Begriffsverständnis?

Unter konzeptuellem Begriffsverständnis verstehe ich in Anlehnung an das „concept image" von Tall & Vinner (1981) und an „conception" von Sfard (1991) ein mentales Netzwerk, welches aus dem besteht, was eine Person gedanklich mit einem Begriff assoziiert und dem, wie diese Person mit dem Begriff umgeht. Harel (1997) erläutert, dass in der Fähigkeit Aufgaben zu lösen ein wichtiger Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis liege. Dabei betont er, dass beim Lösen von Aufgaben zwei Dinge wichtig seien: zu wissen, was zu tun ist und zu wissen, warum dies zu tun ist. Um konzeptuelles Begriffsverständnis analysieren und beschreiben zu können, werden folgende Indikatoren samt Ausprägungen in Anlehnung an Harel (1997) und unter Berücksichtigung von Bestandteilen des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1984) und Vollrath & Weigand (2007) gebildet:

„Remembering". „Remembering" beinhaltet das Heranziehen von Bekanntem, das Erkennen von relevanten Aspekten sowie das Wiedererkennen von zuvor Kennengelerntem. Außerdem stellt das Herleiten von Erinnertem eine weitere Ausprägung des „Remembering" dar. Abgespeichertes Wissen, welches nur erinnert werden kann, solange es nicht vergessen ist, aber nicht selbst wieder hergeleitet werden kann, ist für das „Remembering" nicht ausreichend.

Kontextflexibles Wechseln. Es gibt verschiedene Sachverhalte, auf die ein Begriff angewendet werden kann und zwischen denen flexibles Wechseln einen Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis darstellt. Solche Sachverhalte sind in der Vektorraumtheorie beispielsweise der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, der Matrizen- oder der Polynomraum. Eine weitere Ausprägung ist das flexible Wechseln in Bezug auf die Repräsentationsform (vgl. Hillel 2000).

Beziehungen. Ein integriertes Begriffsverständnis beinhaltet immer mathematische Beziehungen. Dabei können Beziehungen zwischen Eigenschaften eines Begriffs, also in Bezug auf den Begriffsinhalt und Beziehungen zu anderen Begriffen und somit global und den Begriffsumfang betreffend, unterschieden werden.

Die drei[1] Indikatoren „Remembering", kontextflexibles Wechseln und Beziehungen stehen in Relation zueinander. So kann eine Beziehung zwischen zwei Begriffen beispielsweise in einen konkreten Sachverhalt eingebettet sein. Bei der Anwendung der Indikatoren als Analyseinstrument wird ebenfalls berücksichtigt, ob ihre Ausprägungen für eine Lösung der jeweiligen Aufgabe zielführend auftreten.

3. Untersuchungsdesign und Stichprobe

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung wurden klinische Interviews mit Lehramtsstudierenden durchgeführt. Dabei stand das zentrale und weitreichende Thema Basis mit zahlreichen Anknüpfungsmöglichkeiten an das Schulwissen im Vordergrund.

Untersuchungsinstrument: Gegeben wurde der Untervektorraum $\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 \mid 2\mathrm{x} = \mathrm{z} \right\} \subset \mathrm{R}^3$, dessen Darstellung den Studierenden aus der Vorlesung vertraut war. Die Studierenden wurden aufgefordert, eine Basis von U anzugeben und den Untervektorraum U geometrisch zu deuten.

Im Folgenden wird aufgezeigt, dass die Aufgabe zahlreiche Möglichkeiten bietet Beziehungen zu nutzen und Kontexte flexibel zu wechseln.

- Eine mögliche Basis ist $\mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, wobei die Bedingung $2\mathrm{x} = \mathrm{z}$ im ersten und die beliebige y-Komponente im zweiten Basisvektor gefasst ist.

[1] Harel (1997) erwähnt zusätzlich das *„Communicating"* als Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis.

