

Ute SPROESSER, Sebastian KUNTZE, Joachim ENGEL, Ludwigsburg

## **Wissen zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ – Ergebnisse einer Studie mit Realschülerinnen und Realschülern**

Das mathematische Beschreiben funktionaler Zusammenhänge und deren Nutzung in Problemlöse- und Modellierungskontexten sind mit Begriffswissenskomponenten wie Wissen zum Zuordnungs- und Kovariationsaspekt verknüpft (Malle, 2000; Vollrath, 1989, 2007). Solches Begriffswissen zu funktionalen Zusammenhängen erfordert es nicht nur, Funktionen als Zuordnungen aufzufassen, sondern es ist insbesondere für Modellierungssituationen, in denen mit realen Daten umgegangen werden muss, erforderlich, Funktionen als Entitäten aufzufassen, durch die die Kovariation zwischen variablen Größen beschrieben wird. Die Komplexität von Problemstellungen im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (KMK, 2004) wird also – auch im Sinne der Stufen von Vollrath (2007) – davon beeinflusst, ob gegebene Zuordnungsvorschriften genutzt werden können oder ob ein zugrunde liegender funktionaler Zusammenhang etwa über mehrere Wertepaare hinweg erst anhand der Kovariation der beteiligten Größen beschrieben werden muss. Im Zusammenhang mit derartigen qualitativ bedeutsamen Stufen kann Komplexität auch durch die Anzahl auszuführender Denkschritte oder durch die Anzahl zu verknüpfender Wissensseinheiten (Neubrand, 2002) vorhergesagt werden. Beispielsweise erfordert ein explorierendes Abgleichen zwischen mehreren Wertepaaren mit dem Ziel des Beschreibens von Kovariation bzw. des Typs eines funktionalen Zusammenhangs in der Regel ein mehrschrittiges Vorgehen. Entstammen die Werte realen Daten, so muss ferner mit statistischen Abweichungen umgegangen werden, was das Beschreiben von Kovariation schwieriger macht und die Anzahl zu leistender Schritte in der Regel erhöht (Carlson et al., 2002). Begriffswissen zu funktionalen Zusammenhängen schließt ferner Wissen zu verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen und dem Wechseln zwischen Darstellungen mit ein (z.B. Vollrath, 1989 bzw. 2007). Auch diesbezüglich kann die Komplexität von Problemstellungen erhöht werden (vgl. z.B. Duval, 2006).

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, inwiefern Wissen zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ im Sinne hierarchisch gestufter Niveaus beschrieben werden kann. Mit Hilfe der oben überblicksartig skizzierten theoretischen Überlegungen wurde für eine empirische Untersuchung das in Tabelle 1 wiedergegebene Niveaumodell entwickelt.

Dieses Niveaumodell erstreckt sich von basalem Wissen im Sinne des „elementaren Nutzens gegebener Zuordnungsvorschriften“ bis hin zum

„Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation mit realen Daten“. Beim Nutzen gegebener Zuordnungsvorschriften ist anders als auf den Niveaus III und IV ein Blick auf funktionale Zusammenhänge im Sinne einer Entität oder eines mehrschrittigen Explorierens bzw. Beschreibens von Kovariation nicht erforderlich. Auch ein kritisches Reflektieren von Abweichungen in Daten (wie es auf Niveau IV notwendig wird) oder das Durchlaufen von Modellierungskreisläufen spielt auf diesem elementaren Niveau noch keine Rolle. Auf Niveau II ist der funktionale Zusammenhang nicht explizit oder formal gegeben, sondern muss durch elementares Modellieren aus einer Sachsituation erschlossen werden. Hier spielt auch der Aspekt der Kovariation eine etwas größere Rolle, da elementare Sachkontexte hier Aufschluss zur gemeinsamen Variation zweier Größen geben können. Auf Niveau III ist es erforderlich, mit Hilfe von Aussagen über die Kovariation von Größen funktionale Zusammenhänge beschreiben zu können und diese auch im Sinne von Modellierungsschritten nutzen zu können. Auf Niveau IV tritt ein kritisches Reflektieren vor dem Hintergrund von Abweichungen hinzu, wie sie bei realen Daten oft vorkommen.

*Niveau Beschreibung*

I	Elementares Nutzen gegebener Zuordnungsvorschriften
II	Elementares Modellieren durch Nutzen funktionaler Zusammenhänge in Sachkontexten (Zuordnungsvorschrift nicht explizit gegeben aber durch Sachkontext nahegelegt, Rückgriff auf elementares Begriffswissen zum Kovariationsaspekt denkbar)
III	Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation, wobei mehrere Schritte in einem Modellierungskreislauf denkbar sind
IV	Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation und dem Erfordernis des Reflektierens funktionaler Zusammenhänge anhand realer Daten

Tabelle 1: Niveaumodell zu Begriffswissen im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

Bezüglich dieses Modells ist von Interesse, inwiefern sich die Überlegungen zu Komplexitätsniveaus auch empirisch zeigen. Im Zentrum des Untersuchungsinteresses stand daher die folgende Fragestellung:

*Kann das oben vorgestellte hierarchische Modell zu Wissen von Schülerinnen und Schülern zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ mit Hilfe eines geeigneten Testinstruments empirisch bestätigt werden?*

