Jan F. WÖRLER, Würzburg

Modellieren von Kunstwerken: ein anderer Modellierungskreislauf

„Das male ich Ihnen auch, das kann ja jeder!“ – ein Neuntklässler, der mir eben noch geholfen hat, die Videokameras in seinem Klassenzimmer aufzubauen, zeigt sich von dem Kunstwerk vorne an der Tafel wenig beeindruckt. „Ein paar bunte Quadrate sind doch keine Kunst!“ Als ich ihm den Preis nenne, den solche Kunstwerke auf Auktionen bringen, zieht er anerkennend die Augenbrauen hoch, setzt sich zurück in seine Gruppe und beginnt zu rätseln. „Finde heraus, was sich an Mathematik in diesem Bild verbirgt“, so lautet der knappe Arbeitsauftrag, den die Lernenden zu dem Kunstwerk bekommen haben.

Kunstwerke im Mathematikunterricht analysieren?

Der Schüler hat recht: Viele Werke der ‚Konkreten Kunst‘ sehen auf den ersten Blick einfach aus; oft gibt es nur wenige, klare Farben in den Bildern dieser Kunstgattung, starke Kontraste, die als geometrische Formen auf die Bildfläche gesetzt sind (s. Wörler 2009).

Auch das zu Grunde liegende theoretische Konzept ist klar formuliert: Die Werke sollen von den Künstlern exakt vorausgeplant sein und sich dabei aus nachvollziehbaren, logischen Regeln aufbauen (van Doesburg 1930). Auf dieser Basis verarbeiten Künstlerinnen und Künstler bis heute immer neue Bezüge zu mathematischen Themen, wie etwa einfache Zahlenfolgen, aber auch fraktale Geometrie oder Stochastik (s. Lauter & Weigand 2007).

Diese Forderungen machen die Werke der Konkreten Kunst für den Mathematikunterricht interessant: Das Aufdecken des bildbestimmenden Regelwerks, die Suche nach Mustern und logischen Zusammenhängen in einem Bild erfordert mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten. Die Schülerinnen und Schüler müssen dabei abstrahieren und generalisieren, relevante Größen und Zusammenhänge herausarbeiten. Sie rechnen, messen, falten Bildteile aufeinander, diskutieren und argumentieren, prüfen und verwerfen Hypothesen – und legen so schrittweise die Struktur und die Elemente frei, die der Künstler im Werk verarbeitet hat.

Derartige Vorgehensweisen treten in ähnlicher Form beim Problemlösen wie auch beim mathematischen Modellieren auf, was folgende Fragen aufwirft: Können Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe Werke der Konkreten Kuns analysieren? Und wenn ja: Wie gestaltet sich der Prozess der mathematischen Analyse eines Kunstwerkes?

Empirische Untersuchung – Ergebnisse

In einer explorativen Feldstudie wurde untersucht, wie Lernende mathematische Strukturen in Konkreten Kunstwerken (wieder-)entdecken und isolieren. Dazu wurden Kleingruppen von 5–6 SchülerInnen der Sek. I bei der mathematischen Analyse von Kunstwerken videografiert (s. Wörler 2012).

In den empirischen Daten zeigt sich, dass die Lernenden iterativ vorgehen: Schrittweise arbeiten sie die einzelnen bildbestimmenden Einflussgrößen heraus. In aller Regel wird dabei von einem Mitglied der Kleingruppe eine Vermutung aufgestellt („Die Quadrate im Bild könnten immer doppelt so groß sein!“), woraufhin Teile der Gruppe diese Hypothese überprüfen; dazu werden direkt am Bild bzw. in der Arbeitsvorlage Argumente für und wider diese Hypothese gesucht – und häufig auch gefunden.

