Zur Komplementbildung bei der halbschriftlichen Subtraktion

Analyse der Ergebnisse einer Unterrichtsreihe im dritten Schuljahr

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Pädagogik (Dr. paed.)

der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund, 2013

Vorgelegt von
Ulrich Schwätzer

Erstgutachter: Prof. Dr. Christoph Selter
Zweitgutachter: Prof. Dr. Bernd Wollring

Tag der Disputation: 19.12.2013

Geleitwort

Die vorliegende Arbeit stellt ein gelungenes Zusammenspiel von stoffdidaktischen Analysen und eigener empirischer Forschung zu einem Themengebiet dar, welches in den letzten Jahren verstärkte Aufmerksamkeit in der mathematikdidaktischen Kommunität erhalten hat. Sie thematisiert die Grundvorstellung bzw. die Rechenstrategie des Ergänzens, in der Literatur auch unter vielzahligen Begriffen wie Unterschiedsbildung, adding up oder indirekte Addition firmierend. Der Autor verwendet hierzu den Begriff der Komplementbildung, auch um die grundsätzliche Bedeutung des Denkens in sich ergänzenden und bereichernden Gegensätzen hervorzuheben.

Dabei gelingt es Ulrich Schwätzer nicht nur, sich auf eine sehr breite Literaturbasis aus der Mathematikdidaktik und ihren Bezugsdisziplinen zu beziehen, sondern darüber hinaus die nicht selten widersprüchlichen oder differenziert argumentierenden Beiträge anderer Autoren in ein klar strukturiertes, gut nachvollziehbares Theoriesystem zu integrieren. In Ausführungen zur Arithmetik des Zahlenraums bis 20, zur mentalen Arithmetik und zum schriftlichen Rechnen werden dabei theoretische Analysen zur Begrifflichkeit in kluger Weise mit Ergebnissen empirischer Forschung verbunden und die Haupterkenntnisse insbesondere in den zusammenfassenden Kapiteln prägnant beschrieben.

Auf dieser Hintergrundfolie folgen anschließende Ausführungen zum Design des durch den Autor analysierten Unterrichts. Dabei handelt es sich nicht um ein klassisches Interventionsexperiment, bei dem der Unterricht entlang von durch die Forscher vorgegebenen Skripts durchgeführt wird. Herr Schwätzer hat sich hingegen auf die Rolle des Beobachters und der analysierenden Person in einer Unterrichtsreihe konzentriert, die von einer Lehrerin geplant und durchgeführt wurde.

Die Hauptergebnisse der Untersuchung werden entlang von vier Komplexen an Forschungsfragen, gebündelt in Forschungsinteressen, in klarer Weise beschrieben. Dabei wählt der Autor eine ausgewogene Mischung aus Überblicksanalysen über die gesamte Unterrichtseinheit hinweg einerseits, deren Datenmenge mit Hilfe einer selbst entwickelten Software auf geeignete Analysemengen reduziert wird, und aus Detailanalysen andererseits, bei denen einzelne Schülerdokumente oder kurze Transkripte in geeigneter Weise heran gezogen werden.

Zwar sind manche Ergebnisse stark an den Kontext gebunden, in dem sie erhoben wurden – die spezielle Unterrichtssituation mit genau den Schülerinnen und Schülern mit spezifischen Vorerfahrungen und genau der Lehrperson mit deren Kompetenzstand. Aber das ist auch gerade der Eigenwert der Untersuchung, dass sie aufgrund des gewählten Designs und der vom Autor vorgenommenen „thick description“ zwar nicht als komplementär – im Sinne von vervollständigend – zum Forschungsstand zu sehen ist, aber in ihren Ergebnissen an einer ganzen Reihe von Stellen als komplementär – im Sinne von die mathematikdidaktische Diskussion zweifelsohne bereichernd – gelten kann.

Christoph Selter

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen herzlich danken, die dazu beigetragen haben, dass ich diese Arbeit erfolgreich abschließen konnte.

Der erste Dank geht dabei an die eigene Familie, vor allem an meine Frau Dana Catherine. Sie hat mich nicht nur unterstützt, sondern auch selber eigene Ziele zurückgesteckt, um mir die Verwirklichung dieses ehrgeizigen Projektes zu ermöglichen. Ohne ihre Liebe hätte ich dieses Ziel sicherlich nicht erreicht.

Selbstverständlich gebührt meinem Doktorvater und Themensteller, Herrn Prof. Dr. Christoph Selter, ein herzlicher Dank zum einen dafür, mir die Möglichkeit gegeben zu haben, trotz fortgeschrittener Karriere im Schuldienst zur TU Dortmund wechseln und die Herausforderung einer Promotion annehmen zu können, zum anderen aber für die Art und Weise seiner Betreuung während der sechsjährigen Arbeit an diesem Projekt, die sich sowohl durch Offenheit für eigenes Denken, aber, wenn es nötig wurde, auch durch herausfordernde und zielorientierende Impulse auszeichnete, ohne dabei einschränkend zu sein, gepaart mit großer Geduld und Vertrauen in die Fertigstellung dieser Arbeit.

Ein weiterer Dank geht an Herrn Prof. Dr. Bernd Wollring der Universität Kassel für seine fruchtbaren weiterführende Impulse, die in konstruktiver Art unterstützend wirkten.

Im Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts der TU Dortmund standen mir zahlreiche Personen als Diskurspartner zur Verfügung, die mir in dieser produktiven Arbeitsumgebung konstruktive Kritik und weiterführende Anregungen gaben. Hervorheben möchte ich hier Herrn Prof. em. Dr. Dr. h. c. Erich Christian Wittmann, der mir als alter Wegbegleiter immer wieder die Möglichkeit des Gedankenaustausches gegeben und mit seiner Sicht der Dinge zur Bereicherung dieser Arbeit beigetragen hat.

Nicht zu letzt verdanke ich ihm auch den Kontakt zu Frau Prof. Dr. Marja van den Heuvel-Panhuizen der Universität Utrecht in den Niederlanden und Herrn Prof. Dr. Lieven Verschaffel der Universität Leuven in Belgien, denen ich Aspekte meiner Arbeit vorstellen durfte und ein motivierendes Feedback aus internationaler Sicht bekam.

Abschließend gebührt noch ein besonderer Dank der (aus Datenschutzgründen leider anonym bleibenden) Lehrerin, die für mich ein halbes Schuljahr lang die Klassentür öffnete und ihren Unterricht begleiten ließ, sowie den Kindern ihrer Klasse, von denen ich viel lernen durfte, und deren Arbeitsergebnisse einen reichhaltigen Schatz für diese Arbeit darstellten.

Ulrich Schwätzer

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Transkriptverzeichnis

1 Einleitung

„These results call for the design of more powerful instructional settings, with explicit and systematic attention to the subtraction by addition strategy and to the inverse relation between addition and subtraction. [...]However, additional research is definitely needed to evaluate the success of powerful instructional settings.“

(Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012, S. 346)

Der Begriff *Ergänzen* steht in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik sowohl für eine der fünf üblichen halbschriftlichen Rechenstrategien, als auch für den dazu notwendigen Wechsel in die ebenfalls so bezeichnete Grundvorstellung. Denn beim *Ergänzen* sollen die Kinder die Inversion zwischen Addition und Subtraktion nutzen, und statt einer wegnehmenden Minusaufgabe (z.B. 624-293=___) eine auf dieser Inversion beruhende, indirekte Additionsaufgabe rechnen (z.B. dann 293+___=624).

Der Vorgang des Auffüllens vom Subtrahenden zum Minuenden wird dabei in der Regel in der Form mehrerer schrittweiser Teilrechenschritte dargestellt, ähnlich den Schritten der wegnehmenden Strategie *Schrittweise*.

Neuere Studien weisen aber darauf hin, dass diese Sichtweise des *Ergänzens* möglicherweise zu kurz greift: Neben dem Auffüllen per indirekter Addition (293+___=624) ist auch das Entleeren (624-___=293) mit der indirekten Subtraktion möglich. Bei der Gestaltung der Rechenschritte des Auffüllens oder Entleerens sind auch andere Varianten als die der Strategie *Schrittweise* möglich: Kinder könnten hier ebenfalls Teilschritte erzeugen, die den wegnehmenden Strategien *Stellenweise*, *Hilfsaufgabe* und *Vereinfachen* entsprechen.

Das *Ergänzen*, gedacht als Auffüllen und Entleeren, scheint also eher eine alternative Grundvorstellung zum Wegnehmen zu sein, in der sich ebenfalls vier Varianten von Rechenstrategien nutzen lassen. Um deutlich zu machen, dass es um diese Grundvorstellung geht, wird daher die Bezeichnung *Komplementbildung* an Stelle von *Ergänzen* in dieser Arbeit benutzt, zum einen, um auch das Entleeren begrifflich zu integrieren, zum anderen, um sich vom üblichen Gebrauch des Begriffs *Ergänzen* als Bezeichnung für die fünfte Rechenstrategie abzugrenzen.

Aufriss des Forschungsstandes

Zur Komplementbildung liegen vergleichsweise wenige nationale und internationale Studien vor. Aus den Kernaussagen lässt sich zusammenfassen, dass Kinder etwa mit Schuleintritt in der Lage sind, die Inversion zwischen Addition und Subtraktion prinzipiell zu verstehen und (elementare) Komplementbildungsprozesse, etwa per indirekter Addition, anzuwenden. Von sich aus wählen Kinder den Wechsel in diese Grundvorstellung jedoch selten, aber wenn sie es tun, dann sind sie recht erfolgreich. Dabei scheinen vor allem die Zahlenkonstellationen in der Aufgabenstellung sowie die ggf. verwendeten Kontexte eine Rolle für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung zu spielen.

Ob sich in der Schule Komplementbildungsprozesse aktivieren lassen, stellt sich indifferent dar: Ältere Studien, die eher auf Instruktion setzten, wiesen nur wenig nachhaltige Erfolge nach, neuere Studien (Längsschnittstudien sind in dieser Domäne selten zu finden) dagegen, in denen die Kinder im Unterricht ihr Wissen selbst aktiv konstruieren sollten, zeigen eine Verbesserung der Komplementbildungsfähigkeit. Noch weiß man aber relativ wenig über die Verständnisentwicklung in dieser Art des Unterrichts, wie auch das Eingangszitat aufzeigt.

Aus dieser theoretischen wie empirischen Ausgangslage erscheint es sinnvoll, die längerfristigen Lernprozesse von Kindern im Bereich der Komplementbildung zu evaluieren. Dazu wurde eine Langzeitstudie in einem dritten Schuljahr durchgeführt, das Unterricht zur Subtraktion nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung bekam. Von der kontextorientierten Einführung, der Thematisierung von Strategiekategorien halbschriftlichen Rechnens, über die Einführung der schriftlichen Subtraktion, bis hin zu erneuten Anwendungssituationen wurde hier dieser Unterricht einer Klasse über das komplette zweite Schulhalbjahr des dritten Schuljahres begleitet. Darin sollen Anwendung, Erfolg und Verständnisentwicklung beim Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung beobachtet, dokumentiert und analysiert werden.

