

Susanne SCHNELL, Dortmund

## **Beforschung von Vorstellungsentwicklungsprozessen– Ein Beispiel zum empirischen Gesetz der großen Zahlen**

Besonders in der Stochastik gibt es zahlreiche Untersuchungen zu Lernständen und–defiziten (Überblick z. B. in Jones 2007). Häufig kann beobachtet werden, dass Schülerinnen und Schüler im Stochastikunterricht zwar tragfähige Vorstellungen aufbauen, in Alltagssituationen aber dennoch auf alternative individuelle Vorstellungen zurückgreifen (vgl. Konold 1989). Um den Vorstellungsaufbau in der Stochastik zu unterstützen, erscheinen Einsichten in die *Prozesse der Vorstellungsentwicklung* bei Lernenden sinnvoll. Einen Ansatz zur Beforschung derer bietet die fachdidaktische Entwicklungsforschung, die zum Ziel einerseits das theorie- und empiriegeleitete Design adäquater Lerngelegenheiten, andererseits die Generierung einer gegenstandsspezifischen Theorie zu Lernprozessen hat (vgl. Prediger & Link 2012). Im Folgenden wird ein Projekt mit dem Schwerpunkt in der Theoriegewinnung zur Entwicklung von Vorstellungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen vorgestellt (Schnell in Vorbereitung).

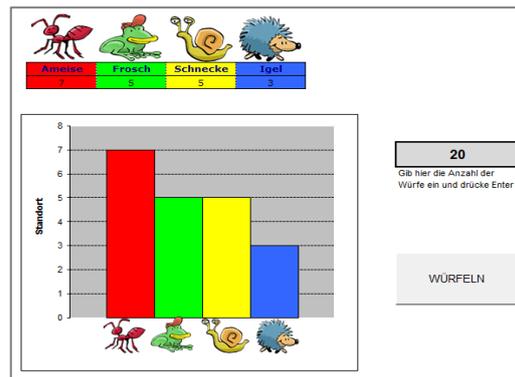
### **1. Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht als zentrale Herausforderung**

Empirische Vorarbeiten zeigen, dass Lernende häufig die Aussagekraft von Wahrscheinlichkeiten umdeuten: Anstelle einer Prognose über relative Häufigkeiten auf lange Sicht beziehen sie die Aussage direkt auf einzelne Ergebnisse (Konold 1989). So kann der Wert mathematischer Wahrscheinlichkeiten nicht erfasst werden. Daher hat sich eine Unterscheidung zwischen der kurzen und der langen Sicht als essentiell für den verständigen Aufbau tragfähiger Vorstellungen herausgestellt (Schnell & Prediger im Druck). Diesem Wahrscheinlichkeitsverständnis liegt das empirische Gesetz der großen Zahlen zugrunde, das in einem datengestützten Zugang zum Phänomen Zufall erkundet werden kann (ebd.).

### **2. Lehr-Lern-Arrangement ‚Wettkönig‘**

Auf Grundlage der fachlich-theoretischen Vorarbeiten wurde das Lehr-Lern-Arrangement ‚Wettkönig‘ (Prediger & Hußmann 2013) im Rahmen des Projekts Kosima entwickelt und erprobt (vgl. Hußmann et al. 2011).