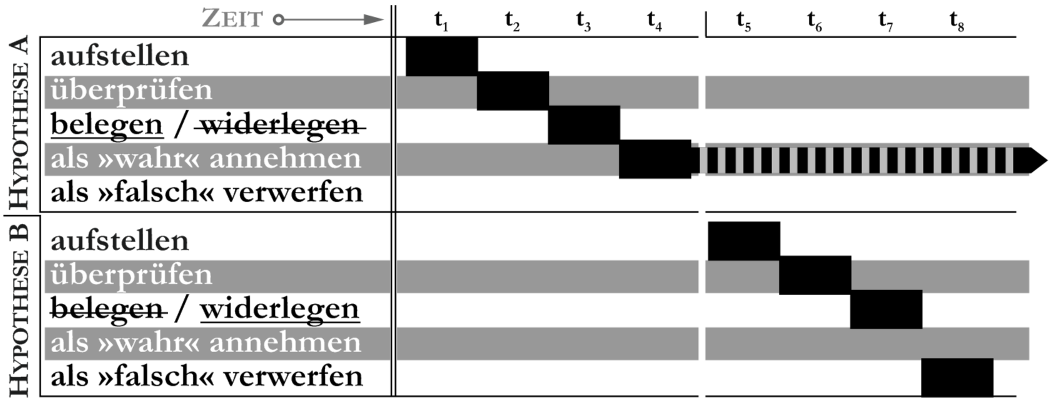

Abb. 1 – Idealtypische Mikrostruktur des Analyseprozesses: Verschiedene Hypothesen werden aufgestellt, überprüft und verworfen oder angenommen

Im zeitlichen Verlauf des Analyseprozesses treten folgende Phasen auf: (1) Hypothese aufstellen, (2) Hypothese überprüfen, (3) Hypothese belegen bzw. widerlegen und (4) Hypothese als „wahr“ annehmen bzw. als “falsch“ verwerfen (vgl. Abb. 1).

Auf diese Weise formen sich im Laufe der Analyse einzelne Annahmen und mit ihnen verbundene Einflussfaktoren als „wahr“, d. h. als zum vorliegenden Kunstwerk passend aus. Da jedes Kunstwerk mehrere logische Regeln enthält, wird in erneuten Durchläufen (*Iterationen*) nach weiteren Einflussfaktoren und Strukturzusammenhängen gesucht – es entsteht eine Art Kreislauf (vgl. Abb. 2).

Die Hypothesen, die am Ende des Analyseprozesses von der Gruppe als „wahr“ angenommen worden sind, bilden in toto eine mathematische Beschreibung des Kunstwerkes. Gruppen, die eine größere Anzahl von Einflussfaktoren gefunden haben als andere, liefern demnach eine exaktere bzw. passendere Darstellung der Struktur und der Elemente des Werkes.

Problemlösen als Wechsel von Hypothese und Experiment

Ein Kunstwerk hinsichtlich seines mathematischen Gehaltes zu untersuchen, stellt für die meisten Betrachter eine Problemsituation im Sinne von Greefrath (2010, 35) dar: Anfangs- und Zielzustand derartiger Aufgaben, sowie die Mittel und Methoden der Analyse sind unklar. Es bleibt nur, sich mit Vermutungen dem Werk zu nähern und, etwa durch Messen, Rechnen, Zählen oder Nachkonstruktion, Belege zu suchen.

Es entspricht dem SDDS-Modell („scientific discovery as dual search") von Klahr & Dunbar (1988), Problemlösen als Prozess des Wechsels zwischen Hypothesengenerierung und experimenteller Überprüfung aufzufassen. Die Autoren unterscheiden darin einen *Hypothesenraum*, der während des Problemlöseprozesses entwickelte Hypothesen umfasst, vom *Experimentraum*, der Methoden zum Überprüfen der Hypothesen beinhaltet (ebd., 32ff). Eine Hypothese wird dieser Theorie nach entworfen, durch Experimente überprüft und ggf. so lange modifiziert und erneut getestet, bis sie das Problem zu lösen scheint.

Während das SDDS-Modell die Mikrostruktur zu beschreiben vermag, also wie Schülerinnen und Schüler ein einzelnes Bildelement finden, können die in der Makrostruktur beobachteten Iterationsschleifen zur schrittweisen Verbesserung der Bildbeschreibung durch einen Bezug zum Modellieren besser gefasst werden.

Iterativer Prozess des Modellierens

Fernab des Schulunterrichts ist „mathematisches Modellieren" seit Langem eines der klassischen Anwendungsgebiete von Mathematik; jegliche Computersimulation eines dynamischen Systems etwa setzt ein mathematisches Modell voraus, das das System zu beschreiben vermag (vgl. Krüger 1974; Bossel 1989/1992). Daneben existieren verschiedene Richtungen des pädagogischen Modellierens (s. Borromeo Ferri 2011, 9ff), die auf Modellierungsprozesse im Umfeld des Schulunterrichts fokussieren.