Struktur dieser Arbeit

In Kapitel 2 dieser Arbeit werden zunächst die theoretischen Grundlagen und der Forschungsstand dargelegt. Zuerst wird dazu die Komplementbildung als Grundvorstellung analysiert, sowie Studien zum Erwerb grundlegenen Verständnisses in dieser Grundvorstellung dargestellt. Anschließend werden Komplementbildungsprozesse in den Rahmen des halbschriftlichen, strategischen Rechnens eingeordnet und Studien zur Komplementbildung in unterrichtlichen Situationen vorgestellt. Auch bei der schriftlichen Subtraktion spielt diese Grundvorstellung eine dann anschließend dargelegte Rolle. Ein Ausblick auf andere Verwendungszusammenhänge der Komplementbildung schließt dann das Theoriekapitel ab.

In Kapitel 3 wird das Design der vorliegenden Studie erläutert. Dabei werden zunächst Forschungsinteressen aus der Theorielage heraus formuliert, anschließend werden detailliert die Planungsgrundsätze und die konkrete Durchführung des Unterrichts der Studie, sowie die dann verwendete Dokumentations- und Auswertungsmethodik erörtert.

In Kapitel 4 werden die Ergebnisse des Unterrichtsversuchs in vier Teilbereichen, analog zu den Forschungsinteressen, dargestellt: Zunächst wird Fragen der beobachteten Verwendungshäufigkeit und des Erfolgs beim komplementbildenden Rechnen nachgegangen, bevor im nächsten Teilkapitel auftretende vielfältige Varianten dieses Rechnens detailliert aufgezeigt und analysiert werden. Im dritten Teilkapitel wird dann der Entwicklung und Nutzung der speziellen Idee des Stelle Herstellens innerhalb der Komplementbildung nachgegangen, vom ersten Auftreten, über deren Kultivierung, bis hin zu ihrer Nutzung bei der Einführung und Reflexion des Algorithmus. Das vierte Teilkapitel beschäftigt sich dann mit möglichen Auslösern für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung, neben den bereits weiter oben genannten Kontexten und Konstellationen in Zahlenwerten wird hier auch ein Blick auf Anregungen und Vorlieben geworfen.

Schließlich werden in Kapitel 5 zentrale Erkenntnisse dieser Studie zusammengefasst und daraus denkbare Folgerungen zur Diskussion gestellt.

2 Komplementbildung – eine Variante der Subtraktion

Kapitel 2 thematisiert die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit. Dazu ist notwendig, zunächst den Begriff der Komplementbildung als Grundvorstellung zur Subtraktion zu definieren, deren Stellenwert in elementaren wie in unterrichtlichen Erwerbs- und Verwendungssituationen zu evaluieren, und dazu passend den jeweiligen Forschungsstand darzustellen. Während es in Kap. 2.1 zunächst um grundlegendes Verständnis geht, werden in Kap 2.2 diese Fragen im Rahmen heuristisch-strategischen Rechnens dargelegt, während Kap. 2.3 dann – etwas kürzer – die Verwendung der Komplementbildung und ihr Verständnis bei algorithmischem Rechnen und weiteren Verwendungszusammenhängen darstellt.

2.1 Komplementbildung – grundlegendes Verständnis

In diesem Kapitel werden zunächst der Begriff der Komplementbildung als Grundvorstellung der Subtraktion, sowie der Forschungsstand zum Erwerb eines elementaren Grundverständnisses der Inversion zwischen Addition und Subtraktion vorgestellt.

2.1.1 Komplementbildung – eine Grundvorstellung zur Subtraktion

Eine Festlegung soll an dieser Stelle vorab erfolgen: In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik existiert das Dilemma, dass *Ergänzen* sowohl als Begriff für eine der beiden Grundvorstellungen zur Subtraktion (s.u.), ebenso auch als Bezeichnung für eine der fünf Rechenstrategien (vgl. Kap.2.2), ja sogar als Bezeichnung (*Auffüllen mit Ergänzen*, vgl. Kap. 2.3) für einen der schriftlichen Algorithmen zur Subtraktion benutzt wird.

→ Um diese fundamental unterschiedliche Bedeutung begrifflich zu trennen, wird für *Ergänzen* im Sinne einer Grundvorstellung in dieser Arbeit der Begriff *Komplementbildung* benutzt, der hiermit eingeführt, und später (s.u.) noch genauer begründet wird.

Ein Begriff dessen, was Subtraktion bedeutet, entwickelt sich in empirischen Situationen mit subtraktiven Kontexten. Dabei können sich – je nach Ausprägung der Kontexte – verschiedene Grundvorstellungen aufbauen. Unter Grundvorstellungen werden in der Mathematikdidaktik zurückgehend auf die Arbeiten von vom Hofe (1992, 1995, 1996, 2003) aus sinnkonstituierenden Handlungsvorstellungen zunehmend abstrahierte mentale Modelle verstanden, die Übersetzungen zwischen symbolischer und nichtsymbolischer Ebene von Zahlen,

Tabelle 2.1 Bezeichnung der Grundvorstellungen zur Subtraktion in deutschsprachigen primarstufenorientierten Mathematikdidaktikhandbüchern, chronologisch sortiert

Wegnehmen	**Komplementbildung**	**Quelle**
Subtrahieren	Ergänzen	(Müller & Wittmann, 1977, S. 186)
Abziehen	Ergänzen/ Vergleichen	(Radatz & Schipper, 1983, S. 64)
Subtrahieren	Ergänzen	(Wittmann & Müller, 1993, S. 36)
Weggeben	Vergleichen	(Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling, 1996, S. 77f.)
Abziehen	Ergänzen	(Selter & Spiegel, 1997, S. 91)
Wegnehmen	Ergänzen	(Hasemann, 2003, S. 91 f.)
Wegnehmen/ Abziehen	Ergänzen/ Vergleichen/ Unterschied	(Padberg, 2005, S. 102ff.)
Wegnehmen	Ergänzen/ Unterschied berechnen	(Krauthausen & Scherer, 2007, S. 9)
Abziehen	Ergänzen	(Wittmann, 2010, S. 34)
Wegnehmen/ Abziehen	Ergänzen/ Vergleichen/ Unterschied	(Padberg & Benz, 2011, S. 114ff.)

Handlungen und Strategien ermöglichen, und als solche im Unterricht aufgebaut und kultiviert werden müssen (vgl. Wartha & Schulz, 2011; Wartha, 2010).

Begriffe zu den Grundvorstellungen der Subtraktion

Die Subtraktion kann als Inversion der Addition beschrieben werden: „Die Subtraktion natürlicher Zahlen n, m lässt sich so erklären, dass die Aussage $k=n-m$ gleichbedeutend (und das heißt äquivalent) sein soll mit $n=k+m$“ (Reiss & Schmieder, 2007, S. 26). In der kommutativen abelschen Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ (vgl. Wittmann, 2010, S. 36) der Addition existiert ein inverses Element $a'=(-a)$, so dass $a+(-a)$ wieder das neutrale Element 0 ergibt, die Subtraktion von a also die Addition von a wieder rückgängig macht.

Für die Subtraktion werden in der mathematikdidaktischen Literatur zwei Grundvorstellungen beschrieben, die mit unterschiedlichen Begriffen belegt sind. Während in den deutschsprachigen primarstufenorientierten Mathematikdidaktikhandbüchern *Subtraktion* als Oberbegriff für Operationen benutzt wird, die mit der Differenz zweier Zahlen zu tun haben, so bildet sich ein Begriffspol rund um die Bezeichnung *Wegnehmen* oder *Abziehen*, ein zweiter Begriffspol um die Begriffe *Ergänzen* und seltener, erst später, *Vergleichen* (vgl. Tabelle 2.1, oben). Es existiert also kein einheitlicher Begriffskanon an dieser Stelle, *Wegnehmen* und *Ergänzen* scheinen aber die gebräuchlichsten Bezeichnungen für diese beiden Begriffspole zu sein.

In der internationalen mathematikdidaktischen Literatur wird das Wegnehmen als Grundvorstellung relativ einheitlich in der Regel als *take away* oder *taking away* bezeichnet, während der Parallelbegriff zum Ergänzen dann unterschiedlich bezeichnet wird: Begriffe wie *counting on* (geprägt durch Fuson, vgl. Fuson & Fuson, 1992; Fuson & Li, 2009; Fuson, 1986) oder *adding on* (vor allem im niederländischen Umfeld benutzt, vgl. Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Buijs, 2001; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998) sind semantisch dem Begriff Ergänzen ähnlich, beinhalten aber zusätzlich eine prozessbezogene Komponente innerhalb der Grundvorstellung, ob zählend oder rechnend vorgegangen wird.

Ein vor allem in der belgischen (etwa in Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2009, und vielen weiteren Artikeln dieser Autoren-Gruppe, vgl. Kap. 2.2.2) und niederländischen (zum Beispiel Beishuizen, 1997; oder Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009) Mathematikdidaktik, international erst in jüngerer Zeit und eher selten (z.B. Heinze, Marschick, Grüßing, & Knopp, 2011; Nunes, Bryant, Evans, Bell, & Barros, 2012) benutztes Begriffspaar besteht aus der *direct subtraction*, die das Wegnehmen bezeichnet, und der *indirect addition* für die Grundvorstellung dessen, was in der deutschen Literatur das Ergänzen ausmacht. Hier ist die *indirect addition* deutlich als Gegenbegriff zur *direct subtraction* zu erkennen, gleichsam wird hier an Stelle des Prozesses auf die arithmetische Operation fokussiert, die diese Grundvorstellung intendieren könnte. Dazu repliziert dieses Begriffspaar den Zusammenhang der Subtraktion als Inversion der Addition (s.o.). Während sowohl der deutsche Begriff *Ergänzen* wie der englische *indirect addition* semantisch das Hinzufügen als Gegenbegriff zum Wegnehmen implizieren, so fügen wenige, aktuelle Studien (Peltenburg, Robitzsch, & Van den Heuvel-Panhuizen, 2011; Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009; Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009) der *indirect addition* auch noch die *indirect subtraction* hinzu, als Variante dieser Grundvorstellung.

Der etwas seltener im Deutschen gebrauchte Begriff *Vergleich* für diese zweite Grundvorstellung wird ebenfalls seltener international mit dem Begriff *comparison* (Fuson, 1984, 2003; Usiskin & Bell, 1983; Usiskin, 2008) belegt. Aktuell schlagen Peltenburg, Robitzsch, & Van den Heuvel-Panhuizen (2011) sowie Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hussmann (2012) vor, die drei letztgenannten Sichtweisen unter dem Oberbegriff *determining the difference* zusammenzufassen. Weder für die *indirect subtraction* noch für den Oberbegriff *determining the difference* sind in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik entsprechende Begriffe kohärent, sondern hier wird – wenn überhaupt – in der Regel mit umschreibenden, individuellen Formulierungen gearbeitet.

Wegnehmen und Komplementbildung

Was also unter den genannten zwei Grundvorstellungen zur Subtraktion zu verstehen sein könnte, soll im Folgenden an mehreren Beispielen deutlich gemacht werden, in denen Elemente aus den vorgenannten Texten zusammengefasst und neu dargestellt werden. Letztlich stellt die Addition und die daraus als Inversion entstehende Subtraktion (s.o.) ein Wechselspiel der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung dar (Baroody, Torbeyns, & Verschaffel, 2009; ähnlich in Bender, 1994, S. 10). Für die Addition ist diese Beziehung einfach zu erklären: Zu einem Teil (Summand) b wird ein zweiter Teil (Summand) a hinzugefügt, zusammenfügt ergeben sie das Ganze (die Summe) c, wie die Abbildung 2.1 A (S. 9) ebenfalls – eigentlich zur Subtraktion dargestellt – interpretieren könnte. Dort könnte man ebenfalls die Grundvorstellungen Hinzufügen und Zusammenfügen unterscheiden – hier soll aber der Fokus auf der Subtraktion liegen.

