

Martin Erik HORN, Berlin

Eine Einführung in unterschiedliche Darstellungen der Pauli-Algebra: Konzeption eines Lehrbuchs

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra können mathematische und physikalische Modellierungen strukturell übersichtlich und konzeptuell anschaulich dargestellt und verstanden werden. Insbesondere nicht-kommutative Beziehungen lassen sich didaktisch nachvollziehbar und erstaunlich einfach beschreiben. Die Geometrische Algebra wird deshalb von Didaktikern wie David Hestenes (2003) als universelle mathematische Sprache verstanden, die die derzeit vorwiegend genutzte Standarddarstellung der Linearen Algebra ergänzen kann oder sogar ersetzen sollte.

Die Aufarbeitung der Geometrischen Algebra für den schulischen und hochschulischen Bereich sollte somit ein vordringliches Ziel der Mathematik- und Physikdidaktiken sein. Ein deutschsprachiges Lehrbuch zur Geometrischen Algebra fehlte allerdings bisher. Diese liefert nun das unter www.bookboon.com/de veröffentlichte Lehrbuch (Horn 2012b), das in die Geometrische Algebra des dreidimensionalen Raumes auf Grundlage der Pauli-Algebra einführt.

1. Multi-Modaler Zugang

Eine der wesentlichen didaktischen Stärken der Geometrischen Algebra besteht darin, geometrischen und algebraischen Beschreibungen einen gemeinsamen Rahmen zu geben: Algebraische Zusammenhänge können direkt in geometrische Beziehungen übersetzt werden. Und umgekehrt können geometrische Sachverhalte problemlos und eindeutig in algebraischer Form dargestellt werden. Dieser Gleichklang zwischen Geometrie und Algebra fördert und erleichtert die Analyse komplexer Fragestellungen.

Unterstützt wird dieser konzeptuelle Gleichklang durch die Möglichkeit, unterschiedlichen Zugangsweisen zu folgen. So kann ein Zugang über einen algebraischen Weg für Lernende mit abstrakt-symbolischer Vorprägung erfolgen, indem ein Einstieg über die Algebra der Pauli-Matrizen (Horn 2012b, Kap. 2) gewählt wird. Alternativ dazu können Lernende mit visuell-geometrischer Vorprägung einen Einstieg über die Geometrie der Pauli-Algebra (Horn 2012b, Kap. 3) erlangen. Die Erarbeitung der Matrixdarstellung von Kap. 2 kann dann zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

2. Kernpunkte der Geometrischen Algebra

Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren der dreidimensionalen, Euklidischen Welt, in der wir näherungsweise unter Vernachlässigung relativis-

tischer Effekte leben. Gleichzeitig repräsentieren Pauli-Matrizen Basis-Reflexionen, also Generatoren von Spiegelungen, in dieser Welt. Die Algebra der Pauli-Matrizen bildet somit den konzeptuellen Kern einer Geometrischen Algebra des Dreidimensionalen. Dieser inhaltlichen Schwerpunktsetzung folgt auch die Konzeption des Lehrbuchs mit der Diskussion geometrischer Operanden (Horn 2012b, Kap. 3) und geometrischer Operatoren (Horn 2012b, Kap. 4).

3. Darstellungen der Pauli-Algebra

Bei der konzeptuellen Gestaltung des Buches wurde besonderen Wert darauf gelegt, Verknüpfungen und Verbindungen zu anderen Algebren offenzulegen und zu hinterfragen. Die Algebra komplexer Zahlen und die reelle Quaternionenalgebra sind als Subalgebren in der Pauli-Algebra enthalten.

Darüber hinaus ist die Pauli-Algebra zur Paravektor-Algebra und zur komplexen Quaternionenalgebra isomorph. Insbesondere dieser letzte Sachverhalt wird ausführlich dargestellt und in zahlreichen Beispielaufgaben aufgearbeitet. In diesem Kontext werden die quaternionischen Basiseinheiten i, j und k als orientierte Einheitsflächenstücke $\sigma_y\sigma_z$, $\sigma_z\sigma_x$ und $-\sigma_x\sigma_y$ (Horn 2012b, Kap. 5) gedeutet.

Darüber hinaus ist es ein historischer Zufall, dass Pauli-Matrizen heute vorwiegend als (2×2) -Matrizen dargestellt werden. Deshalb wird im letzten Teil des Buches (Horn 2012b, Kap. 6) eine alternative Darstellung der Pauli-Algebra durch S_3 -Permutationsmatrizen eingeführt. Diese Darstellung hat auch erkenntnistheoretisch einige Relevanz, da sie als eine Mathematik ohne negative Basisgrößen (Horn 2012a) interpretiert werden kann.

4. Zielgruppen

Hauptsächliche Zielgruppe dieses Buches sind Lernende und Lehrende auf Hochschulniveau der Anfangssemester, die einen sowohl anschaulichen wie auch grundlegenden Einstieg in die Geometrische Algebra suchen. Sie werden durch zahlreiche Aufgaben und Musterlösungen bei der eigenständigen Erarbeitung der fachlichen Inhalte unterstützt.

Literatur

- Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. 71 (2), 104-121.
- Horn, M. E. (2012a): Die Geometrische Algebra der (3×3) -Matrizen. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM, 393-396.
- Horn, M. E. (2012b): Pauli-Algebra und S_3 -Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. Ventus Publishing ApS, URL: <http://bookboon.com/de/studium/mathematik/pauli-algebra-und-s3-permutationsalgebra> [29. Okt. 2012].