Deborah WÖRNER, Nürnberg

Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff im Mathematikunterricht – eine empirische Untersuchung

„Unendlich“ bildet einen zentralen Begriff weltanschaulichen und speziell mathematischen Interesses. Der vorliegende Beitrag geht der Frage nach, in wieweit Mathematikunterricht Einfluss auf Vorstellungen zu Unendlich nimmt und ein vertieftes mathematisches Verständnis zu dem Begriff ausbildet. Insgesamt wurden hierzu 228 Schülerinnen und Schüler und 135 Lehrerinnen und Lehrer[1] befragt. Die Ergebnisse der vorgestellten Studie dienen dabei als Grundlage für die Entwicklung eines Konzepts zur konzeptionellen Umsetzung des Themas im Unterricht.

Forschungsstand

Die Fachmathematik einigt sich derzeit auf zwei Sichtweisen des Begriffs: ein aktuales Verständnis von „unendlichen Mengen nach dem Vorbild der Mengenlehre Cantors und [ein potentielles Verständnis] in den Begriffen und Methoden der Analysis“ (MARX, 2013).

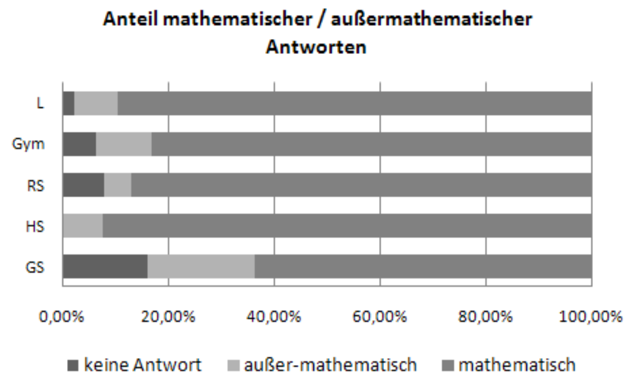
Die mathematikdidaktische Forschung greift diese beiden Ansätze auf. Neben konkreten Vorschlägen zur Umsetzung spezifischer Inhalte im Unterricht (TSAMIR, 2001; SCHIMMÖLLER, 2012) wird hierbei das Augenmerk vor allem auf die vorhandenen Vorstellungen von Schülern und Studenten zum Unendlichkeitsbegriff gelegt. Eine Vielzahl an sowohl qualitativen, wie auch quantitativen Studien zeigen dabei Erkenntnisse zu kognitiven Strukturen, stellen spezifische Schülervorstellungen vor und werten erste Interventionen aus (z.B. FISCHBEIN, TSAMIR & HESS, 1979; TSAMIR,1999; MARX, 2011).

Die vorgestellten Ansätze rechtfertigen die Generierung der Hypothese, dass sich schulischer Mathematikunterricht nicht wesentlich auf die Ausbildung des Unendlichkeitsbegriffs auswirkt bzw. die Ausbildung eines mathematischen Verständnisses nicht angestrebt wird. Entsprechend soll im Folgenden die Hypothese überprüft werden, dass Grundschüler, Hauptschüler, Realschüler, Abiturienten und Lehrer sich in ihrem Verständnis vom Unendlichkeitsbegriff nicht unterscheiden.

[1] Zur besseren Verständlichkeit wird im Folgenden auf eine Unterscheidung der Geschlechter verzichtet.

Auswertung

Mit Hilfe der nahe liegenden Frage „Was verstehst Du unter Unendlich?“ sollte, anders als in der bisherigen Literatur, weniger eine subtile Aufarbeitung von Vorstellungen einzelner Schüler im Zentrum der Betrachtung stehen, als vielmehr ein Querschnitt durch alle Altersstufen und Schularten zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs ermittelt werden. Es wurde deshalb in einem ersten Schritt der Frage nachgegangen, ob im Laufe der Schulzeit bzw. mit zunehmendem Alter eine Tendenz von anfänglich außermathematischen Vorstellungen hin zu innermathematischen Vorstellungen unter Schülern zu beobachten ist. Dazu wurden die angetroffenen Antworten nach außermathematischen Vorstellungen, wie „das Universum“ oder „der liebe Gott“, mathematischen Antworten, wie z.B. „unendlich bedeutet alle Zahlen die es gibt von - & + & die 0“; „die größte Zahl“ oder „∞“ und der Kategorie keine Antwort unterschieden. Hierzu ergibt sich folgendes Bild:



