Ingo WITZKE, Siegen

Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik.

Eine Auswertung von Einschätzungen Lehramtsstudierender der Universität zu Köln und der Universität Siegen lässt die Vermutung zu, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik im Rahmen eines fundamentalen Auffassungswechsels erlebt wird. Im folgenden Beitrag werden erste Ergebnisse der Auswertung offener Fragebögen, theoretische Grundlagen sowie eine daraus resultierende Konzeption einer mathematikdidaktischen Begleitveranstaltung vorgestellt.

1. Motivation: Fragebögen

Anschließend an eine Auswertung von offenen Fragebögen an der Universität zu Köln im vergangenen Jahr wurden zu Beginn diesen Jahres auch Studierende der Universität Siegen bzgl. ihrer retrospektiven Sicht auf den gemeinhin als schwierig bezeichneten Übergang (vgl. Henn et al. 2010) von der Schule in die Hochschule im Fach Mathematik befragt.

Auch wenn die Ergebnisse einer systematischen Inhaltsanalyse noch ausstehen, zeigt eine erste Durchsicht ein ähnliches Bild wie in Köln: Die Problematik des Übergangs - es wurden ca. 120 Lehramtsstudierende mit dem Hauptfach Mathematik befragt - wird zu einem nicht unbedeutenden Teil im Sinne einer „Andersartigkeit“ von Hochschulmathematik im Vergleich zur Schulmathematik beschrieben. Diese Andersartigkeit wird von den Studierenden exemplifiziert an Begriffen wie *Anschaulichkeit*, *Anwendungsbezug*, *Alltagsbezug*, *Realitätsnähe*, *Beweisführung*, *formaler Strenge* oder *axiomatischem Aufbau*.

Als ein vorläufiges Resultat der Befragung - unter Heranziehung von Forschungsarbeiten die Ähnliches beschreiben (u.a. Grünwald et al. 2004, Hefendehl-Hebeker 2010, Heinze & Rach 2013) - lässt sich festhalten, dass Studierende klar zwischen Schule und Hochschule bzgl. der vermittelten *Auffassungen von Mathematik* unterscheiden. Schoenfeld spricht in diesem Zusammenhang von *orientations, worldviews, dispositions*, *beliefs*, *values, tastes*, *preferences* und dem Begriff des *beliefsystems* (Schoenfeld 2011, S. 29) die wesentlich unser Handeln (gerade in mathematischen) Problemlösesituationen determinieren. Ausgangspunkt für die weitere Forschungsarbeit zur Thematik der Übergangsproblematik ist daher die Rekonstruktion und Gegenüberstellung von in Schule und Hochschule vermittelten Auffassungen von Mathematik aus Schulbüchern, Lehrbüchern und Skripten - unter der Prämisse eines konstruktivistischen Erkenntnismodells für mathematisches Wissen nach Heinrich Bauersfeld.

2. Verschiedene Mathematikauffassungen in Schule und Hochschule

Autoren einschlägiger Lehrbücher von Anfängervorlesungen lassen explizit (d.h. in Motivationskapiteln) sowie implizit (d.h. in der Darstellungsweise mathematischer Inhalte) häufig erkennen, dass sie eine *formale Mathematikauffassung* zu vermitteln suchen, die sich ideengeschichtlich an der formalistischen Mathematikauffassung von David Hilbert orientiert. So heißt es darin z. B., dass „[…] man all das zunächst als unnatürlich, unmenschlich und unvollziehbar [empfindet] was die Mathematik ausmacht“ was im Sinne einer „Helle und Schärfe der Begriffsbildung“, „Strenge der Beweise“ oder „abstrakten Natur der mathematischen Objekte“ näher beschrieben wird (Heuser 2009, 17. Aufl., S. 12).

