Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

Von der Ergebnisgleichheit zur Einsetzungsgleichheit – Rekonstruktion von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen

Verständnishürden und Fehlvorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen und zum Gleichheitszeichen, wie beispielsweise die Aufgabe-Ergebnis-Deutung, sind aus zahlreichen Studien bekannt und immer noch aktuell (Kieran 2007). Neben diesen Anforderungen sind die Lernenden mit grundlegenden algebraischen Konzepten, wie den Variablen und Termen, konfrontiert, die häufig nur partiell verstanden wurden und dadurch die Komplexität des Themas Gleichwertigkeit von Termen für Lernende erhöhen (Malle 1993). Eine systematische Erforschung der Vorstellungsentwicklung in lernförderlichen Lernumgebungen steht allerdings noch aus. Welche individuellen Vorstellungen zur Gleichwertigkeit haben die Lernenden, und inwiefern können diese weiterentwickelt werden? Welche Elemente des Lehr- und Lernarrangements sind lernförderlich und welche begrenzen den Lernprozess, und inwiefern kann ein prototypisches Design entwickelt werden, das einen Lernprozess ermöglicht?

Die Beforschung und (Weiter-)Entwicklung des Lehr- und Lernarrangements fand im Rahmen der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung in fünf iterativ verschränkten Zyklen statt (Prediger & Zwetzschler 2013). Hier werden empirische Beispiele aus dem 2. Zyklus vorgestellt.

1. Design des Lehr- und Lernarrangements – Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes

Wie ein Lernweg zum Vorstellungsaufbau zur Gleichwertigkeit von Termen durch die Nutzung von geometrischen Darstellungen aussehen kann, wird in theoretischen, nicht empirisch überprüften, Lernwegskonstruktionen bereits seit langer Zeit beschrieben (z.B. Wellstein 1978, Mason et al. 1985). Zentral ist dabei die Idee einer überprüfbaren und somit für den Lernenden nachvollziehbaren Gleichwertigkeit von Termen dadurch, dass unterschiedliche Terme das gleiche Objekt beschreiben können (empirisch für Funktionen statt Flächen beschrieben durch Kieran & Sfard 1999, für eingesetzte Zahlen Pilet 2012). In dieser Studie ist die Nutzung zweier Objekte zur Interpretation der Gleichwertigkeit leitend: Neben einem durch geometrische Figuren gestützten Verständnis, der Beschreibungsgleichheit (Prediger 2009, in Anlehnung an Malle 1993) wird die Referenz auf die Einsetzung aller (bzw. praktisch nur vieler) Zahlen, die Einsetzungsgleichheit (Prediger 2009 nach Malle 1993) als zweite inhaltliche Vorstellung angeboten. Realisiert wurde das Lehr- und Lernarrangement im KOSIMA-Projekt (konkret in der Erprobungsversion eines Schulbuchkapitels Prediger, Zwetzschler & Schmidt 2011), das die oben beschriebenen inhaltlichen Vorstellungen aufbaut und anschließend nach dem Prinzip der Fortschreitenden Schematisierung (Treffers 1987) zum Kalkül, den algebraischen Termumformungen, überführt.

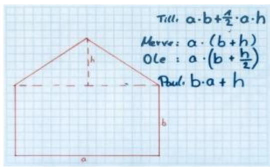
2. Analysemodell: Theoretische Fokussierung durch Vergnauds analytische Konstrukte

Analytische Konstrukte aus Vergnauds (1996) Theorie der konzeptuellen Felder wurden zur methodisch abgesicherten Rekonstruktion der hinter sichtbaren Handlungen und Äußerungen liegenden Vorstellungen genutzt. Dazu wurden Vergnauds Theoreme-in-Aktion (durch ||..|| gekennzeichnet) adaptiert, um die dahinter liegenden Konzepte-in-Aktion (durch <…> gekennzeichnet) zu rekonstruieren, und die individuelle Vorstellungsentwicklung der Lernenden erfassen zu können (zur genaueren Beschreibung: Zwetzschler & Prediger 2013).