	keine Antwort	**außer – mathe-matisch**	**mathe-matisch**
GS	16,22%	20,27%	63,51%
HS	0%	7,69%	92,31%
RS	7,89%	5,26%	86,85%
Gym	6,49%	10,39%	83,12%
L	2,22%	8,15%	89,63%

Abb. 1

In der Grundschule kennen bereits rund 80% der Schüler den Begriff Unendlich und immerhin ca. 60% verbinden ihn mit einem mathematischen Kontext. Dieser Anteil an Schülern steigt im Laufe der folgenden Schuljahre auf bis zu 90% an. Es lässt sich diesbezüglich ein signifikanter Unterschied zwischen den befragten Abschlussschülern der verschiedenen Schularten und den Antworten der befragten Grundschüler nachweisen. Außerhalb der Grundschule, unabhängig von der mathematischen Ausbildung und dem Alter, lassen sowohl die Antworten von Schülern als auch die Antworten von Lehrern auf eine fast durchweg mathematische Vorstellung zu Unendlich schließen, was vermutlich auf den Einfluss des Mathematikunterrichts zurückzuführen ist.

In einem zweiten Versuch, alters – bzw. schultypabhängige Unterschiede speziell im Verständnis des Begriffs nachzuweisen, orientieren wir uns am „Stufenmodell des Begriffsverständnisses nach Vollrath“. Hier beschränken wir uns auf die Analyse der innermathematischen Antworten der einzelnen Probandengruppen, um nachzuweisen, ob sich Entwicklungen von der ersten hin zur letzten Verständnisstufe beobachten lassen. Eine entsprechend modifizierte Version des Vollrath´schen Modells (DÖTSCHEL, 2011) legt folgende Stufen des Begriffsverständnisses nahe:

- Intuitiv-inhaltliche Stufe: „Zahl ohne Ende“; „1,2,3,4,…“; „das Symbol ∞“; „das Universum“; usw.
- Integriert-formale Stufe: „nicht abzählbare Menge“; „1 zu 1 Zuordnung zu den natürlichen Zahlen“; „Es gibt genauso viele Bruchzahlen, wie natürliche Zahlen, nämlich unendlich viele“; usw.
- Kritische Stufe: Aussagen zur Axiomatik; Kontinuumshypothese; usw.

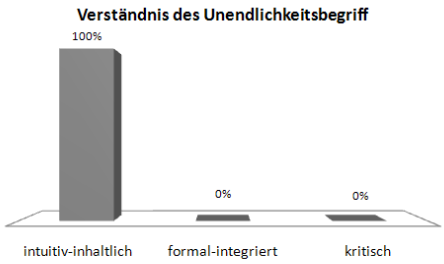
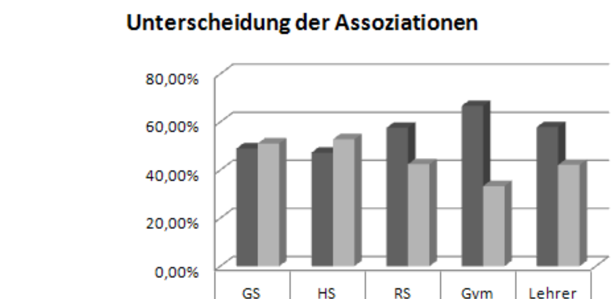


Abb. 2

Bei der Auswertung der Antworten zeigt sich, dass alle anzutreffenden Antworten durchweg auf einer intuitiv-inhaltlichem Stufe einzuordnen sind. Keiner der befragten Schüler oder Lehrer gibt Aussagen, die auf ein vertieft mathematisches Verständnis schließen lassen. Beispiele, wie „unter dem Begriff versteht man, dass eine Zahl immer weiter geht und immer länger ist“ sind sowohl für Grundschüler, wie auch Gymnasiasten und Lehrer typisch. Das Ergebnis spiegelt wider, dass Unendlich zwar präsent ist, aber nicht im Unterricht thematisiert wird.[2]