Diese ist in der Grundvorstellung Wegnehmen genauso an der genannten Darstellung verständlich: Vom Ganzen (jetzt Minuend genannt) c wird der Teil (jetzt Subtrahend genannt) a abgezogen, es bleibt der andere Teil (hier Rest genannt) b übrig, die Addition wurde durch eine wegnehmende Subtraktion wieder rückgängig gemacht. Eine algebraische Darstellung sowie die Repräsentation auf Zahlenebene und am Rechenstrich (vgl. hierzu Kap. 2.2.1) dieser beiden Operationen ist in Tabelle 2.2 (S. 9) ersichtlich.

Für die Grundvorstellung Komplementbildung lassen sich nun verschiedene Interpretationen der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung finden. Zunächst kann die Richtung des Prozesses der Komplementbildung unterschieden werden. *Ergänzen* wird dabei in der Regel in oben genannter deutschsprachiger Literatur als Auffüllvorgang betrachtet (noch deutlicher im Begriff *indirect addition* intendiert), dabei wird die Spanne zwischen Subtrahend a und Minuend c ermittelt, indem das Auffüllen von a zu c gemessen wird, in dem eine geeignete (ggf. mit Hilfe des Assoziativgesetzes in mehrere Schritte zerlegte) Zahl b der Zahl a hinzugefügt wird. Algebraisch würde an dieser Stelle der Ansatz $a+\_\_=c$ notiert (vgl. Tabelle 2.2, S. 9, Spalte K+).

Dieser Auffüllvorgang lässt sich auch am Rechenstrich (mehr dazu in Kap. 2.2.1, vgl. ebenfalls Tabelle 2.2) darstellen; während das Wegnehmen hier einfach ein Rückschreiten um den Betrag b am Rechenstrich darstellt, und das Ergebnis dieses Prozesses, die „Zielzahl“ unter dem Strich, das Ergebnis darstellt, werden beim Komplementbilden zunächst zwei Zahlen auf dem Rechenstrich notiert, und ihre Spanne, ihr Abstand, ihre Differenz durch einen (oder mehrere) Schritt(e) zwischen beiden ermittelt.

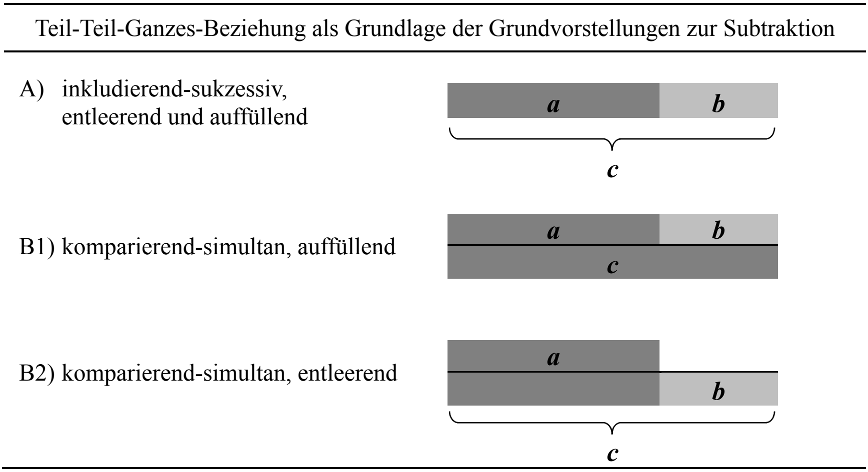


Abbildung 2.1: Teil-Teil-Ganzes-Beziehung als Grundlage der Grundvorstellungen zur Subtraktion

Tabelle 2.2: Grundvorstellungen zur Subtraktion algebraisch, auf Zahlenebene und am Rechenstrich

Op **Gv/F** **Kon**	Addition Z+ zusammenfügen	W- wegnehmen	Subtraktion K+ auffüllen	K- entleeren
alg	*b+a=__?* *b+a=* ***c***	*c-a=__?* *c-a=* ***b***	*a+__=c?* *a+* ***b*** *=c*	*c-__=a?* *c-* ***b*** *=a*
Za	*3+5=__?* *3+5=* ***8***	*8-5=__?* *8-5=* ***3***	*5+__=8?* *5+* ***3*** *=8*	*8-__=5?* *8-* ***3*** *=5*
Rs	+5 3 ?	-5 ? 8	+? 5 8	-? 5 8
Ki	*... kommen hinzu…*	*... gehen hinaus…*	*... sind schon da…*	*...sind noch da…*

Legende: Op = Operation, Gv/F = Grundvorstellung/Format, Kon = Kontexteinkleidung, alg = algebraisch, Za = auf Zahlenebene, Rs = am Rechenstrich dargestellt, Ki = Kino-Kontextfragment, Z= Zusammenfügen, W = Wegnehmen, K = Komplementbildung, + im Additionsformat, - im Subtraktionsformat

Dieses Ausmessen kann prinzipiell in zwei Richtungen erfolgen, wie vor allem an der Rechenstrichdarstellung direkt sichtbar wird, denn auch ein Rückwärtsschreiten von Minuend zu Subtrahend ist denkbar. Campbell (2008, S. 1096) führt hier den Begriff arithmetisches *Format* ein, das sich von der arithmetischen Operation unterscheiden kann, ein Gedanke, der erst in letzter Zeit in aktuellen Texten aufgegriffen wird (Selter u. a., 2012). So kann …

… mit ($a+b=$__) die Addition im Additionsformat,
… mit (__$-b=a$) die *Addition im Subtraktionsformat*,
… mit ($c-b=$__) die wegnehmende Subtraktion im Subtraktionsformat,
… mit (__$+b=c$) die *wegnehmende Subtraktion im Additionsformat*,
… mit ($a+$__$=c$) die komplementbildenden Subtraktion im Additionsformat,
… mit ($c-$__$=a$) die komplementbildenden Subtraktion im Subtraktionsformat

geschrieben werden. Die kursiv gesetzten Varianten *Addition im Subtraktionsformat* und *wegnehmende Subtraktion im Additionsformat* sind dabei theoretisch mögliche Formate, die aber nur mit wiederum der inversen Operation gelöst werden können, so dass vier praktikable Versionen der Campbelschen Formate als Schreibweisen der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung übrig bleiben, die dann auch in Tabelle 2.2 (S. 9) eingearbeitet sind.

In dieser Tabelle ist dann auch die international so bezeichnete die *indirect subtraction* zu finden, ein Begriff, der im Deutschen nicht belegt ist, sondern nur in umschreibenden Varianten existiert, wie z.B. „Ergänzen nach unten“ (Hengartner & Studer, 1999, S. 107) oder „subtraktives ‚Ergänzen‘“ (Bender, 1994, S. 11, ganze Anführungszeichen im Original). Dabei wird mit $c-$__$=a$ die Spanne zwischen Minuend c und Subtrahend a rückwärtsschreitend ermittelt.
Als konnektierter Vorgang würde sich hier komplementär zum Auffüllen das Entleeren anbieten, zu dem dann allerdings der Begriff *Ergänzen* nicht mehr recht passt.

Beide Varianten, das additive Auffüllen und das subtraktive Entleeren, lassen sich auch in Abbildung 2.1 A (S. 9) erkennen – um die Spanne zwischen a und c zu ermitteln, kann sowohl a durch Auffüllen auf c vergrößert werden, also auch c durch Entleeren auf a gebracht werden, wobei das Ausmessen dieser Schritte jeweils b liefert. Mengentheoretisch betrachtet würde man $B=(C\setminus A)$ formulieren, und $(C\setminus A)$ wird in der Mengentheorie nicht nur als „C ohne A“, sondern auch als „Komplement von A zu C“ bezeichnet. In Anlehnung daran wird daher in dieser Arbeit nicht die direkte Übersetzung *Differenzbestimmung* des englischen Oberbegriffs *determining the difference* ins Deutsche benutzt, da der Begriff *Differenz* (als Gegenbegriff zu Summe) stark mit wegnehmendem Rechnen, oder zumindest ambivalent konnotiert ist – übrigens auch im (UK- und US-) Englischen, wie Rowland (2004, 2006) belegt. In Anlehnung an das mengentheoretische Komplement und an einen Vorschlag von Hasegawa, der den Begriff *complement-finding* mit dem Kontext „There are eight children on the playground. Five are boys. How many girls are there on the playground?“ (Hasegawa, 2002, S. 21) belegt, sowie von Baroody, Torbeyns und Verschaffel (2009, S. 2), die den Begriff *complement principle* (vgl. Kap. 2.1.1) verwenden, wenn Grundverständnis für die Ausführbarkeit der Subtraktion als indirekte Addition erworben wird, wird daher in dieser Studie der Begriff *Komplementbildung* für die zweite Grundvorstellung zur Subtraktion verwendet.

→ Die Grundvorstellung Komplementbildung, die sich als Auffüll- oder Entleervorgang repräsentieren kann, wird dann als *Komplementbildung im Additionsformat* bzw. *Komplementbildung im Subtraktionsformat* bezeichnet.

Diese Grundvorstellung Komplementbildung kann des Weiteren neben der Ausprägung in Formate noch unter einem weiteren Aspekt betrachtet werden: Bislang wurde das Auffüllen bzw. Entleeren an einer Ursprungsmenge beschrieben, welche die Operation inkludierend zur Zielmenge wird. Das heißt, ein und die gleiche Menge wird operativ verändert, es entsteht eine sukzessive Vorher-Nachher-Situation. Für dieses Modell wird der Begriff *inkludierend-sukzessiv* vorgeschlagen (vgl. Abbildung 2.1 A, S. 9). In Anlehnung an die Grundvorstellungen zur Subtraktion, die durch ein *zeitlich-sukzessives* und ein *räumlich-simultanes* Modell beschrieben werden können (vgl. Krauthausen & Scherer, 2007, S. 28), wird als Bezeichnung des zweiten Modells *komparierend-simultan* vorgeschlagen: Wie weiter oben beschrieben, wird neben *Ergänzen* auch der Begriff *Vergleich* für die Grundvorstellung Komplementbildung im Deutschen gebraucht (international: *comparison*), wenn nicht mehr nur eine Menge von der Ausgangs- zur Zielmenge verändert wird, sondern zwei Mengen verglichen werden. Die Komplementbildung von a zu c kann dann entweder als Auffüllen von a um b erfolgen, so dass a und b zusammen gleich groß wie c sind (vgl. Abbildung 2.1 B1, S. 9), oder durch Entleeren von c um b, bis c nur noch so groß wie a ist (vgl. ebd., B2). Das Komplement b wäre in allen drei Fällen das Ergebnis der Subtraktion in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Kontexte zu den Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung

Wie eingangs dieses Kapitels beschrieben, entwickeln sich Grundvorstellungen zur Subtraktion in empirischen Situationen mit passenden Kontexten. In vorgenannter Literatur finden sich dazu diverse Vorschläge für Kontexte, vor allem Fuson (vgl. z.B. 1984, 2003) gibt hier stark diversifizierende Varianten an, allerdings befinden sich die vorgeschlagenen Kontexte meist in einem Zahlenraum, der dem Anfangsunterricht zuzuordnen ist, da (vgl. Kap 2.1.1) viele Studien sich mit dem elementaren Erwerb der Grundvorstellungen zur Subtraktion beschäftigen.

