Kirsten WINKEL, Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Darstellen, Argumentieren, Reflektieren und der Nutzen von Metakognition – Eine Teilstudie des Projekts La viDa-M

Mathematische Objekte sind nicht direkt zugänglich. Um sich mit ihnen zu befassen, bleibt sowohl Mathematik-Experten wie auch Mathematik-Lernenden nichts anderes übrig als geeignete Darstellungen für sie zu finden. So kann es keinen Mathematikunterricht geben, der sich nicht mit Darstellungen befasst. Dabei umfasst der Begriff Darstellung mehr als nur *bildliche* und *handelnde* Veranschaulichungen: Auch eine *symbolische* Äußerung oder Notation des Schülers kann eine Darstellung eines mathematischen Sachverhalt sein. Für jeden mathematischen Sachverhalt gibt es geeignetere und ungeeignetere Darstellungen, aber es gibt keine Darstellung, die alle Facetten eines noch so einfachen mathematischen Objekts vollständig oder selbsterklärend zum Ausdruck bringt. Auf der einen Seite spielt daher die Kompetenz, flexibel mit verschiedenen Darstellungen umgehen zu können, eine Schlüsselrolle beim Verstehen von Mathematik (z. B. Duval 2006, Sjuts 2002). Diese Schlüsselrolle spiegelt sich ebenso in den KMK-Bildungsstandards wieder: Hier wird „Mathematische Darstellungen verwenden“ als eine der sechs „allgemeinen mathematischen Kompetenzen“ aufgeführt (KMK 2004). Auf der anderen Seite sind Darstellungswechsel häufig eine Verständnishürde beim Mathematiklernen (Ainsworth 2006): Es gibt nicht wenige Schüler und sogar Mathematikstudierende, die sich im Umgang mit Darstellungen schwer tun.

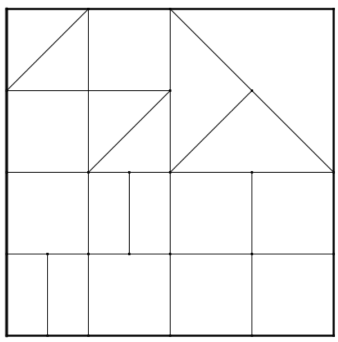
Im Unterricht werden - häufig stillschweigend - unterschiedliche Darstellungen desselben mathematischen Sachverhalts nebeneinander verwendet. Nicht selten wird zwischen diesen Darstellungen mit großer Selbstverständlichkeit hin und her gesprungen, ohne die Zusammenhänge zu thematisieren oder sich möglicher Verständnishürden für leistungsschwächere Schüler bewusst zu sein. Um jedoch eine Grundlage für tieferes Verstehen und für die Entwicklung tragfähiger mathematischer Vorstellungen in den Köpfen der Schüler zu schaffen, müssen genau diese Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungen für ein und dasselbe bewusst trainiert werden (Sjuts 2002, Kuhnke 2011). Rau, Aleven & Rummel (2009) konnten zudem über ein kontrolliertes Experiment zur Bruchrechnung zeigen, dass die Schüler mehr lernten, wenn sie multiple bildliche Darstellungen statt nur einer einzigen bildlichen Darstellung einsetzten, insbesondere dann, wenn die Schüler zum Argumentieren und Reflektieren darüber, wie die grafischen mit den symbolischen Darstellungen zusammenhängen, herausgefordert wurden.

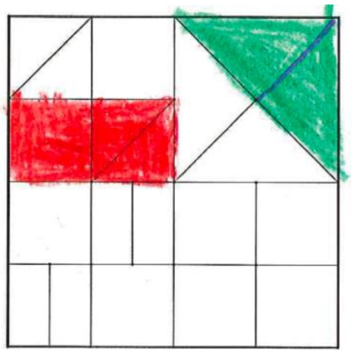
Sobald es gelingt, dass Schülerinnen und Schüler über die Zusammenhänge zwischen verschiedene Darstellungen nachdenken und diese reflektieren, dabei ggf. Fehler, Unstimmigkeiten oder Fehlvorstellungen ausfindig machen, werden zudem metakognitive Kompetenzen der Schüler angeregt: Die Schüler planen, überwachen und reflektieren ihre Denk- und Verstehensprozesse zu mathematischen Darstellungen (Sjuts 2002, Cohors-Fresenborg & Kaune 2007, Winkel 2012). Derartige metakognitive Kompetenzen wiederum haben nachweislich einen starken Einfluss auf den mathematischen Lernerfolg (z.B. Schneider & Artelt 2010). In der sehr groß angelegten Metastudie „Visible Learning“ konnte dieser starke Effekt von Metakognition - auch über das Fach Mathematik hinaus – auf breiter empirischer Basis klar bestätigt werden (Hattie 2009). Der große „Hebel“, den ein gezieltes Training von Darstellungswechseln und von metakognitiven Kompetenzen auf den mathematischen Lernerfolg hat, sollte in der Schulpraxis bewusst eingesetzt werden (z. B. Winkel 2013).

