Wolfgang SCHNEIDER, Augsburg

Affine und nicht affine synthetische Ebenen – ein Projekt in der 10. Jahrgangsstufe eines Augsburger Gymnasiums

Durch eine langjährige Geometrielehrtätigkeit an der Universität Augsburg angeregt, habe ich in der 10. Jahrgangsstufe eines Augsburger Gymnasiums ein Projekt ins Leben gerufen, bei dem es um einen wissenschaftlich exakten Zugang zur Geometrie geht. In den folgenden Abschnitten 1. bis 6. werden die wichtigsten Inhalte und Merkmale des Projekts beschrieben.

1. Zur Geschichte der Geometrie

Bei der eingangs erwähnten Thematik bietet sich als Anfang ein geschichtlicher Rückblick an, der mit den griechischen Philosophen Plato und Aristoteles beginnt. Kaum ein Schüler hat je von Euklid gehört, der Aristoteles folgend in seinen „Elementen" einen beeindruckend logischen Aufbau der Geometrie versuchte. Interessant ist insbesondere Euklids Versuch, das Wesen eines Punktes zu beschreiben. Eine wirklich zufrieden stellende Beschreibung ist Euklid letztlich nicht gelungen. Dieser Umstand und andere Schwachstellen im Werk des Euklid bewogen Ende des 19. Jahrhunderts zu einem Umdenken: Hilbert (1862 – 1943) bemerkte, dass nicht das Wesen eines Punktes entscheidend sei, sondern einzig die gegenseitige Beziehung von Punkten und Geraden, die durch plausible Gesetzmäßigkeiten (Axiome) geregelt sein müsse.

2. Inzidenzaxiome und synthetische Ebenen

Hilberts Denkansatz wird nun beschrieben. Man stelle sich eine Menge E vor, deren Elemente Punkte genannt werden, bezeichnet mit Großbuchstaben A, B, C,…, P,…,A1, A2, A3 usw.. Man stelle sich ferner eine gewisse Menge G von Teilmengen von E vor, wobei die Elemente von G Geraden genannt und mit Kleinbuchstaben a, b, c,…, g, h,…, g1, g2, g3 usw. bezeichnet werden. Das Paar (E, G) erfüllt sinnvolle Geometriegrundvorstellungen und heißt dann auch synthetische Ebene, wenn folgende Gesetzmäßigkeiten, die so genannten Inzidenzaxiome (I1) bis (I4), erfüllt sind:

(I1) Zu $A, B \in E$ gibt es $g \in G$ mit $A, B \in g$.

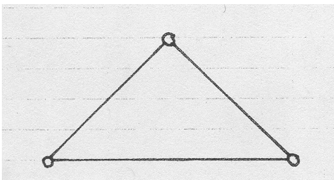
(I2) Zu $A, B \in E$ mit $A \neq B$ gibt es höchstens ein $g \in G$ mit $A, B \in g$.

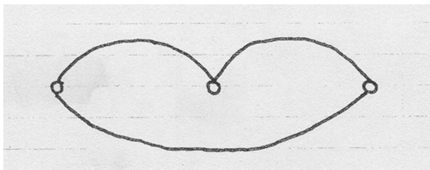
(I3) Auf jeder Geraden $g \in G$ liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

(I4) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die bei (I1) bis (I4) formulierten Anforderungen an ein System von Punkten und Geraden entsprechen genau dem, was ein Schüler nach einigen Jahren gymnasialer Schulgeometrie auch von Punkten und Geraden erwartet. Allerdings wirkt eine derartige Herangehensweise an eine Definition im Schulbetrieb befremdlich und bedarf einer sorgfältigen Vertiefung. Dementsprechend werden die Schüler zunächst einmal mit folgender Aufgabenstellung konfrontiert: E sei eine Menge von drei Punkten, sagen wir {A, B, C}. Wie sieht dann G aus?

Die Antwort ist elementar: Bei der Potenzmenge von E scheiden wegen (I3) die leere Menge und die einelementigen Teilmengen von E aus. Ebenfalls nicht infrage als Gerade kommt wegen (I4) die ganze Menge E. Es bleiben also {A, B},{A, C},{B, C}, die wegen (I1) zu G gehören müssen. Ist $|E|=3$, so ist (E, G) genau dann eine synthetische Ebene, wenn G die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E ist. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache eignen sich folgende Schemata:



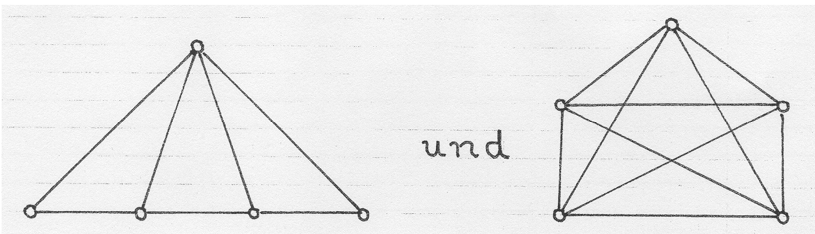


Die Aufgabenstellung wird nun von $|E|=3$ auf $|E|>3$ ausgeweitet. Wann ist (E, G) im Fall $|E|=4$, $|E|=5$, $|E|=6$ usw. eine synthetische Ebene?

Übrigens scheint jedem Schüler die Unabhängigkeit der Inzidenzaxiome intuitiv klar zu sein; wie allerdings beispielsweise nachgewiesen wird, dass (I1) keine Folge der übrigen Axiome (I2),(I3),(I4) ist, kann sich zunächst einmal kaum jemand vorstellen.