Für Unterricht in einem dritten Schuljahr würde daher ein passender Kontext im Tausenderraum benötigt. Hier bietet sich u.a. der Kontext von teilgefüllten Kinosälen an (nach Selter & Sundermann, 1995; Sundermann & Selter, 1995; vgl. auch Selter & Spiegel, 1997; auch international anerkannt, vgl. Verschaffel & De Corte, 1996) an. Dieser Kontext bietet an,

> „*1. zu addieren: «Im Kino sitzen y Personen. Es kommen noch z Personen hinzu.»,*
> *2. abzuziehen: «Im Kino sitzen y Personen. In der Pause gehen z Personen hinaus.»,*
> *3. zu ergänzen: «Das Kino hat y Plätze. Es sind schon z Personen da.»“*
> (Selter & Sundermann, 1995, S. 166)
>
> 4. zu entleeren: «Im Kino waren y Personen. Es sind noch z Personen da.» (eigener Vorschlag)

Neben der Addition (in 1.) sind hier beide Grundvorstellungen zur Subtraktion repräsentiert, das Wegnehmen (in 2.) und die Komplementbildung (in 3.), allerdings intendiert dieser Kontext eher das Auffüllen, in dem hier nach dem inkludierend-sukzessiven Modell von *z* zu *y* aufgefüllt wird (*a* zu *c* in Abbildung 2.1 A, S. 9), also eher die Grundvorstellung Komplementbildung im Additionsformat angeregt wird. Dieser Kontext – man ersetze in obigem Zitat gedanklich „ergänzen“ mit „auffüllen“ – könnte um das Entleeren (in 4.) und damit um mögliche Komplementbildung im Subtraktionsformat erweitert werden. Diese Variante des Kontextes, das Entleeren, hier im inkludierend-sukzessiven Modell von *y* zu *z* (*c* zu *a* in Abbildung 2.1 A, S. 9), welches das Subtraktionsformat anregen könnte, wird nur selten in etwas komplexerer Form in Grundlagenstudien erwähnt, in aktuellen Vorschlägen zu Lernumgebungen oder den mathematikdidaktischen Handbüchern ist weder die Grundvorstellung Komplementbildung im Subtraktionsformat noch ein adäquater Kontext präsent.

2.1.2 Studien zum Erwerb von Grundvorstellungen zur Subtraktion

In diesem Kapitel soll nun der Forschungsstand zur Entwicklung von grundlegendem Verständnis der Subtraktion als Inversion der Addition und der an unterschiedliche Interpretationen der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung geknüpften möglichen Rechenvarianten in beiden Grundvorstellungen dargestellt werden.

Begriffskanon

Begrifflich wird hier unterschieden in vier sogenannte *arithmetic principles*. Dabei ist zunächst der Begriff *principle* zweideutig, denn das englische *principle* kann im Deutschen mit *Gesetz*, aber auch mit *Grundlage* oder *Grundverständnis* übersetzt werden. Studien zu genannten *arithmetic principles* subsumieren also sowohl den Umgang mit arithmetischen Gesetzen als auch deren Grundverständnis in einem Zug. Baroody, Torbeyns und Verschaffel (2009, S. 2) nennen vier *principles*, die sich auf die Subtraktion beziehen:

- Das *subtractive negation principle*: Verständnis dafür, dass jede Zahl *n* von sich selbst abgezogen nichts (Null) hinterlässt (n-n=0).
- Das *subtractive identity principle*: Verständnis dafür, dass eine Operation minus Null jede Zahl *n* unverändert hinterlässt (n-0=n).
- Das *inverse principle*: Verständnis dafür, dass die Subtraktion die inverse Operation der Addition darstellt, und dass ein Hinzufügen von *a* und ein anschließendes Wegnehmen von *a* die Operation aufhebt (b+a-a=b).
- Das *complement principle*: Verständnis dafür, dass die Subtraktion durch eine indirekt Addition ersetzt werden kann (wenn b+a=c, dann kann c-a=__ auch mit a+__=c gelöst werden).

Die ersten beiden *principles* beziehen sich dabei auf die Null als neutrales und inverses Element der kommutativen abelschen Gruppe der Addition (vgl. Wittmann, 2010, S. 36), während letztere zwei mit der Subtraktion als Inversion der Addition und umgekehrt verknüpft sind, und vor allem das *complement principle* dabei an die Grundvorstellung der Komplementbildung anknüpft (vgl. Kap. 2.1.1, darin Tabelle 2.2, S. 9). Begrifflich wird dabei in einigen Studien *inversion* oder das *inverse principle* auch für das *complement principle* verwendet, bzw. werden diese Begriffe nicht trennscharf voneinander benutzt (Baroody, Torbeyns, u. a., 2009, S. 3). Zusätzlich zum *inverse principle* und zum *complement principle* wird von letztgenannten Autoren noch die *empirical inversion* genannt: Auf der Grundlage des arithmetischen Gesetzes der Inversion (b+a-a=b) machen Kinder die empirische Erfahrung, dass zunächst ein Hinzufügen von *a* und ein anschließend Wiederwegnehmen von *a* zurück zur Ausgangszahl führt, und daraus das Grundverständnis für das Zusammenspiel von Addition und Subtraktion, also auch die Lösbarkeit von Subtraktionsaufgaben durch indirektes Addieren, im *complement principle* erst ensteht.

Studien zum Grundverständniserwerb der Inversion

Zur Frage, ob Kinder Verständnis für die Inversion zwischen Addition und Subtraktion grundlegend erwerben können, existieren eine Reihe von Studien, sowohl detailliert bezogen auf ein einzelnes der vier *principles*, als auch zusammenhängend. Der Grunderwerb wird dabei zumeist im Rahmen der sogenannten *single-digit arithmetic*, also in elementaren Zahlenräumen, untersucht, vornehmlich innerhalb der kognitionspsychologischen Domäne, mit den dort üblichen standardisierten quantitativ-empirischen Methoden. Zur Abgrenzung sei genannt, dass einigen Studien sowohl *single-digit arithmetic* als auch *multi-digit arithmetic* untersuchen, also etwa im Hunderter- oder Tausenderraum, dieser Bereich wird in Kap. 2.2.3 beschrieben. Warum diese Frage überhaupt relevant für die Forschung ist, beantworten Verschaffel, Bryant & Torbeyns (2012, S. 327ff.; ähnlich auch in Baroody, Torbeyns, u. a., 2009) mit:

„Applying the inverse principle can facilitate children's mental arithmetic by eliminating computational effort and increasing solution efficiency. […] The second reason for studying children's ideas about inversion is that the understanding of the inverse relations between addition and subtraction is an essential part of learning about each of these four operations. To understand the nature of either addition or subtraction, unless one also grasps the relation between these two operations"

Zum einen ist also Gegenstand der Forschung, ob und wie sich durch das Anwenden der Inversion zum Beispiel durch Komplementbilden an Stelle von Wegnehmen die Effizienz des Rechnens steigern kann, zum anderen ist von Interesse, der Verständnisentwicklung des inversen Zusammenhangs zwischen Addition und Subtraktion nachzugehen.

Effizienz wird in der Regel als Bearbeitungszeit der Aufgabe verstanden und kann bis in den Millisekundenbereich gemessen werden. So untersuchten Seyler, Kirk & Ashcraft die „performance on the 100 'basic facts' of subtraction" (2003, S. 1339; vgl. auch Ashcraft, 1982), also alle Subtraktionsaufgaben, die sich als Inverse der Additionsaufgaben von 0+0 bis 9+9 bilden lassen, und fanden heraus, dass das Arbeitsgedächtnis Erwachsener bei Aufgaben mit einem Minuend größer als 10 wesentlich stärker beansprucht wird als darunter, gemessen an der Reaktionszeit in Millisekunden, zudem steigt die Fehlerzahl bei Minuenden über 10 deutlich an. Campbell (2008) sowie Campbell & Angnew (2009) legten solche ebenso in symbolischer Form präsentierte Aufgaben nicht nur im wegnehmenden Subtraktionsformat (13-6=__), sondern auch im komplementbildenden Additionsformat vor (6+__=13). Dabei zeigte sich in den ebenfalls mit Erwachsenen durchgeführten Studien kein Effizienzvorteil für Aufgaben im komplementbildenden Additionsformat bei den *small problems* (in Studien zur *single-digit-arithmetic* übliche Bezeichnung für Minuenden <11), aber ein deutlicher Effizienzvorteil gegenüber den Aufgaben im Subtraktionsformat bei den *large problems* (Minuend >10), ein Effekt, der schon von Woods, Resnick, & Groen (1975) festgestellt und in Studien auch bei Kindern nachgewiesen wurde (Kindergartenkinder und Erstklässler durch Baroody, 1999; Drittklässler durch De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010; sowie aktuell Peters u. a., 2012 mit Dritt- bis Sechstklässlern; immer single-digit arithmetic).

Effizienz, gemessen an Reaktionszeiten, muss aber nicht unmittelbar auch ein Maß für das Verständnis der Inversion zwischen Addition und Subtraktion sein. Nunes u.a. merken dazu an (2012, S. 372; gestützt auf die Studien von Bryant, Christie, & Rendu, 1999; Gilmore & Papadatou-Pastou, 2009, die ähnliche Aussagen machen):

> *„In the domain of smaller numbers, there is evidence that children's knowledge of addition and subtraction number facts and their understanding of the inverse relation are independent of each other."*

Zusätzlich zur Reaktionszeit wurde daher beobachtet, wie Kinder die gestellten Probleme lösen, zum Beispiel bei Aufgaben im wegnehmenden Subtraktionsformat, ob jüngere Kinder diese durch aufwärtszählen (also auffüllendes Komplementbilden) vom Subtrahenden zum Minuenden meistern. Baroody (1999, S. 141, Ergänzungen durch Baroody) zitiert Resnick (1992) mit den Worten:

> *„Resnick argued that the use of counting up 'means that children must convert ... subtraction problems into addend-unknown problems [e.g. 7-5=? → 5+?=7]. Children's willingness to treat these two problems as equivalent means that, at least implicitly, they understand the [complementary relation between addition and subtraction].' (p. 387)"*

Allerdings ist auch hier – so Baroody weiter – durchaus denkbar, dass der Wechsel in das Additionsformat ein erlerntes Kalkül ist, ohne dass die Kinder wirkliches Grundverständnis über den inversen Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion erworben haben müssen. Kognitionspsychologisch wird allerdings vermutet, dass die *basic facts* (also die kombinatorisch mögliche single-digit arithmetic repräsentiert in Additions- und Subtraktionsaufgaben) als *part-whole-relationships* (also Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen, z.B. 7, 5, 12) gespeichert werden, und dann über das semantische Verständnis der entsprechenden Aufgabe in die entsprechenden Formate (12-7=5, 5+7=12) gewandelt und reproduziert werden, und dabei fehlende Elemente der Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen ermittelt werden. Dieses aktive Wandeln wird dabei als konstruktiver Akt und somit als das eigentliche Verständnis der Inversion angesehen (Baroody, 1999, S. 152), das wiederum effizienter als das Memorieren im und Repetieren aus dem Langzeitgedächtnis aller *basic facts* angesehen wird (vgl. auch Baroody, 1985; Putnam, de Bettencourt, & Leinhardt, 1990; Resnick, 1983; Riley, Greeno, & Heller, 1983).

