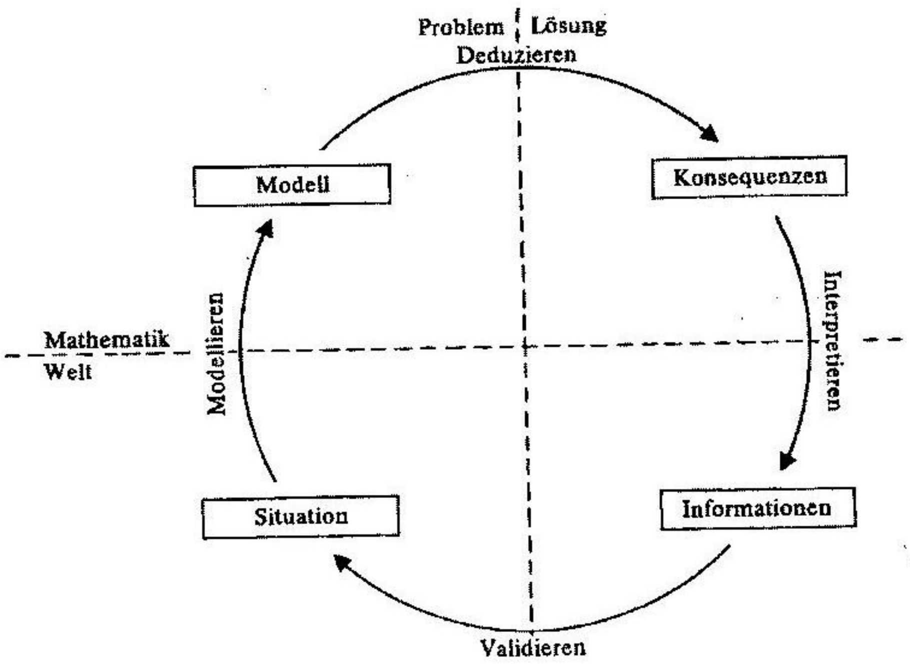
Horst STRUVE, Köln

Ein Fallbeispiel zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Die Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen

Wie wird mathematisches Wissen entwickelt? Ein in den letzten Jahren viel diskutierter Ansatz beschreibt den Prozess der Entwicklung von Mathematik mit Hilfe von Modellierungskreisläufen, etwa dem folgenden von H. Schupp:



Die zugrundliegende Vorstellung ist die eines Optimierungsprozesses: Ein mehrfaches Durchlaufen des Kreislaufes optimiert den mathematischen Ansatz. – In dem Vortrag wurde an einem Fallbeispiel untersucht, ob mit Hilfe eines solchen Kreislaufes auch die Entwicklung einer Theorie und nicht nur einzelner Anwendungen von solchen Theorien angemessen beschreibbar ist.

Das Beispiel stammt aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist heutzutage für viele Theorien grundlegend, beispielsweise für physikalische Theorien (kinetische Gastheorie), psychologische Theorien (Dissonanztheorie), mathematische Theorien (Kolmogoroff), ökonomische Theorie (Mikroökonomie) und normative Theorien (Entscheidungstheorien). Historischer Ursprung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs waren aber Probleme der Gerechtigkeit von Glücksspielen. - Die Entwicklung der *Theorie der Gerechtigkeit von Glückspielen* kann man als das Herstellen eines *reflective equilibrium,* eines Überlegungsgleichgewichtes beschreiben. Dieser Begriff stammt von J. Rawls (1971), der in seinem berühmten Werk *A Theory of Justice*, eine gerechte Gesellschaftsordnung diskutiert. Sein Ansatz ist in der Rechtsphilosophie aufgrund der umfassenden politischen und sozioökonomischen Überlegungen und ihres beispielhaften methodischen Vorgehens intensiv diskutiert worden.

Die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen lässt sich in drei Abschnitte unterteilen. Zunächst wurden zahlreiche mit bestimmten Glücksspielen zusammenhängende Probleme diskutiert. Sodann wurden Prinzipien einer Theorie formuliert, die auf die untersuchten Einzelprobleme anwendbar waren. Schließlich wurde ein Überlegungsgleichgewicht zwischen auf die Einzelprobleme sich beziehende Urteilen und den Prinzipien herausgearbeitet. – Insgesamt zeigt sich, dass für die Durchsetzung der heute allgemein akzeptierten Gerechtigkeitsvorstellung nicht Optimierungsprozesse i.S.v. von Modellierungskreisläufen wesentlich waren sondern Gründe der Theorieentwicklung, die nicht-inhaltlicher Art waren. – Im folgenden werden die genannten drei Phasen skizziert.

1. Diskussion von Einzelproblemen

Das Jahr 1654 gilt als das Geburtsjahr der Wahrscheinlichkeitstheorie, weil Fermat und Pascal in einem Briefwechsel übereinstimmend eine Lösung für ein Glücksspielproblem vorschlugen, das aus heutiger Sicht den modernen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet. Das *Teilungsproblem* – auch *force majeure* und *problem of points* genannt lautet wie folgt:

Zwei Spieler, A und B, haben eine Reihe von Spielen verabredet, die jeweils nur mit dem Gewinn des einen oder des anderen enden können. Ein Remis ist nicht möglich. Wer zuerst k viele (k eine natürliche Zahl) Spiele gewonnen hat, erhält den von beiden zu gleichen Teilen geleisteten Einsatz E. Durch höhere Gewalt müssen die Spieler bei einem Stand von a:b für Spieler A gegen Spieler B die Partien abbrechen. Wie ist der Einsatz gerecht zu verteilen?