Zentrales Element ist das Spiel ‚Wettkönig‘, das als Motivation für die Erkundung der Muster in den erzeugten Daten dient (Prediger & Hußmann 2013; hier wird nur die Variante ‚Wetten auf Sieg‘ vorgestellt). In dem Spiel laufen vier farbige Tiere in einem Wettrennen gegeneinander (zunächst in einem Brettspiel, später in einer Computersimulation, vgl. Abb. 1). Die Lernenden wetten vorab darauf, welches Tier gewinnen wird. Gespielt wird mit einem 20-seitigen Farbwürfel, dessen Farbverteilung nicht symmetrisch ist: Die rote Ameise hat mit sieben von 20 Seiten die größte theoretische Chance gewürfelt zu werden (vgl. Abb.1). Die explizite Fokussierung der Unterscheidung zwischen der kurzen und der langen Sicht findet statt über die Festlegung der Wurfanzahl: Vor Beginn wird bestimmt, nach wie vielen Würfeln das Spiel beendet werden soll (in der Simulation zwischen 1 und 10.000). Intendiert ist die Einsicht, dass die rote Ameise gemäß der Farbverteilung zwar die beste Wette ist, allerdings erst bei hohen Wurfzahlen ziemlich sicher gewinnt. Ergänzt wird das Lehr-Lern-Arrangement durch Arbeitsblätter und Untersuchungsaufträge, die den Fokus auf die Wurfanzahl unterstützen.



**Abb. 1:** Computersimulation ‚Wettkönig‘ mit Verteilung der Tiere entsprechend der Farbverteilung bei Wurfanzahl 20: Ameise: 7, Frosch & Schne-

### 3. Forschungsfrage und empirische Untersuchung

Das Lehr-Lern-Arrangement wurde im Sinne der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger & Link 2012) genutzt, um im Rahmen eines Dissertationsprojekts eine gegenstandsspezifische Theorie zu erarbeiten (Schnell in Vorbereitung). Erkenntnisleitend ist die Frage: „Wie verlaufen Prozesse der Vorstellungsentwicklung bei Schülerinnen und Schülern zum empirischen Gesetz der großen Zahlen?“

Das für die Design-Experimente in Laborsituationen angepasste Lehr-Lern-Arrangement wurde in der Hauptstudie in jeweils vier bis sechs aufeinander aufbauenden Sitzungen mit neun Paaren von Lernenden der sechsten Jahrgangsstufe einer Gesamtschule durchgeführt.

Ziel der Analyse ist die Beschreibung der Lernwege auf einer Mikro-Ebene. Hierzu wurden die Design-Experimente von zwei Paaren vollständig und von den anderen szenenweise transkribiert. Die Transkripte wurden zunächst sequenzanalytisch und dann über ein komparatives, kategorienbildendes Verfahren analysiert (adaptiert nach Schwarz et al. 2009). Zentrale Analyseeinheit bilden dabei die Konstrukte: Diese werden verstanden

als empirisch beobachtbare Bausteine von Vorstellungen, die in Netzwerken koordiniert und in spezifischen Kontexten verortet sind (ähnlich Pratt & Noss 2002). Im vorliegenden Artikel werden die Konstrukte hinsichtlich ihrer Proposition und Funktion vorgestellt und mit Großbuchstaben bezeichnet.

#### **4. Entwicklungsprozesse auf Konstruktebene bei Hannah und Nelly**

Die folgenden Sequenzen finden am Ende der ersten Design-Experiment-Sitzung mit Hannah und Nelly statt (nach ca. 80 Minuten). Unter anderem hat Nelly folgendes Konstrukt über ein Muster geäußert: <Die Reihenfolge der Tiere bleibt bei hohen Wurfzahlen immer gleich> (REIHENFOLGE-EMPIRISCH). Diese ordinale Betrachtung wurde von ihr rein empirisch abgeleitet, denn die Farbverteilung wurde von den Schülerinnen noch nicht entdeckt. Zur Zusammenfassung der empirischen Beobachtungen wurde eine Tabelle ausgefüllt, die zeigt, dass bei kleinen Wurfanzahlen alle Tiere mindestens einmal gewonnen haben, während bei hohen Wurfanzahlen ab 100 nur die Ameise gewonnen hat. Auf die anschließenden Fragen „Wann kann man sicherer wetten? Wieso?“ antwortet Hannah:

Hannah: „Ich meine eigentlich, dass man dahin schreiben sollte, dass das eigentlich ne reine Glückssache ist (...) Es kann aber auch passieren, dass ähm alle besser sind als die Ameise.“ (GLÜCKSSPIEL-2)

Hannah scheint davon auszugehen, dass alle beobachteten Muster rein zufällige Ergebnisse sind, da es sich um ein „Glücksspiel“ handelt. Dieses Konstrukt scheint die Funktion zu haben, eine Alternative zu Nellys REIHENFOLGE-EMPIRISCH darzustellen.