Genau hier setzt das Forschungsprojekt La viDa-M (Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht, gefördert durch Forschungsmittel der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg) (s. Dreher, Winkel & Kuntze, in diesem Band) an. Im Rahmen der ersten Phase des Projekts werden u. a. Schülerkompetenzen von 675 Sechstklässlern (aus 10 Gymnasien) beim Umgang mit vielfältigen Darstellungen von Brüchen sowie beim Argumentieren und Reflektieren über diese Darstellungen mehrebenenanalytisch untersucht (s. a. Dreher, Kuntze & Winkel, in diesem Band). Komplementär zur Testauswertung standen auch Validierungsfragen im Vordergrund. Die nachfolgenden exemplarischen Ausführungen fokussieren daher auf die folgende Forschungsfrage: *Wie zeigen sich die Kompetenzen Darstellen und Argumentieren in schriftlichen Schülerlösungen und welche Rolle spielt Metakognition bei gezielten Darstellungswechseln?*

Im Folgenden wird hierzu ein qualitativ-interpretativer Einblick in die Lösung eines Schülers gegeben:

Eine Aufgabe im Kompetenztest für die Schüler war es, im nebenstehenden Quadrat zunähst mit zwei farbigen Stiften so viele Teile auszumalen, dass „$\frac{2}{16}+\frac{2}{16}$“ dargestellt wird, und anschließend die Zusammenhänge zwischen ihrer eigenen ikonischen Darstellung und der gegebenen formalen Darstellung zu erläutern.





Die Teilflächen, die der Schüler in der nebenstehenden grafischen Darstellung farbig auswählt, entsprechen zusammen mit der vorgegebenen Einteilung des Gesamtquadrats zunächst noch nicht den geforderten Sechzehnteln aus der formalen Darstellung. Der Schüler erkennt das offenbar und passt seine grafische Darstellung genau an die formale Darstellung $\frac{2}{16}+\frac{2}{16}$ an: Aus $\frac{1}{8}$ macht er durch Hinzufügen einer neuen Unterteilungslinie in der grünen Fläche $\frac{2}{16}$ und aus $\frac{2}{32}$ macht er durch kräftiges Übermalen einer bestehenden Linie das zweite Sechzehntel seiner roten Fläche. Bereits ohne eine verbale Äußerung des Schülers werden erste Rückschlüsse auf seine guten Kompetenzen im Bereich des Darstellens von Brüchen möglich.

Man findet die Rechnung in meiner Darstelung weil ich erkannt habe, dass man sich nur einige Striche weg denken muss um 16 gleich große Teile zu bekommen. dann musste ich nur noch 2 dieser Teile rot und 2 grün anmalen.

Die anschließende Erklärung erfordert keine neuen inhaltsspezifischen Kompetenzen vom Schüler, sondern zielt lediglich darauf ab, dass der Schüler Überlegungen und Argumentationen über Zusammenhänge zwischen den beiden Darstellungen darlegt. Nicht nur in dieser Schülerlösung, sondern in fast allen erfolgreichen Schülerlösungen fällt auf, dass dabei häufig metakognitive Aktivitäten mit im Spiel sind. An der zuvor zitierten Schülerargumentation lässt sich das gut veranschaulichen, indem in die metakognitiven Aktivitäten Planung, Monitoring und Reflexion (in Anlehnung an Cohors-Fresenborg & Kaune 2007) farblich hevorgehoben werden:

> „Man findet die Rechnung in meiner Darstellung, weil ich erkannt habe, dass man sich nur einige Striche weg denken muss um 16 gleich große Teile zu bekommen. Dann musste ich nur noch 2 dieser Teile rot und 2 grün anmalen."

Im Begründungsteil seiner Aussage reflektiert der Schüler über das, was er bei seiner zuvor durchgeführten Anpassung der Unterteilungen in der grafischen Darstellung „erkannt" hat. Seine Schreibweise mit dem (offenbar nachträglich) eingeschobenen „gleich große" lässt vermuten, dass er sich beim Argumentieren oder beim Notieren selbst überwacht hat. Metakognitive Aktivitäten wie Reflektieren scheinen nützlich, um die Gemeinsamkeiten zwischen zwei konkreten Darstellungen zu abstrahieren. Guckt ein

Schüler sich beim Lösen der Aufgabe zudem „selbst über die Schulter“, entspricht das einer Monitoring-Aktivität. Sie hilft ihm, Fehler, Unstimmigkeiten oder Ungenauigkeiten in seiner „Übersetzung“ oder seiner Argumentation zu finden.

Die hier vorgestellte Aufgabe wurde insgesamt von weniger als 10% der 675 Gymnasiasten aus Klasse 6 vollständig gelöst. Damit zählt diese Aufgabe zu den schwierigsten Aufgaben des Kompetenztests. Als schwierigkeitsgenerierende Faktoren für die in der Aufgabe geforderten Darstellungswechsel und Erklärungen konnten in der qualitativen Analyse von Antworten der Lernenden das Darstellen, das Argumentieren und die dabei erforderliche Nutzung von Metakognition bestätigt werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183–198.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Hattie, J. (2009). Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement. New York: Routledge.

Kuhnke, K. (2011). Vorgehensweisen von Zweitklässlern beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Operationen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 503-506.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [10.01.2013, http://www.kmk.org/].

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. ZDM Mathematics Education 2/2010, S. 149-161.

Sjuts, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Journal für Mathematikdidaktik 2/2002, S. 106-128.

Rau, M., Aleven, V. & Rummel, N. (2009). I Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Winkel (2012). Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule. Ein designbasierter Unterrichtsversuch über vier Schuljahre. München: Dissertationsverlag Dr. Hut.

Winkel (2013, im Druck). Darstellungswechsel trainieren von Anfang an – Ein Schlüssel zum Verstehen von Mathematik. Erscheint in: Grundschulunterricht Mathematik 3/2013, 30-33.