Viele bekannte Mathematiker haben sich mit diesem Problem beschäftigt, weil es als ein paradigmatisches Beispiel für eine zu entwickelnde Theorie galt. Bemerkenswert ist die Vielzahl von unterschiedlichen Lösungen, die vorgeschlagen wurden, bzgl. k = 4 und a:b = 3:1 etwa Pacioli (1494) 3:1, Cardano (1539) 6:1, Tartaglia (1556) 4:1, Fermat (1654) 7:1, Pascal (1654) 7:1, Leibniz (1678) 5:1.

Versucht man Begründungen für die vorgeschlagenen Lösungen zu rekonstruieren, so stellt man fest, dass aus inhaltlicher Sicht kaum eine Lösung vor einer anderen ausgezeichnet ist. Beispielhaft ist dies in Struve, H. & Struve, R. (1997) ausgeführt.

Neben force majeure wurde eine Reihe von weiteren Glücksspielen bzgl. ihrer Fairneß diskutiert. Diese betrafen die Augensummen von einem oder mehreren Würfeln, das Ziehen verschiedenfarbiger Kugeln aus Urnen (mit oder ohne Zurücklegen), das Auftreten vorgegebener Zahlen und Zahlenfolgen beim Lotterie- und Rencontréspiel und viele weitere.

2. Formulierung von Prinzipien

Bei der Behandlung zahlreicher verschiedener Einzelprobleme bildeten sich schließlich gewisse Prinzipien heraus, nach denen die Fairneß von Glücksspielen beurteilt wurde. Czuber (1898, S. 111) beschreibt die Auffassung der Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert folgendermaßen:

Es stand bei den genannten Geometern sowie bei ihren Nachfolgern in der Wahrscheinlichkeitslehre als Axiom fest, daß gleich mögliche Fälle gleich große Ansprüche auf die Spieleinlage begründen demjenigen, dem sie günstig sind; daraus ergab sich als Regel, daß die Spieleinlage zu teilen sei im Verhältnisse der Anzahlen der günstigen Fälle, welche jedem Spieler für die Realisirung des schließlichen Gewinnes zukommen.

Eine äquivalente Version des grundlegenden Prinzips wurde im 18. und 19. Jahrhundert wie folgt formuliert (Czuber, 1898, 111):

... der Begriff der mathematischen Hoffnung, der formal definirt wird als das Product einer zu erhoffenden Summe mit der Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen. Seine metaphysische Bedeutung wäre nach der vorgeführten Deduction dahin zu formulieren, die mathematische Hoffnung bedeute den Anteil der auf dem Spiel stehenden Summe, welcher demjenigen, der sie mit der bezeichneten Wahrscheinlichkeit erwartet, gebührte, wenn von der Entscheidung durch das Los oder den Zufall abgesehen würde.

Statt von "mathematischer Hoffnung" spricht man heute von "Erwartungswert". In moderner Terminologie lautet daher das von Czuber formulierte Prinzip: Eine gerechte Verteilung hat entsprechend den Erwartungswerten zu geschehen.

3. Herausbildung eines Überlegungsgleichgewichtes

Mit dem Begriff des Überlegungsgleichgewichtes bezeichnet Rawls das Ende eines Prozesses, in dem bzgl. einer normativen Theorie einerseits die Einzelurteile den Prinzipien angepasst werden und andererseits die Prinzipien im Hinblick auf konkrete Einzelurteile präzisiert und revidiert werden. Dieser Prozess lässt sich in der historischen Entwicklung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen nachzeichnen.

Ein prominentes Beispiel hierfür ist die Diskussion um das Problem *force majeure*. Die Fermat-Pascalsche Lösung setzte sich nicht deshalb durch, weil sie inhaltlich angemessener war, sondern weil sie besser zu den aufgestellten Prinzipien passte. Weitere Beispielsind das *problème des dés* - Was ist der gerechte Einsatz zweier Spieler, die zwei Würfel solange werfen bis zum erstenmal die augensumme 9 bzw. 10 erscheint? - und das *Problem des doppelten Münzwurfs* - Was ist der gerechte Einsatz zweier Spieler, die zweimal eine Münze werfen und um das Auftreten der von "Wappen" spielen? Zu beiden Problemen vertraten berühmte Mathematiker unterschiedliche Auffassungen.

Für eine ausführliche Darstellung der Theorie und der damit verbundenen Probleme sei auf Burscheid, H.J. & Struve, H. (2010) verwiesen. Insbesondere zeigt die Geschichte, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit keine vor Aufstellung der Theorie gegebene Bedeutung hatte, sondern erst durch die Theorie eine Bedeutung erhielt – nämlich eine mit physikalistischer Akzentuierung. Begriffe solcher Art nennt man *theoretische Begriffe*. Eine strukturalistische Darstellung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen findet man in Burscheid, H. & Struve (2000), in der auch die Problematik theoretischer Begriffe berücksichtigt wird.

Literatur

Burscheid, H.J. & Struve (2000): The Theory of Stochastic Fairness. In: Balzer et al.: Structuralist Knowledge Representation. Amsterdam, 69-98

Burscheid, H.J. & Struve, H. (2001): Zur Entwicklung und Rechtfertigung normativer Theorien – das Beispiel der Gerechtigkeit von Glücksspielen. Dialectica 55, S. 259-281

Burscheid, H.J. & Struve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Hildesheim

Czuber, E. (1898): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen - In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VII (Leipzig)

Rawls, J. (1971): A Theory of Justice. Cambridge (Mass.)

Struve, H. & Struve, R. (1997): Leibniz als Wahrscheinlichkeitstheoretiker. Studia Leibnitiana XXIX, 112-122