- Die Bedingung $2x = z$, also $2x + 0y\text{-}z = 0$, kann auch als Koordinatenform einer Ebene aufgefasst werden.
- Durch Einsetzen von 2x für z und Separation nach Variablen ergibt sich folgende Linearkombination: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Denkbar wäre es auch, in der Darstellung von U das lineare Gleichungssystem $\left| \begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = 2x \end{matrix} \right|$ zu entdecken.
- Geometrisch stellt U eine zur x-z-Ebene senkrecht verlaufende Ebene dar, welche durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Stichprobe: Es wurden vier Einzelinterviews mit Lehramtsstudierenden geführt. Die Probandinnen und Probanden wurden nach ihrer Klausurnote (Noten: 1,3; 2,0; 2,3; 3,7) und Punkten in einer Klausuraufgabe zum Thema Basis (mindestens die Hälfte der Punkte sollten erreicht worden sein) ausgewählt.

4. Überblick über die Ergebnisse

Mit Hilfe der oben genannten Indikatoren wurden die Transkriptionen der Interviews qualitativ und detailliert mit Hilfe von Interpretationen analysiert. Nachfolgend werden Beispiele für die einzelnen Indikatoren gegeben.

„Remembering“. Eigenschaften in Bezug auf eine Basis von U werden von einer Probandin herangezogen und algebraisch betrachtet.

Kontextflexibles Wechseln. Diese Probandin deutet Eigenschaften des Untervektorraums U geometrisch und es gelingt ihr aufgrund fehlender Repräsentationswechsel nicht, die erkannten unterschiedlichen Aspekte aus algebraischem und geometrischem Kontext zu einer Gesamtargumentation zusammenzubringen. Bei anderen zeigt sich, dass eine geometrische Deutung der algebraischen Repräsentation von Basisvektoren als aufspannende Vektoren nicht gelingt, da nur Vielfache der jeweiligen Basisvektoren geometrisch gedeutet werden, nicht jedoch deren Linearkombination.

Beziehungen. Durch eine implizite Anwendung des Basisergänzungssatzes mit dem Ziel, Vektoren zu finden, die ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden, nutzt ein Proband Beziehungen zwischen Eigenschaften von Basen. Ein anderer Proband ist auf der Suche nach drei linear unabhängigen Basisvektoren. Dies stellt einen Widerspruch zur Teilmengenbeziehung dar. Die Beziehung zum Begriff Dimension wird von anderen Probanden genutzt, indem über die Dimension von U auf die Anzahl der Vektoren einer gesuchten Basis geschlossen wird.

Insgesamt konnten alle Probandinnen und Probanden die Aufgabe zum vertrauten Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ nach bestandenem Modul Lineare Algebra nicht (allein) lösen. Außerdem sind bei allen Teilnehmenden Schwierigkeiten mit der formalen Darstellung von U aufgefallen.

5. Exkurs: Schriftliche Gesamtbefragung

In einer schriftlichen Befragung wurden nahezu alle Studierenden, welche das Modul Lineare Algebra bestanden haben, aufgefordert, eine Basis zum Untervektorraum U anzugeben. Es zeigte sich, dass zwei Drittel aller 57 beteiligten Probanden keine richtige Basis angeben konnten.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S.& Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden, Vieweg+Teubner.

Carlson, D. (Hrg), Johnson, C.R. (Hrg), Lay, D.C. (Hrg), Porter, A.D. (Hrg), Watkins, A. (Hrg) & Watkins, W. (Hrg) (1997): Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42.

Harel, G. (1997): The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. In: Carlson, D. (Hrg), Johnson, C.R. (Hrg), Lay, D.C. (Hrg), Porter, A.D. (Hrg), Watkins, A. (Hrg) & Watkins, W. (Hrg). Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997. 107-126.

Hillel, J. (2000): Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: Dorier, J. (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. 191-207.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22.1-36.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Stuttgart, Klett.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007): Algebra in der Sekundarstufe. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. 3. Auflage. Heidelberg, Spektrum.