Astrid BRINKMANN, Münster, Michael BÜRKER, Freiburg

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Im Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM, gegründet 2009, wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2012 wurde durch einen Vortrag von Michael Bürker eingeleitet. Anschließend wurde über bisherige und geplante Aktivitäten des Arbeitskreises berichtet, insbesondere über den Stand der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ sowie Tagungen des Arbeitskreises einschließlich gebotener Lehrerfortbildungen.

Wir geben nachfolgend Kurzfassungen zu den einzelnen Tagungsordnungspunkten:

Top 1. Michael Bürker: „Zur Behandlung des Gaußschen Minimumprinzips bei linearer Regression“

In vielen Bundesländern ist im Mathematikunterricht ein grafischer oder sogar CAS-Rechner zugelassen bzw. gefordert. Im Rahmen des Seminars „Medieneinsatz im Mathematikunterricht“, das ich für Studierende des gymnasialen Lehramts an der Uni Freiburg anbiete, diskutieren wir öfters über den Einsatz der im Mathematikunterricht zur Verfügung stehenden Software wie z. B. Tabellenkalkulation oder Geometrie-Software bzw. den Einsatz der erwähnten grafischen Taschenrechner. Dabei zeigt sich oft auch eine kritische Meinung zum Medieneinsatz, der sich in etwa folgendermaßen äußert: Einerseits kann man solche Rechner sehr gut zur Modellierung von realitätsnahen Problemen einsetzen, denn sie entlasten die Schüler von „Rechenknechtaufgaben“. Die Schüler können sich auf die wesentlichen Elemente der Modellierung stützen und die manchmal lästige und fehleranfällige Ausführung von Rechnungen den Kleinrechnern überlassen. Andererseits verführt das mathematische Potential dieser Rechner dazu, auch die kleinsten und einfachsten Rechnungen nicht mehr selbst „von Hand“ durchzuführen, sondern vom Rechner machen zu lassen, z. B. die Ableitung von x^2 oder das Ausmultiplizieren von $(a + b)^2$. Dementsprechend wird auch die lineare, quadratische, kubische oder exponentielle Regression vom Rechner als „Black-Box“ durchgeführt, ohne dass die Lernenden darauf hingeführt werden, Einblick in das Innere dieser Black-Box zu bekommen.

In diesem Vortrag wird gezeigt, wie man an Hand eines einfachen Beispiels von 4 Datenpunkten, denen ein linearer Zuammenhang zu Grunde liegt, zur Ausgleichsgeraden nach dem „Gauß'schen Prinzip der kleinsten Quadrate“ kommt. Im Mathematikunterricht kann man dies als Beispiel für eine Extremalaufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung (Ableitung gleich 0 setzen usw.), aber auch ohne jede Differentialrechnung als Scheitelbestimmung einer quadratischen Funktion behandeln. Als Beispiel nehmen wir 4 Punkte $P_1(0|2)$, $P_2(2|3)$, $P_3(4|5)$ und $P_4(6|6)$. Die Ausgleichsgerade hat die Form $y = mx + c$. Die Summe der Residuenquadrate führt zum Term

$$(0m + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2 + (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2 \qquad (1).$$

Das didaktische Problem ist nun noch, dass in diesem Term zwei Variable, nämlich m und c vorkommen. Da die Minimumbestimmung für Funktionen zweier Variablen in der Schule nicht zur Verfügung steht, müssen wir versuchen, eine der beiden Variablen durch eine weitere Bedingung zu eliminieren. Diese besteht darin, dass **der arithmetische Mittelpunkt der 4 Datenpunkte auf der Ausgleichsgeraden liegt**. Eine schülergerechte Begründung dafür werden wir untenstehend angeben. Der arithmetische Mittelpunkt M, dessen Koordinaten sich durch das arithmetische Mittel der x-Werte bzw. der y-Werte der 4 Punkte ergeben, hat bei den gegebenen 4 Datenpunkten die Koordinaten (3|4). Die Punktprobe mit M(3|4) ergibt die Gleichung $4 = 3m + c$ oder $c = 4 - 3m$. Setzt man dies in Gl. (1) ein, so ergibt sich als zu minimierender Term $2(3m - 2)^2 + 2(m - 1)^2$ bzw. ausmultipliziert und vereinfacht $20m^2 - 28m + 10$. Mit Hilfe der Differentialrechnung oder der Scheitelbestimmung einer quadratischen Funktion ergibt sich $m = 0{,}7$ und damit $c = 1{,}9$, d. h. die Ausgleichsgerade hat die Gleichung $y = 0{,}7x + 1{,}9$. Dies sind einfache Zahlenwerte, mit denen sich die Ausgleichsgerade gut zeichnen lässt.

Warum liegt der arithmetische Mittelpunkt einer Punktwolke auf der Ausgleichsgeraden?