3. Empirische Einblicke: Herausforderungen bei der Vorstellungsentwicklung zur Gleichwertigkeit

Der folgende empirische Ausschnitt eines Lernenden (Christian, Klasse 9, Gesamtschule) aus Zyklus 2a ist exemplarisch für eine zentrale Herausforderung im Lernprozess analysierter Lernender.

(I) Welche Kinder berechnen den gleichen Flächeninhalt?



(II) Setze in die Tabelle unterschiedliche Werte für die Variablen ein. Was fällt dir auf?

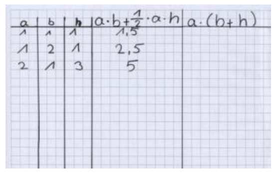


Abb. 1

Nachdem das Interviewpaar in Aufgabe (I) (Abb. 1) die Terme auf die Graphik bezogen hatte, bekommen sie Aufgabe (II). Christian ist durch die unterschiedlichen Zahlen zunächst irritiert und zeigt nach der Erklärung der Interviewerin, dass es unterschiedliche Beispiele seien, ein Situationsverständnis, das sich bei vielen Lernenden als eine zentrale Herausforderung gezeigt hat. Christian stellt fest:

15	C	Achso also ist das jetzt nicht von dem Gleichen, also von dem alles den gleichen äh von dem hier? *[zeigt auf die Graphik]*
16 (…)	I	Was willst du denn ähm machen, wenns von dem hier sein soll? *[zeigt auf die Graphik]*
18	C	a · b die *[zeigt auf a und b in der Tabelle]* und dann a · h durch 2 *[zeigt auf h in der Tabelle]*, ich mein das von dem hier *[zeigt auf die Graphik]*

Der Lernende unterscheidet in dieser Situation zwischen Termen, in die man die gegebenen Zahlen einsetzen kann und der Berechnung der Graphik aus Aufgabe (I). Für ihn scheinen die eingesetzten, konkreten Werte in keiner Verbindung zur Graphik zu stehen, da er die Variablen in dieser vermutlich ausschließlich als Namen der Kanten und in keiner allgemeinen Repräsentation verstanden hat. Diese zwei konkurrierenden Perspektiven werden in der Analyse durch die dahinter liegenden Konzepte rekonstruiert. Christians Verständnis der Terme, in die man Werte einsetzen kann (schwarze Perspektive Abb.2), ist geleitet durch sein implizites Theorem-in-Aktion ||Um bei zwei richtigen Termen die gleichen Ergebnisse zu erhalten, kann ich unterschiedliche Werte einsetzen||. Durch dieses Verständnis des Lernenden lässt sich sein dafür aktiviertes Verständnis der Variablen, des Terms und sein latentes Konzept der Gleichwertigkeit rekonstruieren. Er versteht den <Term als allgemeine Berechnungsvorschrift>, in den man unterschiedliche Werte einsetzen kann. Dies realisiert sich in seinen Konzepten-in-Aktion: der <Variablen als Einsetzungsaspekt> und der <Variablen als Unbestimmte> (T15 und folgende, nicht abgedruckte Turns). Dadurch ist Christian in der Lage Terme durch Ergebnisse eingesetzter Werte aufeinander zu beziehen. Was sich in seinem Konzept <Gleichwertige Terme als Einsetzungsgleich> zeigt (Abb. 2). Gleichzeitig scheint der Lernende in T15 den Bezug zur Graphik aus (I) zwar über die gegebenen Terme, nicht aber über die eingesetzten Werte herstellen zu können (graue Perspektive Abb.2). Durch das implizit genutzte Theorem-in-Aktion in T18 ||Um die Terme der Graphik zuzuordnen, überlege ich inwiefern sie den Flächeninhalt berechnen||, steht für ihn die Graphik weiterhin in Beziehung mit den Termen. Die in dieser Verbindung genutzten Konzepte der <Graphik als konkrete Zeichnung> und der <Variablen als Namen der Kanten>, ermöglichen ihm zwar ein Verständnis der <Terme als konkret Beschreibungsgleich>, stehen allerdings als unvereinbare Perspektive (der schwarzen Perspektive Abb.2) dem Verständnis der Terme als etwas allgemeines, in das man Werte einsetzen kann, gegenüber.

