Oliver SCHMITT, Darmstadt, Regina BRUDER, Darmstadt

Grundwissen als Voraussetzung für Reflexionen – am Beispiel des Gaußalgorithmus

Das Themenfeld der linearen Algebra und analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II ist derzeit in der thematischen Ausrichtung kalkülorientiert. Die Bedeutung der fachlichen Gegenstände wird so nur unzureichend deutlich. Reflexionen bieten hier eine Möglichkeit Perspektiven für und über das Fach hinaus aufzuzeigen. Jene erfordern allerdings verfügbares Grundwissen. Der vorliegende Artikel soll am Beispiel des Gaußalgorithmus einen möglichen Weg hin zu einem reflexionsorientierten Curriculum aufzeigen, der dem aktuellen Arbeitsstand eines Dissertationsvorhabens entspricht.

1. Reflexionsbegriff

Skovsmose und Fischer kommen aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven zu ähnlichen Unterteilungen von Wissensformen über Mathematik: mathematisches Wissen, technologisches Wissen und reflektives Wissen bei Skovsmose (s. Skovsmose 1994, S. 47f) sowie Grundwissen, operatives Wissen und Reflexionswissen bei Fischer (s. Fischer 2001, S. 4f). Beide betonen dabei die besondere Wichtigkeit von Reflexionen für den zukünftigen Mathematikunterricht. Verschiedene Aspekte von Reflexionen werden auch bei anderen Autoren mit unterschiedlichem Fokus im Verhältnis von Mensch, Fach und Welt identifiziert. Das nebenstehende Schaubild, das sich an Lengnink (2006) orientiert, gliedert diese Fülle der Reflexionsaspekte mit einer Verortung in der Trias Mensch, Mathematik und Welt. Explizit betont werden soll dabei der Aspekt der historischen Reflexion, da alle anderen Reflexionsaspekte jeweils in einem bestimmten historischen Kontext zu verstehen sind und dieser ebenfalls der Reflexion bedarf.

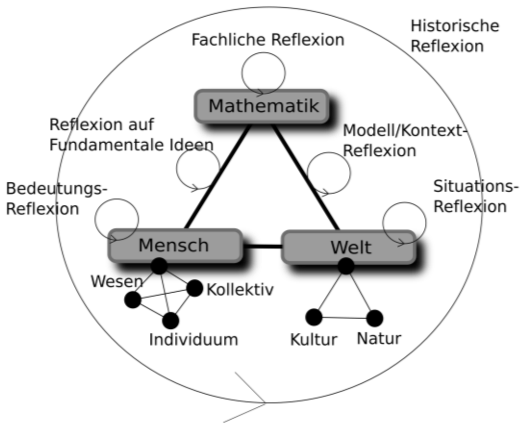

Abb.: Aspekte des Reflexionsbegriffs

2. Beschreibung von Grundwissen

Um diese Reflexionsaspekte im Unterricht verwirklichen zu können ist neben einer passenden Unterrichtskultur ein verfügbares Grundwissen notwendig. Dieses ist auch in pragmatischer Hinsicht in Bezug auf den

Rechnereinsatz oder Basiskompetenzen in der Diskussion. Eine Verbindung dieser Ansätze von einer erwünschten Reflexionsperspektive und verfügbarem Grundwissen im Sinne von Mindeststandards bietet sich an und kann beide Ansätze bereichern.

Zur Beschreibung dieses Grundwissens wird ein Begriffssystem von Bruder & Brückner (1989) herangezogen, das die dominierenden Schülerhandlungen im Mathematikunterricht erfassen soll. Gegründet auf elementare Denkoperationen von Lompscher werden dort auf verschiedenen Ebenen hierarchisch gegliedert komplexe Denkoperationen, Aneignungshandlungen, Grundhandlungen und komplexe Handlungen angegeben. Für die Anwendung auf die Beschreibung von Grundwissen werden die Grundhandlungen Erkennen, Beschreiben, Verknüpfen, Anwenden und Begründen verwendet.

Um Grundwissen zu identifizieren werden die mathematischen Begriffe, Sätze und Verfahren in einem semantischen Netz systematisch aufgebaut. Rechts und links davon werden wichtige Darstellungsarten sowie Ideen und Strategien zu den jeweiligen fachlichen Gegenständen notiert. Verschränkt mit der inhaltlichen Gliederung werden die jeweils erforderlichen Grundhandlungen festgehalten, die zusammen eine Beschreibung des Grundwissens liefern.

Dabei zeigen sich im Falle eines mathematischen Verfahrens drei wesentliche Einflüsse: die Durchführbarkeit, der fachliche Zugang sowie die gewählte Reflexionsperspektive (vgl. Greefrath 2011, S. 112). Die bloße Durchführbarkeit genügt nicht dem Anspruch eines sich systematisch über Jahre entfaltenden Mathematikunterrichts, der fachliche Zugang muss beachtet werden; für sich genommen wird durch diesen die Bedeutung der mathematischen Gegenstände nur unzureichend klar, eine Reflexionsperspektive muss beachtet werden.

3. Der Gaußalgorithmus mit Blick auf eine Reflexionsperspektive

Bestehende Aufgaben zum Thema beschränken sich oft auf das reine Ausführen des Gaußalgorithmus und einige, zum Teil durchaus komplexe, Interpretationen von linearen Gleichungssystemen und deren Lösungen. Der Mehrwert des Gaußalgorithmus gegenüber den bereits erlernten Verfahren aus der Sekundarstufe I wird auf diese Art nicht deutlich. Entsprechend unterschiedlich fällt auch die Motivation seiner Erarbeitung in Schulbüchern aus. So wird er in manchen Lehrwerken als günstig für große Systeme ohne elektronische Hilfsmittel bezeichnet in anderen aber gerade wegen seiner maschinellen Anwendbarkeit hervorgehoben, während bei der Rechnung ohne Hilfsmittel das Einsetzverfahren vorgezogen werden sollte. Bei Jahnke (2006, S. 404) wird für den Computer ein leicht beschreibbares, systematisches und immer funktionierendes Verfahren gefordert, das damit wesentliche Eigenschaften eines Algorithmus aufweist.