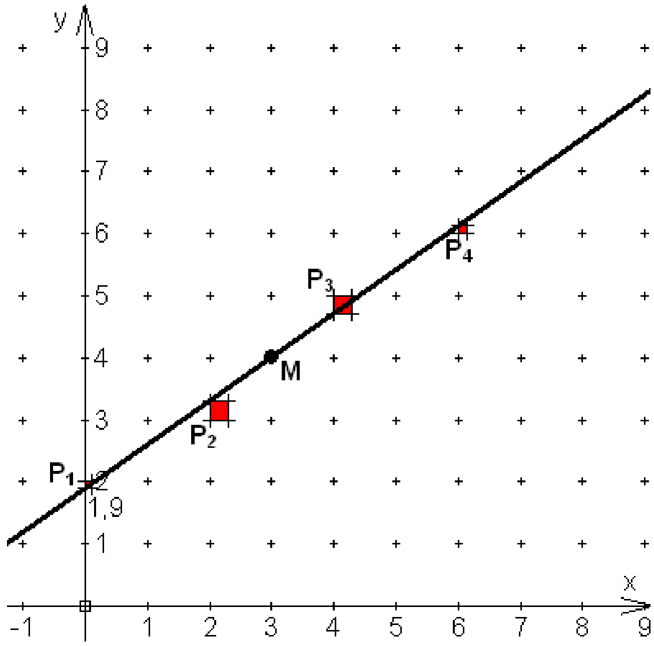
Wir betrachten dazu zunächst das „eindimensionale“ Problem:

Auf der y-Achse sind n Punkte gegeben. Bestimme den Punkt $P_0(0|y)$ auf der y-Achse, für dessen y-Wert die Summe der Abstandsquadrate zu den n Punkten minimal wird. Das bedeutet, dass der Term

$$(y - y_1)^2 + \ldots + (y - y_n)^2$$

zu minimieren ist. Leitet man nach y ab und setzt die Ableitung gleich 0, so ergibt sich $2(ny - (y_1 + \ldots + y_n)) = 0$ und damit $y = 1/n(y_1 + \ldots + y_n)$.

Das bedeutet: Der y-Wert des optimalen Punkts auf der y-Achse ergibt sich als arithmetisches Mittel der y-Werte der n Punkte. Eine entsprechende Betrachtung für n Punkte auf der x-Achse liefert: Der Punkt, dessen x-Wert das arithmetische Mittel der x-Werte der n Punkte auf der x-Achse ist, ist der optimale Punkt. Zusammen genommen hat im obigen Beispiel der Punkt M(3|4) die optimale Lageeigenschaft hinsichtlich der Abstandsquadrate der 4 Punkte $P_1, \ldots, P_4$ und liegt daher auf der Ausgleichsgeraden.



Top 2. Astrid Brinkmann:
Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

Die Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Verlag Aulis) ist eine Publikation des GDM-Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“. Herausgeberin der Reihe ist Astrid Brinkmann.

Nachdem Anfang 2011 der erste Band der Reihe erschienen ist, wurde nun auch der zweite Band pünktlich vor der Didacta fertiggestellt. Die Herausgeber des zweiten Bandes sind Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß und Hans-Stefan Siller.

Die Autor/innen der Schriftenreihe präsentieren Ideen und Vorschläge zum Mathematikunterricht, die im Arbeitskreis diskutiert, verbessert und angereichert worden sind. Die Schriftenreihe richtet sich an Mathematiklehrende an Schulen. Die einzelnen Artikel sind daher so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Für weitere Details, insbesondere zum zweiten Band, verweisen wir auf den Artikel von Astrid Brinkmann in diesen Beiträgen zum Mathematikunterricht 2012.

Der dritte Band der Schriftenreihe (Hrsg.: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Michael Bürker) ist in Arbeit und soll Anfang 2013 vorliegen. Zudem wird noch ein Materialband mit Kopiervorlagen zu den Bänden 1–3 erstellt.

Wir möchten ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für die Schriftenreihe einzureichen! (An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

Top 3. Astrid Brinkmann: Kurzbericht über die 3. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin, 13.–14. Mai 2011

Die dritte Tagung des Arbeitskreises wurde von Andreas Filler, Katharina Klembalski und Swetlana Nordheimer organisiert. Die Tagung hat ein reichhaltiges Programm geboten und war sehr gut besucht. Die Rückmeldungen von den teilnehmenden Lehrer/innen waren sehr erfreulich. Kurzfassungen der Tagungsbeiträge findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Top 4. Astrid Brinkmann: Einladung zur 3. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Universität Passau, 27.–28. April 2012

Die vierte Tagung des Arbeitskreises wird von Matthias Brandl organisiert. Das Tagungsprogramm steht bereits fest (siehe: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html); Flyer hierzu wurden auf der GDM-AK-Sitzung 2012 ausgeteilt.

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2011): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2836-8.

Brandl, M., Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2012): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 2. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2859-7.

AK-Tagungen: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html