Ganz anders stellt sich die Situation in Schulbüchern dar. Hier wird in weiten Teilen, gerade auch im Sinne der didaktischen Forderungen nach realitätsnahen Anwendungsbezügen, sowie des Arbeitens mit Anschauungsmitteln, eine *empirisch-gegenständliche Auffassung* von Mathematik vermittelt (Burscheid & Struve 2010). Diese zeichnet sich dadurch aus, dass Mathematik in der Schule in weiten Teilen reale Gegenstandsbereiche beschreibt (reale Zufallsexperimente in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bruchrechnung mit „Tortenmodellen“, Geometrie mit Zeichenblattfiguren, Analytische Geometrie mit „Vektorpfeilen“, Analysis mit Kurven…) und ihr Wahrheitsbegriff dadurch an gegenständlicher Überprüfbarkeit (in der Empirie) ausgerichtet ist. Der Prozess des Begründens ist bezogen auf eine *empirisch-gegenständliche Auffassung* von Mathematik dabei ein zweischrittiger: Während die Wissenssicherung (d.h. dass ein Sachverhalt gilt) häufig beispielgebunden und experimentell erfolgt, werden erst zum Zweck der Wissenserklärung (d.h. warum ein Sachverhalt gilt) logische Ableitungen verwendet. Dieses durch die ontologische Bindung der schulischen Mathematik bedingte Vorgehen unterscheidet sich wesentlich von der Art und Weise des Begründens in Hochschultexten, wo letztendlich ausschließlich formal-deduktive Ableitungen den strengen Beweiskriterien einer modernen Mathematik über abstrakte Entitäten genügen können.

Beide Auffassungen von Mathematik, *empirisch-gegenständliche* wie *formal-mathematische* unterscheiden sich - bei ihnen beiden innenwohnenden gleichen *Tätigkeiten* (Arbeit mit mentalen Repräsentationen, deduktives Schließen, Umgang mit einem symbolischem Kalkül…) - erheblich voneinander bzgl. der Natur ihrer Objekte, Begriffe oder ihres Wahrheitsbegriffes. Historische Fallstudien zur Entstehung mathematischen Wissens sowie der Vergleich mit klassischen Wegen zur Erkenntnisgewinnung in den Naturwissenschaften können in diesem Zusammenhang belegen (Witzke 2009), dass eine *empirisch-gegenständliche Mathematikauffassung,* vermittelt im *erklärenden* anschauungsgeleiteten Mathematikunterricht, eine tragfähige Grundlage für die Entwicklung mathematischen Wissens in der Schule darstellt (Witzke 2012). In Hinblick auf die Ausbildung typischer mathematischer *Tätigkeiten* kann sie zudem als ein wichtiges Fundament für weiterführende Konstruktion mathematischen Wissens im abstrakten *formal-mathematischen* Sinne in der Hochschule dienen.

Essenz der vorgestellten Überlegungen stellt aber die These dar, dass sich Schul- und Hochschulmathematik, begründet in ihren unterschiedlichen Zielsetzungen, bzgl. der vermittelten Auffassungen fundamental voneinander unterscheiden. Hier erscheint der von Sierpinska geprägte Begriff der epistemologischen Hürde eine den Sachverhalt treffende Beschreibung zu liefern (Sierpinska 1992).

3. Konzeption für eine mathematikdidaktische Begleitveranstaltung

Die beschriebene theoretische Grundlage ist ein Ausgangspunkt für die Konzeption einer mathematikdidaktischen Lehrveranstaltung, die begleitend zur fachmathematischen Lehramtsausbildung in Köln angedacht ist und Impulse des Siegener Projektes „Mathematik Neu Denken“ aufnimmt. Ihr erklärtes Ziel ist eine explizite Bewusstmachung von Auffassungsunterschieden in ihrer erkenntnistheoretischen Dimension. Der Ansatz baut dabei auf den guten Erfahrungen mit expliziten Ansätzen diese Thematik betreffend aus den Naturwissenschaftsdidaktiken („Nature of Science“) sowie mathematikdidaktischen Ansätzen zu Metakognition und Reflektion auf. Ziel ist es Transparenz über Auffassungsunterschiede herzustellen, v. a. durch eine Untersuchung mathematischer Fragestellungen an denen sich der oben angedeutete Auffassungswechsel in der Geschichte der Mathematik vollzogen hat. Da sich die Veranstaltung ausdrücklich an Lehramtsstudierende richtet, ist mit Blick auf ihr Berufsziel zudem die Adäquatheit verschiedener Auffassungen in verschiedenen Kontexten zu diskutieren.