## Untersuchungsdesign

Um diese Forschungsfrage zu beantworten, wurde 204 Realschüler(inne)n der 9. Jahrgangsstufe (94 Schülerinnen und 109 Schüler, 1 ohne Angabe) ein Test vorgelegt, in dem Aufgaben im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ enthalten waren. Die Aufgaben des Tests waren entspre-

Vervollständige die Tabelle:

x	x+16
1	17
4	
20	

Ergänze die folgende Preistabelle für Katzenfutter in Dosen

Anzahl Dosen	Preis in €
1	0,60
2	
	3,00
10	

Jana möchte herausfinden, wie die Höhe einer Kerze von ihrer Brenndauer abhängt. Allerdings kann sie mit ihrem Geodreieck die Höhe der Kerze nicht sehr genau messen. Das folgende Diagramm zeigt zu 6 verschiedenen Zeitpunkten (in Stunden) die Höhe der Kerze (in cm).

*Kreuze an und begründe.*

Lässt sich eine Voraussage über die Höhe der Kerze nach einer Brenndauer von 4 Stunden treffen?

Ja  Nein Begründung: [...]

Wenn du oben „ja“ angekreuzt hast: An welche Voraussage denkst du dabei?

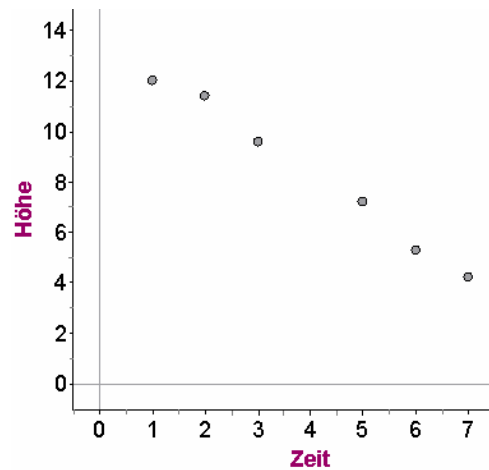


Abb. 1: Beispielaufgaben für die Niveaus I, II und IV

chend der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Niveaus konzipiert. Beispielaufgaben für die Niveaus A, B und D sind in Abb. 1 wiedergegeben. Der Test fand im Rahmen des Projekts RIKO-STAT (vgl. z.B. Kuntze, Engel, Martignon & Gundlach, 2010) statt.

## Ergebnisse

In Abb. 2 sind die Lösungsraten der Schüler(innen) bezüglich der Niveaus dargestellt. Mit Ausnahme der Niveaus I und II fallen die Lösungsraten ab, was auf ein ansteigendes empirisches Komplexitätsniveau hindeutet.

## Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass die Niveaus I und II entgegen der ursprünglichen Erwartung einen vergleichbaren empirischen Komplexitätsgrad aufwiesen. Nimmt man diese beiden unteren Niveaus jedoch zusammen, so sprechen die Befunde für ein hierarchisches Modell für Wissen zur Leitidee

„Funktionaler Zusammenhang“, das anhand dreier grober Stufen beschrieben werden kann.

Die Ergebnisse dieser Studie müssen jedoch mit Vorsicht interpretiert werden. Bedarf an Anschlussforschung besteht u. a. zu den Fragestellungen der empirischen Verbreiterung der Befunde auch anhand einer größeren Itemanzahl, der Übertragbarkeit des Modells über Altersstufen und Kulturgrenzen hinweg oder der Untersuchung von Verknüpfungen mit anderen Kompetenzmaßen und allgemeiner mathematischer Kompetenz.

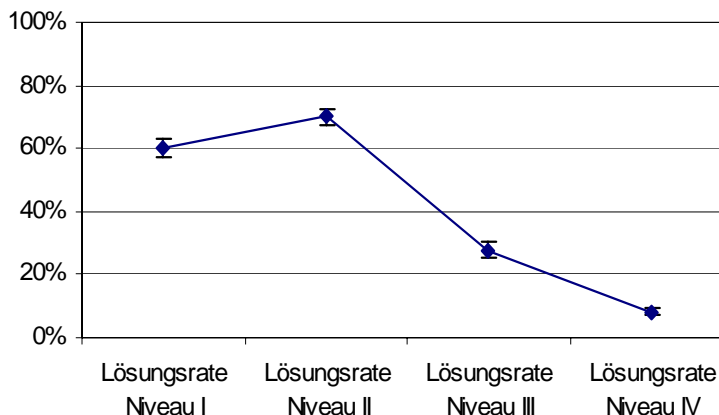


Abb. 2: Antworten von Realschüler(inne)n  
(9. Jahrgangsstufe, N=204)

## Danksagung

Diese Studie wurde mit Forschungsmitteln der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg gefördert.

## Literatur

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, T., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.33, No.5, 352-378.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- KMK (Kultusministerkonferenz). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.
- Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the project RIKO-STAT. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of ICOTS8*. Voorburg: ISI. [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php) [Refereed paper].
- Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, 8-11.
- Malle, G. (1993). *Did. Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Vollrath, H. & Weigand, H. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. München: Spektrum.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3-37.