Im weiteren Verlauf des Experiments zählen die Mädchen auf einen Impuls der Interviewerin hin die Farbverteilung aus (FARBVERTEILUNG). Nelly verwendet FARBVERTEILUNG als stützende Erklärung für das Muster REIHENFOLGE-EMPIRISCH. Auch Hannah nutzt die neue Erkenntnis:

Hannah: „Also da wir das jetzt gezählt haben, denk ich, dass es darauf ankommt auf die Anzahl, wenn es zum Beispiel von jedem gleich viele wären- es sind ja insgesamt 20 [Seiten auf dem Würfel]. (...) und [man] dann von jedem zum Beispiel so fünf drauf tun würde.. (...) also dann würde das ein Glücksspiel werden.“ (GLÜCKSSPIEL-3)

Hannah greift die FARBVERTEILUNG auf und verwendet sie, um für ihr Konstrukt GLÜCKSSPIEL-2 einen neuen Gültigkeitsbereich zu schaffen, indem sie einen Würfel mit anderer Verteilung zugrunde legt. So gelingt es ihr, ihr anfängliches Konstrukt nicht zu verwerfen, sondern es mit den anderen Konstrukten FARBVERTEILUNG und REIHENFOLGE-EMPIRISCH zu koordinieren.

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Der Einblick in den Lernweg von Hannah und Nelly verdeutlicht exemplarisch, wie auf Ebene der Konstrukte Prozesse der Vorstellungsentwicklung verlaufen. Die Analyse über alle Lernendenpaare zeigt, dass Schülerinnen und Schüler häufig ihre Konstrukte nicht verwerfen, wenn sich Widersprüche ergeben. Stattdessen finden sie wie Hannah einen Weg, durch Änderungen des Gültigkeitsbereichs ein kohärentes Netzwerk von Konstrukten zu bilden (vgl. Schnell & Prediger im Druck; Schnell in Vorbereitung). Die Rekonstruktion dieser Mikroprozesse kann Aufschluss über spezifische Verläufe, Hürden und Chancen geben, was zur Konzeption neuer und/oder weiterführender Lerngelegenheiten genutzt werden kann.

## Literatur

- Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM Verlag, 419-422.
- Jones, G.A., Langrall, C.W., & Mooney, E.S. (2007): Research in probability: Responding to classroom realities. In Lester, F. K. (Hrsg.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 909-956). Charlotte, USA:Information Age Publishing.
- Konold, C. (1989): Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.
- Pratt, D. & Noss, R. (2002): The Micro-Evolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11(4), 453-488.
- Prediger, S. & Hußmann, S. (2013): Spielen, Wetten, Voraussagen - Dem Zufall auf die Spur kommen. Erscheint in: Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.): *mathewerkstatt 6*. Cornelsen, Berlin.
- Prediger, S. & Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Erscheint in: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.): *Formate Fachdidaktischer Forschung*. Münster: Waxmann.
- Schnell, S. (in Vorbereitung für 2013): *Entwicklung von Schülervorstellungen zum Phänomen Zufall (Arbeitstitel)*. Dissertation. (Betreuerin: S. Prediger).
- Schnell, S. & Prediger, S. (im Druck): From “everything changes” to “for high numbers, it changes just a bit” Theoretical notions for a microanalysis of conceptual change processes in stochastic contexts. Erscheint in: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (2009): The nested epistemic actions model for abstraction in context. In dies. (Hrsg.): *Transformation of Knowledge through Classroom Interaction* (S. 11-41). London, New York: Routledge.