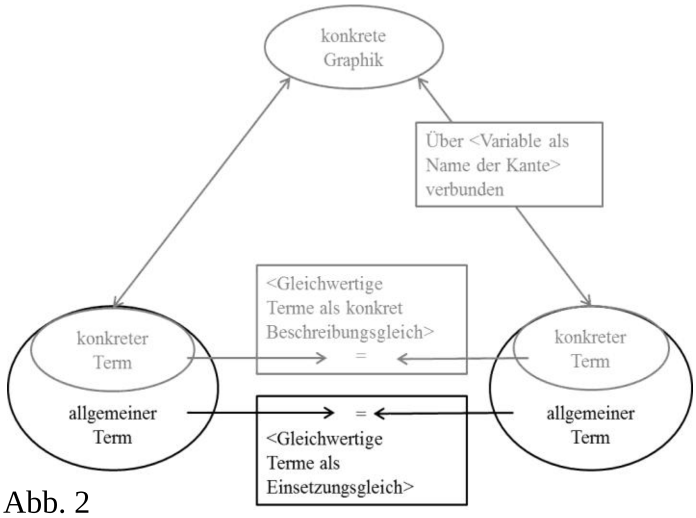


Abb. 2

Die Dimension des Allgemeinheitsverständnisses, das sich hier limitierend auf den Verständnisprozess zur Gleichwertigkeit in seinen einzelnen Elemente (Term, Graphik und Variablen) und deren Verbindung auswirkt, ist eine zentrale Herausforderung im Lernprozess.

4. Konsequenzen für den Entwicklungs- und Forschungsprozess

Der systematische Aufbau eines Allgemeinheitsverständnisses wurde Ausgangspunkt für Designveränderungen. Es wurden Lerngelegenheiten geschaffen und weiter entwickelt zum systematischen und vernetzten Aufbau eines allgemeinen Einsetzungsverständnisses. Zudem bietet das Allgemeinheitsverständnis ein Erklärungsansatz in der Beschreibung von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen.

Literatur

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In: Lester, F. K. (Hrsg.), *Second Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*. (S. 707-762). Information Age Publishing: Greenwich, CT.

Kieran, C. & Sfard, A. (1999). The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 21(1), 1- 17.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig et al.: Vieweg.

Mason, J. et al. (1985). *Routes to / Roots of Algebra*. Milton Keynes: University Press.

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une platforme en ligne et évaluation. Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot Paris 7.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor. Kalkül In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213-234). Beltz: Weinheim.

Prediger, S., Zwetzschler, L., & Schmidt, U. (2011). Preise des Fensterbauers – Flächenberechnungen automatisieren und Terme vergleichen. Erprobungsversion eines Schulbuchkapitels. In: Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S., & Barzel, B. (Hrsg.), *Mathewerkstatt 8*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. & Zwetzschler, L. (2013, in Vorb.). Topic-specific design research with a focus on learning processes. In: T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research: Introduction and Illustrative Cases* (Arbeitstitel).

Treffers, A. (1987). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 125–145.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219-239). Erlbaum: Mahwah.

Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: Didaktik der Mathematik 6(1), 54-64.

Zwetzschler, L. & Prediger, S. (2013, im Druck). Conceptual obstacles for understanding the equivalence of expressions – A case study. In B. Ubuz et al. (Hrsg.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8), Antalya 2013.