In einer aktuellen Studie benutzten Nunes u.a. (2012) einen Taschenrechner, mit Hilfe dessen die Kinder im komplementbildenden oder wegnehmenden Additionsformat präsentierte Aufgaben (b+?=a oder ?+b=a) rechnen mussten, die aber zur Eingabe in den Taschenrechner erst mental in das Subtraktionsformat (a-b=?) transferiert werden müssen – die Eingabe in den Taschenrechner macht das zuvor beschriebene auf Verständnis beruhende Wandeln dann direkt sichtbar, wie Nunes u. a. (2012, S. 385f.) konstatieren:

> *„In this context, they would have to convert a problem that on the surface is an addition into a subtraction, which they can do easily if they understand that subtraction is the inverse of addition."*

Auch wenn zum Thema dieser Arbeit die bislang dargestellten Studien zum *complement principle* vordergründig interessant sind, so existieren zu den weiteren *arithmetic principles* (s.o. unter Begriffskanon) wie dem *subtractive negation principle* (n-n=0), dem *subtractive identity principle* (n-0=n) und vor allem dem *inverse principle* (b+a-a=b), das Grundverständnis zur Inversion differenzierendere Studien. Dass in diesen Grundlagenstudien auch scheinbar triviale Fragestellungen wie das *subtractive identity principle* (n-0=n) beforscht werden, mag auf den ersten Blick verwundern, hier sei kurz erwähnt, dass in anderen abelschen Gruppen wie der Multiplikation (auch zur Multiplikation exisiteren Studien zum Grunderverständniserwerb, z.b. als eine der aktuellsten: Robinson & LeFevre, 2012) andere neutrale Elemente (dort a·1=a) und andere inverse Operationen vorhanden sind, und dass es keineswegs selbstverständlich sein muss, Verständnis über die Null als neutrales Element der Subtraktion zu erwerben. Allerdings scheint hier deutlich zu sein, dass bereits vierjährige Kinder ein stabiles Verständnis von Negation (z.B. 3-3=0) und Identität (3-0=3) erworben haben (vgl. z.B. Baroody, Lai, Li, & Al. Baroody, 2009; Baroody & Lai, 2007).

Die längste Forschungstradition besteht im Bereich des *inverse principle* (b+a-a=b), das zunächst als Kernverständnis für Inversion galt, erst später wurde auch das *complement principle* als konstruktive Anwendung des inversen Zusammenhangs zwischen Addition und Subtraktion ergänzend beforscht. Auch hier mag die Forschungsevidenz zunächst verwundern, da es doch handelnd leicht nachvollziehbar ist, dass ein Zufügen und ein anschließendes Wegnehmen der gleichen Menge wieder zum Ausgangszustand führt. Untersucht wird allerdings, ob genau diese Erkenntnis bereits als Grundverständnis vorhanden ist, also ob Kinder eben nicht mehr das Hinzufügen oder Wegnehmen nachvollziehen müssen, sondern direkt sagen können, dass dieser Vorgang die Ausgangsmenge nicht verändert.

Frühe Studien arbeiten hier rein auf (bei jüngeren Kindern verbal präsentierter) Zahlenebene, seltener werden diesen Sachverhalt abbildende Kontexte benutzt. In neueren Studien wird aber auch mit nicht zählbaren enaktiven oder ikonischen Materialdarstellungen gearbeitet. Nunes u. a. (2009, S. 71; ähnlich auch in Gilmore & Spelke, 2008) etwa zeigten Kindern (auf Bildern und real) eine nicht zählbare Ausgangsmenge, zum Beispiel 7 Murmeln, die in einem Säckchen seien, entnahmen dann 5 Murmeln, und fügten diese direkt wieder hinzu. Nur Kinder, die bereits ein Konzept des *inverse principle* haben (und damit auch indirekt Negation und Identität verstehen), können direkt sagen, dass weiterhin 7 Murmeln im Säckchen sein müssen – andere, die erkennbar Operationen ausführen (z.B. von 7 weiterzählen und wieder zurückzählen, etc.), oder gar raten, schätzen oder das Problem als nicht lösbar bezeichnen, haben dieses Konzept noch nicht erworben.

Insgesamt existiert eine ganze Reihe von beobachtenden Studien zum *inverse principle* mit zum Teil sehr differenzierenden Teilfragestellungen (vgl.

z.B. Baroody & Dowker, 2003; Baroody & Lai, 2007; Bisanz, Watchorn, Piatt, & Sherman, 2009; Bryant u. a., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Gilmore & Spelke, 2008; Gilmore, 2006; Rasmussen, Ho, & Bisanz, 2003; Robinson & Dubé, 2009; Robinson, Ninowski, & Gray, 2006; Schneider & Stern, 2009; Siegler & Stern, 1998; Stern, 1992; Vilette, 2002). Die Kernaussage all dieser Studien, betrachtet als Relevanz für diese Arbeit, ist immer gleich: Etwa im Alter zwischen 5 und 6 Jahren entwickeln Kinder ein stabiles Grundverständnis für das *inverse principle*, wenn auch in unterschiedlicher Tiefe, kohärent zu ihrem arithmetischen Gesamtentwicklungsstand (Gilmore & Bryant, 2006). Ein Grundverständnis für den inversen Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion dürfte damit etwa bei Schuleintritt bei allen Kindern vorhanden sein.

Studien zur Lehrbarkeit der Inversion

Die bislang vorgestellten Studien zum Grundverständnis der Inversion zwischen Addition und Subtraktion sind in der Regel beobachtende Studien, das heißt, es wurden Analysen aus dem Problemlöseverhalten der Partizipierenden gezogen. Eine weitere Gruppe von Studien – zum Teil auch mit Überschneidungen, da auch beobachtende Segmente vorhanden – beschäftigt sich mit der Lehrbarkeit des Grundverständnisses der Inversion. Das Problemlöseverhalten von Kindern in inversen Situationen wird hier nicht mehr nur hinterfragt, sondern bewusst gefördert, und der Einfluss dieser Förderung anschließend evaluiert.

Bereits sehr früh hat hier vor allem Fuson (1984) ausgehend von den beobachtenden Studien von Baroody (1984) und Carpenter & Moser (1984) nicht nur die diversen Ausprägungen der Grundvorstellungen und Formate der Subtraktion mit den entsprechenden Kontexten, sondern auch die elementare Lehrbarkeit von *counting up* (auffüllende Komplementbildung) reflektiert und später in empirischen Studien im Bereich der *single-digit* (z.B. Fuson, 1986; Fuson & Willis, 1988; Fuson, 1990; Fuson & Fuson, 1992) und *multi-digit arithmetic* (etwa Fuson u. a., 1997; Fuson & Burghardt, 2003) erprobt, später beide Bereiche und deren Grundvorstellungen und Kontexte weiter sublimiert und zusammengefasst (Fuson, 2003), schließlich noch in kulturvergleichenden Studien (z.B. USA und China, Fuson & Li, 2009) weiter ausdifferenziert.

Dabei unterscheidet Fuson (Fuson, 1984, S. 21) vier lebensechte Verwendungssituationen (*real-world situations*) der Subtraktion: Den Vergleich (*comparison*), das Wegnehmen (*separate or take away*), das Auffüllen (*join missing addend*) und die Teilmengenbestimmung (*combine missing addend*). Diese Unterscheidung wurde später (Fuson, 2003, S. 245) noch einmal präzisiert in: Wegnehmen (*change take from*), Ausgleichen (*equalize* in den Varianten *change take from difference* und *change add to difference*) und Vergleichen (*compare*: *how many more?* und *how many less?*). Die in Kap. 2.1.1 vorgestellten Varianten der Grundvorstellungen zur Subtraktion finden sich hier wieder, sowohl das

Wegnehmen, als auch die inkludierend-sukzessive (*join*, *equalize*), und die komparierend-simultane (*combine*, *compare*) Variante der auffüllenden Komplementbildung sind enthalten; die Erweiterung (*take from difference*, *how many less*) integriert dann zusätzlich das Entleeren. Für all diese Verwendungssituation der Subtraktion gibt Fuson entsprechende Kontexte als Repräsentanten an.

In den Studien von Fuson (1986) und Fuson & Willis (1988) bekamen Erstklässler eine *instruction*, die Subtraktion mittels *counting up* vorzunehmen. Den Begriff *instruction* muss man hier wörtlich nehmen, denn die Kinder wurden rigide instruiert, wie sie mit Hilfe von quasi-algorithmischen *finger patterns* das *counting up* vorzunehmen hatten. Diese Instruktion verbesserte die Performanz signifikant (gemessen an Fehlerquotienten, in begleitenden Interviews zusätzlich evaluiert), sowohl bei symbolisch notierten, dann durch *counting up* gelösten Subtraktionsaufgaben, als auch in Kontextaufgaben der genannten verschiedenen Typen, auch in Kontexten der Grundvorstellung Wegnehmen. Fuson & Willis (1988, S. 417f., Nummerierung US) ziehen drei Fazits aus den Studien:

> *„[1]Multiple lines of interview evidence indicate that counting-up instruction does not interfere with children's understanding of take-away situations and even improves it. ... [2]Many children can be expected to invent counting up after count-on instruction but before count-up instruction; most of these inventions occur on compare and equalize wordproblems. ... [3]Counting up also seems to be a fairly natural strategy for children in the Context of compare and equalize situations because before the counting-up instruction, more children counted up for these problems than counted down for a take-away word problem. “*

Offenbar hatte man Sorge, dass Kontexte des Wegnehmens, in denen man die Kinder trotzdem per Instruktion zu *counting up* veranlasste, ggf. nicht mehr verständlich sein könnten – dies war nicht der Fall. Vor allem in den Interviews zeigte sich, dass die Kinder von sich aus das *count-on* (die gleiche *finger pattern* Methode für die Addition) auf die Subtraktion als *counting up* übertrugen, noch bevor hierin die Instruktion erfolgte, in Kontexten, die man heute der Grundvorstellung Komplementbildung zuordnen würde. Daraus zogen die Autoren den Schluss, in diesen Kontexten sei das *counting up* eine Strategie, die *fairly natural* sei, also in der Natur der Sache liege.

Auch wenn die rigide Art der Instruktion, die wenig mit heutigen mathematikdidaktischen Lehransätzen zu tun hat, durchaus kritisch gesehen werden muss, und deren Ergebnisse nicht einfach auf heutige elementare Unterrichtssituationen übertragen werden dürfen, so sind diese Studien doch bedeutsam, da hier zum ersten Mal deutlich *inventions* (also Entdeckungen durch eigene konstruktive Übertragungsleistungen) nachgewiesen werden, ausgelöst durch entsprechende Kontexte. Darüber hinaus sprechen Fuson & Willis von *counting up* als *strategy*, und mit dem Begriff Strategie werden hier heuristische, Rechenvorteile verschaffende Prozesse (vgl. Kap. 2.2) in die Diskussion eingebracht, zu einer Zeit, in welcher der Mathematikunterricht noch stark von Kleinschrittigkeit und Standardprozeduren geprägt war (vgl. Müller & Wittmann, 1984; Radatz & Schipper, 1983).