Obwohl die Sichtweisen auf ‚Modellieren' also unterschiedlich sind, weisen sie dennoch Überschneidungsbereiche auf, aus denen zwei *Charakteristika des Modellierens* hervortreten:

- Ein Ziel des Modellierens ist es, die **Struktur** der vorliegenden Situation und **Einflussgrößen** herauszuarbeiten und zu beschreiben.
- Modellieren ist ein **iterativer** Prozess, bei dem das gefundene Modell in jedem Schritt an die Fragestellung oder Situation angepasst wird.

Die letztgenannte Eigenschaft äußert sich in Modellierungs*kreisläufen* (vgl. etwa Blum 1996) und wird in einigen Darstellungen des Modellierungsprozesses explizit als Rückkopplungsschleife verzeichnet (vgl. etwa Bossel 1989. S. 13). Im Unterschied zum ‚klassischen' Modellieren sind Elemente und Struktur des Modells vom Künstler weitestgehend vorgegeben, müssen also „nur" entdeckt und beschrieben werden. Das ‚mathematische Arbeiten' (Blum 1996) entfällt hier weitgehend, kann sich aber in Form der Variation/Simulation an die Analyse anschließen (s. Wörler 2009).

Die Analyse von Kunstwerken weist demnach Charakteristika des Problemlösens und des mathematischen Modellierens auf und kann als Vorstufe oder Übungssituation für ‚klassisches' Modellieren dienen.

Der Neuntklässler hat 30 Minuten geknobelt, sich mit seinem Nachbarn beraten, Hilfslinien und Notizen durchkreuzen sein Arbeitsblatt. Dass es um Kunst geht, haben die beiden längst vergessen. „Wir haben die Lösung!", ruft plötzlich einer, „1-2-3-4-5, da steckt ein System dahinter!" – die bunten Quadrate scheinen doch mehr Geheimnisse in sich zu tragen, als manche zunächst glauben.

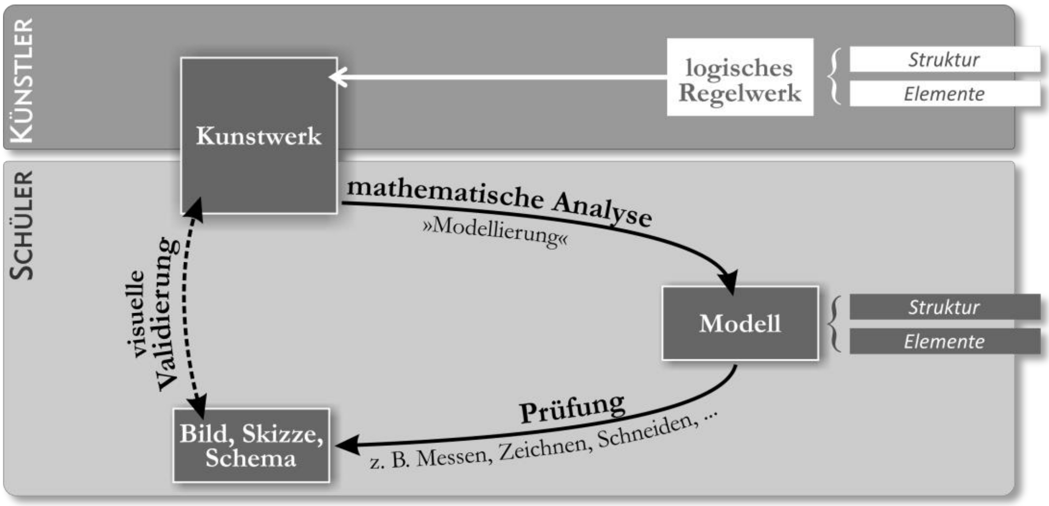

Abb. 2 – Makrostruktur: Durch die mathematische Analyse finden die SchülerInnen nach und nach Struktur und bildbestimmende Elemente eines Kunstwerks.

Literatur

Bossel, H. (1989): Simulation dynamischer Systeme. Braunschweig : Vieweg.

Klahr, D; Dunbar, K. (1988): Dual Space Search During Scientific Reasoning. In: Cognitive Science, 12, 1–48.

Krüger, S. (1974): Simulation. Berlin: De Gruyter.

Wörler, J. (2009): Folgen in der Konkreten Kunst. Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen. In: mathematik lehren, 157, 20–29.

Wörler, J. (2012): Analyse und Simulation von Kunstwerken: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In: Ludwig, M.; Kleine, M.: BzMu 2012, 953–956.