Um dem Gaußalgorithmus eine eigene Bedeutung im Unterricht zukommen zu lassen bietet sich an Jahnke anschließend die explizite Reflexion auf die fundamentale Idee des Algorithmus an. Wird diese verbunden mit einer historischen Reflexion, kann darüber hinaus aufgeklärt werden, in welchem Sinne eine Eignung für den Computer der wesentliche Vorteil ist, und dass höchstens im Fall einer entwickelten symbolischen Darstellung von linearen Gleichungssystemen das Einsetzverfahren bei der Anwendung ohne elektronische Hilfsmittel Vorteile aufweisen kann.

Wie eine Aufgabe, die eine solche Reflexionsperspektive aufweist, aussehen könnte, soll nun am konkreten Beispiel beschrieben werden (vgl. auch: https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/fileadmin/home/users/252/Folien_GDM_2012.pdf). Die Aufgabe gliedert sich in vier Teile. Zunächst wird den Lernenden eine moderne technische Darstellung des Gaußalgorithmus in Form eines Flussdiagramms und dazu ein detailliert ausgearbeitetes Beispiel sowie die historische Beschreibung der Fang-Cheng-Regel (vgl. Vogel 1968) gegeben, die im Kern dem Gaußalgorithmus entspricht. Beide Darstellungen sollen nachvollzogen werden. Im zweiten Aufgabenteil finden zunächst ein Vergleich und eine Zuordnung der einzelnen Abschnitte des Flussdiagramms zu den Beschreibungen der Fang-Cheng-Regel statt, anschließend sollen beide Vorgehensweisen an einer weiteren historischen Aufgabe aus dem alten China realisiert werden. Neben dem bloßen Anwenden des Gaußalgorithmus wird hier auch das Erkennen und Beschreiben der einzelnen Schritte als Grundhandlung verwirklicht. Im dritten Teil der Aufgabe sollen die Lernenden beide Regeln auf Eigenschaften eines Algorithmus, etwa auf den Algorithmusbegriff Ziegenbalgs (s. Ziegenbalg 2007) bezogen, untersuchen. Darüber hinaus sollen sie ergründen, was für eine Bedeutung Algorithmen in der modernen technischen Zeit haben und welche sie vermutlich im China vor 2000 Jahren hatten. Hier finden die entscheidenden Reflexionen statt: der Algorithmusbegriff wird am Beispiel des Gaußalgorithmus entwickelt, durch die historische Einbettung wird der Begriff über den eines Computerprogrammes hinausgehend erweitert. Im abschließenden vierten Teil sollen die Lernenden das Umformen bei der Rückwärtselimination mit den symbolischen Mitteln der modernen Algebra mit der heute schwerfällig anmutenden detaillierten Rechenbeschreibung aus dem alten China vergleichen, womit die Stärken einer algebraischen Darstellung herausgearbeitet werden können.

Nachdem Stärken von der Algorithmisierung und Algebraisierung aufgezeigt wurden, bietet es sich im Anschluss an diese Aufgabe an Fragen zu deren Grenzen zu thematisieren. Auch kann der Algorithmusbegriff durch eine Untersuchung seiner Bedeutung in Argumentationen, etwa bei der Frage der Invertierbarkeit einer Matrix, fachlich weiter vertieft werden.

4. Fazit und Ausblick

Zum Grundwissen über den Gaußalgorithmus, verstanden im Sinne von Mindeststandards, gehört auch Wissen über die Idee des Algorithmus, die zugehörige Grundhandlung ist etwa das Beschreiben seiner Eigenschaften. Dazu sollte eine Reflexion über die gesellschaftliche Bedeutung von Algorithmen, möglicherweise im historischen Kontext, treten. Die Reflexionsperspektive weitet Grundwissen über den fachsystematischen und pragmatischen Bereich hinaus, das Grundwissen zeigt Wege auf Reflexionsperspektiven zu verwirklichen.

In Zukunft sollen neben weiteren Reflexionsperspektiven für den Gaußalgorithmus auch zunehmend die anderen Themen der linearen Algebra und analytischen Geometrie einbezogen werden. Offene Fragen sind dabei die nach einem „Kern“ des notwendigen Grundwissens, der sich möglicherweise aus verschiedenen Reflexionsperspektiven extrahieren lässt, und die nach möglichen operativen Entlastungen durch Technik ohne dadurch das Grundwissen zu verhindern, das Reflektieren ermöglicht.

Literatur

Bruder, R.; Brückner, A. (1989): Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht - ein allgemeiner Ansatz. In: Pädagogische Forschung, 30, 72-82.

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. URL: http://imst3plus.uni-klu.ac.at/materialien/2001/fischer190901.pdf [Stand: 18.03.2012].

Greefrath, G.; Pinkernell, G. (2011): Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 64.2, 109-113.

Jahnke, T. u. a. (2006): Analytische Geometrie Lineare Algebra. Berlin, Cornelsen Verlag.

Lengnink, K. (2006): Reflected Acting in Mathematical Learning Processes. In: ZDM, 38/4, 341-349.

Skovsmose, O. (1994): Towards a critical Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics, 27, 35-57.

Vogel, K. (1968): Neun Bücher Arithmetischer Technik. Braunschweig, Vieweg.

Ziegenbalg, J. u. a. (2007): Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Frankfurt, Verlag Harri Deutsch.