Und letztlich werden in beiden Studien nicht nur quantitative empirische Daten wie Fehlerquotienten erhoben, sondern qualitative Methoden (Auswertung von Interviews) in die Analyse mit einbezogen, so dass Verständnis von Inversion hier anders als in den vorgenannten Grundlagenstudien erhoben werden konnte. In einer Follow-up-Studie von Fuson & Fuson (1992) konnten diese Ergebnisse bestätigt werden, zusätzlich ließ sich nachweisen, dass Subtraktionsaufgaben nach der *counting up* Instruktion nicht nur fehlerfreier, sondern auch schneller gelöst wurden.

In der weiter oben schon mehrfach angesprochenen Studie von Baroody (1999) wurde ebenfalls, neben einem beobachtend durchgeführten Teil, eine Intervention zur Überprüfung der Lehrbarkeit der Inversion durchgeführt. Zunächst wurden vier- bis siebenjährige Kinder (Kindergartenkinder und Erstklässler) nach parametrischen Tests hauptsächlich (es wurden auch Aufgaben zur Identität, zur Kommutativität und zur Nachfolgerbildung gestellt) mit Subtraktionsaufgaben wie 8-5 in Interviewform beobachtet, dabei wurde neben der Subtraktionsaufgabe (oder den anderen genannten Aufgaben) die passende Additionsaufgabe – in diesem Beispiel 5+3=8 – sichtbar ausgelegt, und das Kind befragt, ob diese sichtbare Aufgabe beim Lösen der Subtraktionsaufgabe half. Der Lösungsprozess wurde beobachtet, ebenso bei einer weiteren Aufgabenart (einfachste Additions- und Subtraktionsaufgaben bis 6), die, konnte das Kind die symbolische Form nicht verstehen, zusätzlich noch in einer entsprechenden Kontextvariante vorgetragen wurden. Die Ergebnis waren kohärent zu einer vorhergehenden Studie (vgl. Baroody, Ginsburg, & Waxman, 1983): 3 von 11 Kindergartenkindern (etwa ein Viertel), die vorher noch keinen Kontakt zur formal notierten Subtraktion hatten, zeigten Anzeichen der Nutzung des inversen Zusammenhangs, bei den restlichen 29 Kindern aus Kindergarten und erster Klasse, die bereits Kontakt mit formal notierter Subtraktion hatten, waren dies 18 Kinder (also etwa zwei Drittel), darunter nur 5, die nicht nur partiell anzeichenweise, sondern generell eine Nutzung der Inversion explizit zeigten. Baroody zieht daraus den Schluss: „the complementary relation between addition and subtraction is not highly salient to children“ (Baroody, 1999, S. 147f.), Kinder sähen nicht automatisch eine Verbindung zwischen Subtraktion und Addition. Allerdings scheint das Nutzen dieser Verbindung effizient zu sein: Es fand sich ein hoher Anteil der Aufgaben mit richtiger Lösung unter jenen, bei denen die Kinder erkennbar den Zusammenhang zur präsentierten Additionsaufgabe nutzten, um die Subtraktionsaufgabe zu lösen.

In einer zweiten Erhebung wurden dann 21 Erstklässler mit ähnlichen Aufgaben wie in Studie 1 konfrontiert. Eingerahmt durch einen Pre- und Posttest fand dann eine Form der Instruktion, ein „training“, durch eine Doktorandin Baroodys statt:

> *„Three sessions […] focused on solving subtraction word problems, connecting symbolic subtraction expressions to children's informal understanding of subtraction, and fostering informal strategies. […] 24 sessions […] focused on helping children (a) understand the ire complementary relation between subtraction and addition, (b) master basic addition combinations, and (c) [… u.a. Aufgaben zur Nachfolgerbildung, US]. […] To help children recognize the complement principle, the trainer repeatedly pointed out that, for example, ‘the subtraction problem >5 take away 3 makes what?< (5-3=?) can be thougt of as >3 added to what makes 5< (3+?=5).’“*
>
> *(Baroody, 1999, S. 153f.).*

Man begann also als Einstieg mit Kontextproblemen, lies informelle Lösungen zu, und brachte symbolische notierte Aufgaben hiermit in Verbindung. In den 24 Trainingssessions wurden auch die Einspluseinsaufgaben trainiert, da Baroody ausschließen wollte, dass das Arbeitsgedächtnis bei der Nutzung einer inversen Additionsaufgabe durch deren Lösungsprozess zu stark belastet würde, so dass für die Nutzung der Teil-Teil-Ganzes Beziehung und deren Übertragung auf die Subtraktionsaufgabe möglicherweise keine Denkleistung mehr möglich wäre. Vor allem aber wurde, wie im Zitat beschrieben, immer wieder additive Komplementbildung als Lösungsmöglichkeit für Subtraktionsaufgaben expliziert. Eine Kontrollgruppe bekam die gleichen Aufgaben, ohne dass hier die inverse Beziehung zwischen Subtraktion und Addition betont oder erklärt worden wäre.

Der Pretest erbrachte ähnlich Ergebnisse wie die erste Erhebung, aber auch der Posttest ergab keine wesentlich positiveren Ergebnisse, was die Nutzung der inversen Beziehung betraf, abgesehen davon, dass a) ein Einfluss der trainierten Additionsaufgaben festgestellt werden konnte – waren diese abrufbar, wurde auch die additive Komplementbildung häufiger zur Lösung der Subtraktionsaufgabe genutzt, und b), dass generell die Routine bei der (isolierten) Lösung von Subtraktionsaufgaben zunahm. Dazu passt, dass sich die Ergebnisse der Kontrollgruppe nicht signifikant von der Gruppe, die das „training“ erhielt, unterschieden.

Schon bei der Durchführung gab die Trainerin zu Protokoll: „The complement principle was hard for children to grasp“ (Baroody, 1999, S. 156). Baroody u. a. schlossen aus den enttäuschenden Ergebnissen des Trainings, „that this relation is not obvious to children and […] not easily taught to them“ (Baroody, 1999, S. 165), und zogen daraus u.a. als Fazit (Baroody, 1999, S. 170):

> *„[A]n understanding of the complement principle may be difficult to impose on children by direct instruction. Unlike the unsuccessful training in this study, providing carefully structured an purposeful opportunities for discovering this relation, giving children time to discover the regularity themselves, and encouraging them to share their insights may facilitate the construction of this key aspect of number sense"*

Die Studie von Baroody ist deshalb als bedeutsam anzusehen, weil hier im Gegensatz zu denen von Fuson (s.o.) nicht nur eine Prozedur gelehrt wurde, sondern versucht wurde, den strukturellen Zusammenhang der Teil-Teil-Ganzes Beziehung zu explizieren, und damit Verständnis – mehr als Performanzverbesserung – für das Grundverständnis der Inversion zwischen Addition und Subtraktion und somit auch für Komplementbildungsprozesse anzuregen. Aus dieser Studie hat sich auch die Erkenntnis weitergetragen, dass Kinder dieses Verständnis nicht vermittelt bekommen können, sondern dieses als konstruktiver, eigenständiger Akt der Erkenntnis selbst erarbeiten müssen.

Darüber hinaus ist an der Studie von Baroody lehrreich, dass die grundsätzliche Einsicht in die Inversion – wie sie die weiter oben genannten beobachtenden Studien für ca. Sechsjährige erwiesen – und deren viel seltenere eigenständige (nicht wie bei Fuson verordnete) Nutzung zu Problemlöseprozessen zwei verschiedene Dinge sind, und letztere Gegenstand des Unterrichts der Primarstufe sein muss, wie auch weitere Studien für die *single-digit arithmetic* (vgl. aktuell Robinson & Dubé, 2009; Nunes u. a., 2009, 2012) bestätigen konnten – weitere Studien mit ähnlichen Aussagen zur *multi-digit arithmetic* werden in Kap. 2.2.3 noch vorgestellt.

2.1.3 Zusammenfassung und Fazit

Kapitel 2.1 stellte in seinen Unterkapiteln verschiedene grundlegende Aspekte der Komplementbildung dar – als Grundvorstellung der Subtraktion, die auf der Teil-Teil-Ganzes Beziehung und als Inversion der Addition beruht, sowie den Forschungsstand in Studien, die sich mit dem Erwerb eines elementaren Grundverständnisses dieser Zusammenhänge beschäftigen. An dieser Stelle sollen diese nun noch einmal mit Blick auf das Thema der vorliegenden Arbeit gespiegelt werden, die ja vor allem halbschriftliches strategisches Rechnen im Tausenderraum zum Gegenstand hat, so dass die Relevanz der zuvor getroffenen Aussagen hier deutlich gemacht werden soll.

Die Subtraktion als Inversion der Addition auf der Grundlage einer gemeinsamen Teil-Teil-Ganzes Beziehung, mit den ihr zuzuschreibenden Eigenschaften einer abelschen Gruppe, spiegelt sich direkt in den kognitionspsychologischen *arithmetic principles* wieder: Studien zum *subtractive negation principle*: erheben das Grundverständnis für das inverse Element, Studien zum *sub-*

tractive identity principle für das Grundverständnis neutralen Elementes, und Studien zum *inverse principle* wie zum *complement principle* dann Anwendungen des inversen Elementes auf die Teil-Teil-Ganzes Beziehung. Die letzteren beiden Begriffe werden dabei in den genannten Studien nicht trennscharf benutzt, dafür aber in diverse Teilaspekte ausdifferenziert. Letztlich erscheint die Unterscheidung zwischen *inversion principle* und *complement principle* aber von recht theoretischer Natur, wie Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers (2009, S. 104) anmerken:

> *„From a math-didactical perspective, the distinction may be more of a notational nature rather than a difference in underlying mathematical structure.“*

Wenn also in dieser Arbeit der Begriff *Grundvorstellung Komplementbildung* u.a. in Anlehnung an das *complement principle* (in Abgrenzung vom üblichen Begriff *Ergänzen*, der gleichsam für eine Grundvorstellung wie für eine Rechenstrategie steht, und das subtraktiv-entleerende Komplementbilden wenig berücksichtigt) benutzt wird, so subsumiert dieser all jene Aspekte, in der sich die Subtraktion nicht in der Grundvorstellung des Wegnehmens, sondern im Ausnutzen der inversen Beziehung zur Addition repräsentiert – Varianten der Teil-Teil-Ganzes Beziehung, die man kontextuell als Auffüllen oder Entleeren, auf der Notationsebene mit dem Additions- oder Subtraktionsformat, oder auf der Prozessebene mit *counting on*, *adding on*, oder *indirect addition* beschreiben kann. All diese elementaren Ausprägungen ein und derselben mathematischen Struktur sind dabei auch grundlegend für das strategische subtraktive Rechnen im Tausenderraum, die dort mit Hilfe von Rechengesetzen (Kommutativgesetz, aber vor allem Assoziativgesetz) von der *single-digit* auf die *multi-digit arithmetic* übertragen werden, wie in Kap. 2.2 noch ausführlich dargelegt werden wird.