3. **Parallelität und affine synthetische Ebenen**

Wir stellen zwei synthetische Ebenen mit $|E|=5$ gegenüber:



Bei der links dargestellten Ebene besteht G aus einer Gerade mit 4 Punkten und vier Geraden mit 2 Punkten, bei der rechts dargestellten Ebene ist G die Menge der zweielementigen Teilmengen von E, d.h. es sind zehn Geraden mit je 2 Punkten.

Was fällt auf? Bei der links dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ niemals eine Parallele h zu g durch P, bei der rechts dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ stets zwei Parallelen zu g durch P. Dabei werden Geraden h und g als parallel bezeichnet (kurz $h \| g$), wenn entweder h=g oder $h \cap g = \{\ \}$ gilt.

Die gemachten Beobachtungen passen überhaupt nicht zum Vorstellungsvermögen der Schüler, sind sie es doch gewohnt, dass es zu einer Geraden g und einem Punkt P außerhalb von g genau eine Parallele zu g durch P gibt. Möchte man diese vom Schüler erwartete Eigenschaft bei einer synthetischen Ebene gewährleistet haben, muss man dies offensichtlich durch die Gültigkeit eines weiteren Axioms sichern, welches man Parallelenaxiom (P) nennt:

(P) Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h

mit $h \| g$, $P \in h$.

Eine synthetische Ebene, bei der zusätzlich auch das Parallelenaxiom (P) gilt, wird als affine synthetische Ebene bezeichnet. Beispielsweise ist die Ebene mit $|E|=4$ und G = {alle zweielementigen Teilmengen von E} affin. Die Ebene E mit $|E|=5$ und G= {alle zweielementigen Teilmengen von E} ist dagegen keine affine Ebene. Bei dieser Ebene macht man noch eine Entdeckung: Aus $g \| h$ und $h \| k$ folgt nicht zwingend $g \| k$, wie für E={A, B, C, D, E} das Beispiel g={A, B}, h={C, D}, k={A, E} zeigt.

4. **Aus den Inzidenzaxiomen folgende Eigenschaften synthetischer Ebenen**

Das streng logische Argumentieren im Rahmen mathematischer Beweise wird im alltäglichen Mathematikunterricht vernachlässigt. Die Eigenschaften synthetischer Ebenen sind ein ideales Terrain für das Einüben und auch selbständige Durchführen einfacher Beweise nach den Kriterien der strengen Logik. Folgende Sätze bieten sich an:

- Zu jeder Geraden gibt es einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.

- Jeder Punkt ist Durchschnitt zweier Geraden.

- Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade, die nicht durch den Punkt geht.

5. **Weitere Beispiele für synthetische Ebenen**

Ein unverzichtbares Beispiel ist natürlich die affine Ebene über einem Körper, insbesondere deshalb, weil hier eine hervorragende Verbindung zur Algebra hergestellt wird. Nach einer allgemeinen Klärung des Körperbegriffs kann man neben den Körpern Q bzw. R der rationalen bzw. reellen

Zahlen interessante andere Körper thematisieren: Körper zwischen Q und R, endliche Körper mit 2, 3 oder 4 Elementen. Bei der affinen Ebene über Q bzw. R erkennen die Schüler natürlich sofort „ihre“ Schulgeometrie wieder, durch das Eingehen auch auf andere Körper bekommen sie aber auch ein sicheres Gespür dafür, welch zahlreiche andere Möglichkeiten für synthetische Ebenen existieren. Noch beeindruckender für die Schüler sind Einblicke in das Klein'sche Modell bzw. die Poincare'sche Halbebene, wo es zu einer vorgegebenen Gerade g und einem Punkt P außerhalb von g unendlich viele Parallelen zu g durch P gibt.

6. **Endliche affine synthetische Ebenen**

Im Rahmen der ausschließlich auf den Inzidenzaxiomen beruhenden Eigenschaften synthetischer Ebenen haben die Schülerinnen bereits etliche kürzere Beweise kennengelernt. Nun sollen sie abschließend einen umfangreicheren Satz mit einem entsprechend umfangreicheren Beweis kennenlernen. Es geht um Eigenschaften einer endlichen affinen synthetischen Ebene.

Satz: Sei (E, G) eine endliche affine synthetische Ebene. Dann gilt:

a) Zu je zwei Geraden g1, g2 $\in$ G mit g1 $\neq$ g2, g1 $\cap$ g2 $\neq$ { } gibt es A $\in$ E mit A $\notin$ g1 $\cup$ g2 .

b) Jede Gerade umfasst die gleiche Anzahl m von Punkten.

c) |E| = m2

d) |G| = m2+m

Der Beweis, der bei detaillierter Durchführung mehrere Unterrichtsstunden in Anspruch nimmt, erweist sich als äußerst konstruktiv und informativ. Die Schüler lernen im Rahmen des Beweises die innere Struktur einer derartigen Ebene kennen und können danach sogar folgende schwierige Aufgabenstellung bewältigen:

Entwickle mit Hilfe des Satzbeweises ein Beispiel für eine affine synthetische Ebene mit 9 Punkten.

Die letzte Aufgabenstellung stellt den Schlusspunkt eines Projekts dar, das Mathematik in einer Form behandelt, die einen Einblick in typische Anforderungen eines universitären Mathematikstudiums gibt.

Literatur

Hilbert, D. (1962), Grundlagen der Geometrie, Teubner-Verlag,Stuttgart.

Kunz, E. (1975), Ebene Geometrie, Vieweg,Wiesbaden.