Konkret unterteilt sich die Lehrveranstaltung dabei in vier Phasen: (I) *Sensibilisierung für die Frage nach Auffassungen von Mathematik*, durch A) Selbstreflektion/Diskussion, B) Arbeit mit empirischem Datenmaterial und theoretisch einordnenden Ansätzen sowie C) Gegenüberstellung von Methodenkapiteln und Inhalten von Lehrbüchern aus Schule, Hochschule und Geschichte der Mathematik. In Phase (II) folgt dann die *historische Einbettung am Fallbeispiel der Entwicklung der Geometrie* von Euklid über die projektiven Geometrien hin zu den nicht-euklidischen Geometrien und der damit einhergehenden Frage um die Grundlagen von Mathematik. In Phase (III) ist eine Diskussion über den *Charakter moderner formaler Mathematik* am Fallbeispiel der Grundlagen der Geometrie von Hilbert geplant. Da-zu gehören die Entwicklungsumstände wie das Werk selber; hier kann gewinnbringend diskutiert werden, was es bedeutet wenn Hilbert ansetzt „Wir denken drei Systeme von Dingen“ oder „Zwischen“ als dreistellige Relation axiomatisch definiert. In der abschließenden Phase (IV) *Reflektion und Zusammenfassung* sollen dann Zielsetzung, Aufgabe und Charakter moderner formaler Mathematik aus verschiedenen Blickwinkeln besprochen werden. Hierbei soll mit Hilfe von wissenschaftstheoretischen und -philosophischen (z.B. Davis et al. 1995) sowie modernen Lehrbüchern eine kritische Auseinandersetzung z. B. über die Rolle der Anschauung im modernen mathematischen Arbeiten ermöglicht werden.

Insgesamt zeichnet den hier geschilderten Ansatz aus, dass er die Problematik des Übergangs als epistemologische Hürde erkennen, verstehen und einordnen lassen will. Das Begleitseminar kann, so die Quintessenz aus den theoretischen Überlegungen, den Übergang in sich nicht erleichtern; die sich stellende Auffassungshürde liegt in der Natur der Sache. Es kann aber, so die Hoffnung der Verantwortlichen, eine Hilfestellung durch Identifikation, Verständnis und Diskussion bieten.

Literatur

Davis, P., Hersh, R., Marchiotto, E., (1995): The Mathematical Experience, Study Edition, Boston: Birkhäuser.

Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. , & Klymchuk, S. (2004): Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus internationaler und deutscher Sicht. Global Journal of Engineering Education, 8, 283-294.

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2010): Mathematik Besser Verstehen, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, I, S. 93-94.

Heinze, A., Rach, S. (2013): Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? In: Journal für Mathematik-Didaktik, 34 (1), S. 121-147.

Henn, H.-W., Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Kramer, J., Pinkernell, G. (2010): Schnittstelle Schule-Hochschule, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, I, S. 75-82.

Heuser, H. (2009): Lehrbuch der Analysis, 17. durchgesehene Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Schoenfeld, A., (2011): How We Think, In: Studies in mathematical thinking and learning, New York: Routeledge.

Sierpinska, A., (1992): On understanding the notion of function, in G. Harel and E. Dubinsky (Hrsg.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, Mathematical Association of America, United States (MAA), S. 25-58.

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Witzke, I. (2012): Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, II, S. 949-952.