Zur Grundvorstellung Komplementbildung lässt sich aus den in Kap. 2.1.2 dargestellten Studien, gestützt auf ähnliche Darstellungen in aktuellen mathematikdidaktischen Analysen (vgl. Selter u. a., 2012; Verschaffel u. a., 2012), folgendes Fazit ziehen:

- Kinder erwerben etwa im Alter des Eintritts in die Grundschule ein Grundverständnis über die Inversion zwischen Addition und Subtraktion.
- Sowohl in kontextgebundenen als auch in kontextfreien Problemstellungen sind sie in der Lage, selbst elementare Komplementbildungsprozesse als Transformationen der Teil-Teil-Ganzes Beziehung durchzuführen.
- Wenn sie elementare Komplementbildungsprozesse durchführen, sind diese zum Teil effektiver als das Wegnehmen, vor allem in der *large-single-digit arithmetic*, was durch abrufbar verfügbare Additionssätze noch unterstützt werden kann.

- Von sich aus wenden Kinder zu Schulanfang nur selten Komplementbildungsprozesse an Stelle des Wegnehmens an.
- Komplementbildung wird in den meisten Studien als additives Auffüllen beschrieben, nur selten findet, etwa bei Fuson (1984, 2003) wenigstens in der theoretischen Analyse (dort und auch bei anderen weniger in den Problemstellungen der Studien) auch das Entleeren als subtraktive Komplementbildung Berücksichtigung, erst Campbell (2008) weist auf die prinzipielle Varietät der Formate hin.
- Explizierende Trainingsprogramme steigern zwar die Performanz, aber nicht das Verständnis – dieses muss durch Anregung zu eigenem, konstruktivem Denken erworben werden, eine Aufgabe für den Mathematikunterricht der Primarstufe.

Wenn sich gerade bei Kindern im Alter des Schuleintritts ein Grundverständnis für die Inversion zwischen Addition und Subtraktion bildet, dann haben all diese genannten Gedanken Konsequenzen für den Erstrechenunterricht, den Müller & Wittmann schon früh (1977, S. 186) für die deutschsprachige Mathematikdidaktik formulierten (und dort an 11-9=_ ⇔ 9+_=11 exemplifizieren):

> *„Das operative Vorgehen [im Erstrechenunterricht, U.S.] verlangt auch, daß das Zusammensetzen und Zerlegen bzw. Addition und Subtraktion als inverse Operation in engster Verbindung behandelt und wechselseitig für einander nutzbar gemacht werden."*

Diese Kerngedanken für den Anfangsunterricht wurde dann später auf höhere Zahlenräume und halbschriftliches, strategisches Rechnen übertragen – wie sich im nun folgende Kapitel noch zeigen wird.

2.2 Komplementbildung – eine halbschriftliche Strategie?

Während sich Kap. 2.1 den Grundlagen der Komplementbildung widmete, also deren mathematischer Struktur und dem Erwerb von Grundverständnis bei jüngeren Kindern im Übergang zwischen Kindergarten und Grundschule (*single-digit arithmetic*), so wird in diesem Kapitel die Komplementbildung in der *multi-digit arithmetic* diskutiert. Dazu ist es zunächst wichtig, verschiedene Rechenarten voneinander abzugrenzen und den Begriff *halbschriftliches Rechnen* zu determinieren, bevor das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung hierin eingeordnet wird. Analog zum Kap. 2.1 wird dann der Forschungsstand zur komplementbildenden Subtraktion im Bereich der *multi-digit arithmetic* vorgestellt.

2.2.1 Halbschriftliches Rechnen

In diesem Kapitel geht es zunächst darum, was unter *halbschriftlichem Rechnen*, bzw. weiter gefasst unter *mentaler Arithmetik* zu verstehen ist, und wie sich dieses Rechnen von anderen Rechenarten abgrenzt. Da halbschriftliches Rechnen in der Regel in Verbindung mit Rechenstrategien diskutiert wird, soll der aus diesem Bereich stammende Begriff der *adaptiven Expertise* thematisiert werden.

Bei halbschriftlichem Rechnen kommen Rechengesetze zur Anwendung. Dies sind im Wesentlichen das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition (aus der Addition als abelsche Gruppe ableitbar, vgl. Wittmann, 2010, S. 36; das für das Vereinfachen wichtige Gesetz der Konstanz der Differenz stellt im Grunde nur einen Spezialfall des Assoziativgesetzes dar), die ausgenutzt werden, um einzelne Zahlen der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung (vgl. Kap. 2.1.1) in kleinere Bestandteile zu zerlegen, um damit günstiger rechnen zu können. Diese Rechengesetze werden in der Regel im Unterricht nur implizit thematisiert, und bilden dabei sogenannte *theorems in action* – dieser Begriff wird noch am Ende dieses Kapitels erläutert.

Rechenarten

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik unterscheidet man vier Rechenarten (zum Teil auch als Rechentypen oder Rechenmethoden bezeichnet): *Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen*, *schriftliche Rechenverfahren*, *Rechnen mit Rechengeräten* (vgl. im Folgenden Wittmann, 1999, S. 88ff.; aber auch Plunkett, 1987; Krauthausen, 1993; Krauthausen & Scherer, 2007; Padberg & Benz, 2011).

Das Rechnen mit Rechengeräten (hierunter verstand man in den genannten früheren Publikationen den Taschenrechner, später auch den Computer) muss dabei im historischen Kontext gesehen werden, zur Zeit der erstmals günstig verfügbaren Taschenrechner entbrannte ein didaktischer Streit über den Nutzen des Taschenrechners in der Grundschule. Inzwischen ist diese Diskussion ausgelaufen; es bestehen sinnvolle didaktische Einsatzmöglichkeiten des Taschenrechners, und zwar jenseits des Einsatzes als Rechenmittel zum originären Lösen von Aufgaben, sondern z.B. dem problemlösenden Denken. Da weder der Taschenrechner, noch der Computer (bzw. die auf ihm eingesetzte Software) im Unterrichtsversuch dieser Arbeit eine Rolle spielt, soll hier aus Platzgründen nicht weiter auf die didaktische Diskussion zu diesen Themen eingegangen werden.

Ebenfalls schnell abgehandelt werden kann, was unter schriftlichem Rechnen zu verstehen ist (Wittmann, 1999, S. 89, Hervorhebungen im Original):

> „*Das schriftliche Rechnen ist ein Rechnen mit* Ziffern. *Das Endresultat entsteht anders als bei den halbschriftlichen Verfahren nicht Zahl*

> *für Zahl, sondern* Ziffer *für* Ziffer. *Die schriftlichen Verfahren sind Algorithmen, d.h. die einzelnen Rechenschritte und ihre Abfolge sind genau festgelegt.“*

Kohärente Definitionen finden sich auch in den didaktischen Handbüchern von Krauthausen & Scherer (2007, S. 49f.) und Padberg & Benz (2011, S. 218f.). Festzuhalten bleibt hier, dass hiermit die ebenfalls denkbaren (vgl. Thompson, 1999, S. 170f.) im Kopf ausgeführten, also nicht aufgeschriebene Algorithmen, eigentlich nicht zu dieser Definition gehören. International wird daher eher der Begriff *written standard algorithms* gebraucht, wenn es speziell um die mit Papier und Stift geht, dabei impliziert der Zusatz *standard*, dass es auch informelle, von Kindern erfundene Formen algorithmischen Rechnens geben kann (vgl. z.B. Fielker, 2007; oder Thompson, 1999), etwa bei einem Unterricht nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung (vgl. Kap. 3.2.2). Der seltener benutzte Überbegriff *algorithmic methods* (Selter u. a., 2012, S. 391) bezöge dann auch internalisiert ausgeführte Algorithmen mit ein. Dabei ist common sense, dass es sich immer um Ziffernrechnen, also in Stellenwertbestandteile zerlegte Zahlen mit festgelegten Rechenschritten handelt, in Abgrenzung zum Zahlenrechnen, dass zwar auch auf ggf. zerlegte, aber vollwertige Zahlen und flexible Rechenschritte setzt.

Damit ist auch der nächste Begriff aus der Kohorte der Rechenarten, das halbschriftliche Rechnen, determiniert, denn dieses zeichnet sich durch genau die gerade dem Zahlenrechnen zugeschriebenen Eigenschaften aus (Wittmann, 1999, S. 88, Hervorhebung im Original):

> *„Das* halbschriftliche Rechnen *beruht auf einer Zerlegung der Zahlen und einer schrittweisen Berechnung des Ergebnisses unter freier Ausnutzung der Rechengesetze. Man kann es als eine Vorform der Algebra betrachten.“*

Da sich diese Arbeit schwerpunktmäßig mit dem halbschriftlichen Rechnen beschäftigt, wird auf diesen Begriff weiter unten noch tiefer eingegangen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass Wittmanns Definition an keiner Stelle expliziert, ob es sich dabei um aufgeschriebene oder internalisiert durchgeführte Rechnungen handelt, obwohl der Terminus *halbschriftlich* impliziert, dass es sich um Rechnungen in notierter Form handeln soll, aber in freierer Form, daher das *halb* vor *schriftlich* (was mit algorithmischem Rechnen belegt ist).

Diese Unterscheidung ist wichtig, denn der vierte den Rechenarten zugeordnete Begriff ist das Kopfrechnen, das schon von der Bezeichnung her deutlich macht, dass es sich hier um nicht mit Papier und Stift erstellte Rechnungen handelt (Padberg & Benz, 2011, S. 87, Hervorhebungen im Original):

> „*Wir sprechen beim Rechnen von* Kopfrechnen*, wenn Aufgaben ohne (umfangreichere) Notation ‚im Kopf' gerechnet werden. Statt Kopfrechnen benutzen wir auch den Terminus* mündliches Rechnen.*"*

Diese Sub-Unterscheidung zwischen mündlichem Rechnen und internalisiertem Rechnen, also ohne laut gesprochene Sprache, findet sich auch in der internationalen Literatur durch die Begriffe *oral* und *mental calculation* (z.B. in Blöte u. a., 2000). Konstatiert, dass Denken internalisiertes Sprechen ist (nach Vygotskij, 2002), mag dieser Unterschied hier von geringerer Bedeutung sein.

Entscheidender ist hier, dass der Begriff Kopfrechnen in der deutschen Mathematikdidaktik mit zwei unterschiedlichen Begriffen belegt ist. An die gerade zitierte Definition des Kopfrechnens durch Padberg & Benz (2011, S. 87, Hervorhebungen im Original)schließt sich dort der Satz an:

> „*Werden beim Rechnen zum Stützen des Kopfrechnens (umfangreichere) Notizen gemacht, so sprechen wir vom halbschriftlichen Rechnen".*

Da Kopfrechnen nach Wittmanns Definition des schriftlichen Rechnens kein Ziffernrechnen sein kann, muss es sich zwangsläufig um Zahlenrechnen handeln; Padberg & Benz grenzen es vom halbschriftlichen Zahlenrechnen nur dadurch ab, dass es ohne Notation internalisiert-mündlich oder ganz internalisiert im Kopf abläuft, in weiteren Darstellungen auf den Folgeseiten geht es dann vor allem darum, wie Kinder im Kopf arithmetische Problemstellungen lösen können, welche Rechenwege und Grundvorstellung dabei möglich sind, so wie sie beim halbschriftlichen Rechnen notiert werden dürften. Später fügen Padberg & Benz (2011, S. 173) hinzu, das eine Funktion des halbschriftlichen Rechnens die Vorbereitung dazu sei, auf Grundlage der dort angesprochenen Rechenstrategien variationsreich rein im Kopf rechnen zu können. Kurz gefasst: Kopfrechnen ist hier internalisiertes halbschriftliches problemlösendes Rechnen.