Einzig eine Unterscheidung der intuitiven Vorstellungen nach den Kategorien aktual und potentiell Unendlich, wie es in der Literatur vorzufinden ist (z.B. FISCHBEIN, TIROSH & HESS, 1979; TALL, 2001), scheint erfolgsversprechend, um einen Unterschied bzw. eine alters- und ausbildungsabhängige Entwicklung nachzuweisen. In Anlehnung an Weigand wird diese Unterscheidung aufgegriffen und die beiden Begriffe statisch und dynamisch verwendet (WEIGAND, 1993).



	GS	HS	RS	Gym	Lehrer
statische Assoziationen	48,94%	47,22%	57,58%	66,67%	57,85%
dynamische Assoziationen	51,06%	52,78%	42,42%	33,33%	42,15%

Abb. 3

Eine typische Antwort für eine statische Vorstellung, ist dabei z.B. „die letzte Zahl“ während „viele und immer einer mehr“ als Beispiel für eine dynamische Vorstellung steht.

Die nebenstehende Grafik zeigt, dass mit zunehmen-

[2] Entsprechendes zeigt auch eine Schulbuch- und Lehrplananalyse, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

dem Alter eine Tendenz hin zu statischen Antworten zu beobachten ist. Angefangen von einem fast ausgewogenen Verhältnis in der GS und der HS, wächst der Anteil derer, die eine statische Vorstellung mit dem Unendlichkeitsbegriff verknüpfen bis auf knapp 2/3 der befragten Gymnasiasten an. Trotzdem bildet sich aber auch an dieser Stelle kein signifikanter Unterschied zwischen den Befragten aus. D.h. ein Unterschied auf Grund unterschiedlicher mathematischer Ausbildung zwischen den Probandengruppen ist nicht nachzuweisen und mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass sowohl Grundschüler, als auch Absolventen, als auch Lehrer aus der selben Grundpopulation stammen.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Untersuchung deuten darauf hin, dass sich die Hypothese „Schüler und Lehrer – egal welcher Schulart und Ausbildungsrichtung – unterscheiden sich *nicht* im Verständnis bzgl. des Unendlichkeitsbegriffs“ nicht ablehnen lässt. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den verschiedenen interpretativen Ansätzen und entsprechenden qualitativen Studien aus dem Ausland (z.B. FISCHBEIN, TIROSH & HESS, 1979; TSAMIR, 1999 oder MORENO & WALDEGG, 1999). Es stellt sich für einen zukünftigen Mathematikunterricht die Frage, inwieweit er sich mit dieser Situation zufrieden gibt oder anstrebt, den mathematisch zentralen Unendlichkeitsbegriff Cantors stärker (bzw. überhaupt) im Unterricht zu thematisieren. Im Rahmen einer Dissertation werden von der Autorin hierzu Konzeptionsvorschläge zu jahrgangsübergreifenden langfristig angelegten Lehrgängen zum Unendlichkeitsbegriff entwickelt.

Literatur

Dötschel, D. (2011): Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht. In: BZMU,

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979): The intuition of infinity. In: Educational Studies in Mathematics 10, 3 - 40.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen – In: Journal der Mathematik - Didaktik. Münster: Springer, 73 – 98.

Marx, A. (2011): Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schimmöller, T. (2012): In: Lengnink, K., Nickel, G., Rathgeb, M. (Hrsg.) (2011) Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg + Täubner, 179 – 188.

Tsamir, P. (1999): The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. In: Educational Studies in Mathematics. Vol. 38, (1999). Münster: Springer, 209 - 234.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: Educational Studies in Mathematics. Vol.12, (1981). Münster: Springer, 151-169.

Vollrath, W. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Moreno, L. E. & Waldegg, G. (1991): The conceptual evolution of actual mathematical infinity. In: Educational Studies in Mathematics. Vol.22, (1991). Münster: Springer, 211-231.