Wittmann (1999, Hervorhebungen im Original) spielt dagegen in seinen weiteren Ausführungen auf die zweite Bedeutung des Begriffs Kopfrechnen an, nämlich inhaltlich wesentlich eingeschränkter als Klammerbegriff für automatisierende Übungen:

> *"Zum* Kopfrechnen *gehört das Rechnen mit kleinen Zahlen (insbesondere das Einspluseins und das Einmaleins) und mit runden großen Zahlen."* (S. 88)

> *"Das Kopfrechnen gründet auf sicheren Zahlvorstellungen, die ihrerseits aus grundlegenden Zahldarstellungen basieren. Der Kernbereich des Kopfrechnens muss unbedingt automatisiert werden […] (vgl. hierzu den ≪Blitzrechenkurs≫ in WITTMANN/MÜLLER 1990/1992)" (S. 92, mit Bezug auf Wittmann & Müller, 1990, 1992)*

Ähnlich – als Trainingslager für die *basic facts* (um diesen Begriff aus Kap. 2.1.2 zu entlehnen) – wird er auch in den Handbüchern von Krauthausen und Scherer (2007, S. 48f.) oder von Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling (1999) verwendet. Letztere aber differenzieren die beiden Begriffsbedeutungen (verwenden aber nur ein und denselben Begriff):

> *„Für diese Form des Übens gibt es in der didaktischen Literatur verschiedene Namen ([...] Blitzrechnen, Kurzübungen u. a.) [...]. Wir verwenden für diese Übungsfamilie den traditionellen Begriff ‚Kopfrechnen' [...]. ‚Kopfrechnen' bezeichnet also in diesem Abschnitt eine institutionalisierte Form des täglichen Übens [...].“* (S. 15)

> *„Unter ‚Kopfrechnen' verstehen wir [...] das Rechnen einer Aufgabe nur ‚im Kopf', also ohne Notation von Zwischenergebnissen oder -rechnungen [...]. Auch beim halbschriftlichen Rechnen [...] werden Zwischenschritte ‚im Kopf' gerechnet, bei diesem Verfahren jedoch Zwischenrechnungen bzw. deren Ergebnisse zusätzlich notiert [...].“* (S. 74)

So stellt auch Selter (2000, S. 228) fest:

> *„Die Grenzen zwischen mündlichem und halbschriftlichem Rechnen sind fließend. Das halbschriftliche Rechnen [...] sollte sich im Laufe der Zeit zum Kopfrechnen gänzlich ohne bzw. mit nur noch wenigen Notizen weiterentwickeln.“*

Während in der internationalen Literatur, wie bereits oben beschrieben, in Abgrenzung zu *written calculation* die Begriffe *oral* und *mental calculation* benutzt werden, so bezieht sich *mental calculation* immer auf die Variante internalisierter Rechnungen. Kopfrechnen auch im Sinne von automatisierenden Übungen zu sehen, scheint eine eher deutsche Eigenart zu sein. In der internationalen Literatur ist allerdings der Begriffsteil *mental* doppelt belegt: während *mental calculation* internalisierte, nicht verschriftlichte Rechnungen bezeichnet, so wird in jüngeren Zeit von verschiedenen Autoren der Begriff *mental arithmetic*, zurückgehend auf Verschaffel & De Corte (1996, S. 120f.) und Beishuizen (1997; vgl. auch Ashcraft, 1982, dort noch rudimentär als Synonym für single-digit arithmetic), als Klammerbegriff benutzt: „mental arithmetic is used as an umbrella term for all non-algorithmic methods“ (Selter u. a., 2012, S. 391; ähnlich auch in Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007, S. 575; oder Verschaffel u. a., 2012, S. 329). *Mental arithmetic* fasst also halbschriftliches Rechnen und Kopfrechnen zu einem übergeordneten Begriff zusammen. Klein u. a. (1998, S. 444; ähnlich auch in Verschaffel & De Corte, 1996, S. 120) erläutern dazu in Bezug auf Treffers (1991): „calculating could be done not only ‚in the head' but also by ‚using one's head' in that the use of written work was encouraged“. So konstatiert z.B. auch Buijs (2001), dass Kopfrechnen als internalisiertes halbschriftliches Rechnen angesehen werden kann; Kopfrechenstrategien Erwachsener lassen sich häufig Kategorien halbschriftlicher Strategien zuordnen (vgl. z.B. Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009), stellen also internalisierte Rechnungen dar.

Bislang wurde aufgezeigt, dass die vier eingangs genannten Rechenarten keineswegs deckungsgleich definiert sind. Verschiedene Aspekte der Rechenarten wurden dabei angesprochen, die zur Unterscheidung von Rechnungen dienen können:

- Handelt es sich um Ziffern- oder Zahlenrechnen?
- Werden Rechnungen aufgeschrieben oder erfolgen diese (gesprochen/ internalisiert) im Kopf?
- Ist der Charakter der Rechnungen eher problemlösend oder eher automatisierend?
- Haben die Rechnungen festgelegte oder flexible Rechenschritte?
- Erfolgen sie mechanisch oder physisch?

Konsequent betrachtet, stellen diese Aspekte eine mehrdimensionale Entscheidungsmatrix dar, wollte man mit diesen einzelne Rechnungen verschiedenen Kategorien zuordnen.

→ Es muss also eine eigene Positionierung innerhalb dieser Aspektenmatrix getroffen werden. In dieser Arbeit werden die Begriffe zu den Rechenarten daher wie folgt verwendet:

- Als höchste Unterscheidungsebene wird festgelegt, ob eine Rechnung vorgegebene, algorithmische Rechenschritte auf Ziffernebene hat (schriftliches Rechnen), oder ob sie auf Zahlenebene mit flexiblen Rechenschritten erfolgt (mentale Arithmetik in Anlehnung des internationalen Begriffs mental arithmetic als Klammerbegriff für alles nicht-algorithmische, also sowohl internalisiertes wie notiertes Zahlenrechnen umfassend).
- Mentale Arithmetik gliedert sich dann weiter auf in halbschriftliches Rechnen, wenn etwas beim Zahlenrechnen zu Papier gebracht wird (sämtliche Subformen, wie informelle Notizen, Rechnungen am Rechenstrich, standardisierte Schreibweisen bis hin zu Rechnungen mit dem Charakter eines Verfahrens – mehr dazu weiter unten), und das Rechnen im Kopf, wenn Rechenschritte des Zahlenrechnens ohne Notation internalisiert im Kopf vollzogen werden, ohne Unterscheidung, ob dabei gesprochen wird oder nicht – es sind damit aber keine automatisierenden Übungen gemeint.
- Rechnungen, die keine flexible, sondern eine vorgegebene Rechenschritterzeugung haben, aber auf Zahlenebene erfolgen, werden als

quasi-algorithmisch bezeichnet, um diese von den schriftlichen Verfahren auf Ziffernebene abzugrenzen.

- Wie bereits weiter oben gesagt, findet mechanisches Rechnen (Taschenrechner, Computer) in der vorliegenden Studie nicht statt, alle Begriffe beziehen sich also auf physisches (menschliches) Rechnen.

Zum Stellenwert der einzelnen Rechenarten existierte rund um die 1990er Jahre eine rege Diskussion, die an dieser Stelle aus Platzgründen nicht aufgegriffen wird. Auf diesen Disput wird in Kap. 3.2 kurz eingegangen, und auch darauf, dass sich in der Mathematikdidaktik inzwischen eine breite Beschäftigung mit mentaler Arithmetik, vornehmlich als halbschriftliches Rechnen, vor der erst spät und kurz durchzuführenden Einführung der schriftlichen Verfahren als Standard durchgesetzt hat. Da in diese Arbeit vor allem mentale Arithmetik, ebenfalls schwerpunktmäßig als halbschriftliches Rechnen verstanden, Gegenstand der Auseinandersetzung ist, soll im Folgenden die Darstellung dieser Rechenart noch weiter ausdifferenziert werden.

Strategisches Rechnen

Aus der bereits weiter oben zitierten Definition von Wittmann (1999) geht hervor, dass es sich bei halbschriftlichem Rechnen (die internalisierte Form im Kopf, und somit mentale Arithmetik, sei im Folgenden immer mitgedacht) um Zahlenrechnen handelt, bei dem Zahlen unter Ausnutzung von Rechengesetzen zerlegt werden und Rechenschritte zum Ergebnis führen. Das sagt aber noch nichts über den Charakter der Zerlegungen selbst aus – diese könnten ja auch rezepthaft quasi-algorithmisch erfolgen. Wittmann & Müller formulieren etwas präziser (1992, S. 20):

> *„Halbschriftliche Strategien [arbeiten] mit* Zahlen, Zahldarstellungen *und* Zahlvorstellungen *und nutzen* Rechengesetze *für* Rechenvorteile *aus."*

Halbschriftliches Rechnen wird also zu einer halbschriftlichen Strategie, wenn die Zerlegung (auf den Aspekt der Rechengesetze wird noch in Kap.2.2.2 eingegangen) der Zahlen so erfolgt, dass Rechenvorteile entstehen. Dazu formuliert Selter (2000, S. 231):

> *„Der Hauptunterschied zwischen Ziffern- und Zahlenrechnen besteht bekanntermaßen darin, dass i. d. R. für Erstgenanntes eine einzige definierte und einzuhaltende Vorgehensweise vorgegeben wird, während beim Zweitgenannten eine Reihe von verschiedenen Wegen eingeschlagen werden kann, die im weiteren* Strategien *genannt werden sollen. Hiermit wird ein dritter Kristallisationspunkt der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion angesprochen, der mit dem Begriff ‚Rechnen auf eigenen Wegen' umrissen werden kann."*

Allerdings zeigen viele Arbeiten beginnend in den Neunzigerjahren dabei zurückgreifend auf ältere Werke wie z.B. die von Brownell & Moser (1949) oder Oehl (1962) immer wieder die Vorteile des Rechnens mit halbschriftlichen Strategien (halbschriftliches Rechnen, halbschriftliche Strategien, flexibles, strategisches oder heuristisches Rechnen sind hier nicht trennscharf benutzte Synonyme) auf, dabei vor allem die Möglichkeiten des im Zitat von Selter angedeuteten Rechnens auf eigenen Wegen im Rahmen des aktiv entdeckenden Lernens (vgl. z.B. Wittmann, 1990; oder als internationales Beispiel Treffers & de Moor, 1990; mehr zum Thema in Kap. 3.2).

Ausgehend von den zweibändigen Handbüchern produktiver Rechenübungen (Wittmann & Müller, 1990, 1992) und später den vierbändigen Handbüchern für den Mathematikunterricht (Radatz u. a., 1996; Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling, 1998; Radatz u. a., 1999), beschäftigen sich zahlreiche Autorinnen und Autoren in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik mit diesem Thema; besonders hervorzuheben sind hier die Arbeiten von Selter (Auswahl, nur in dieser Arbeit zitierte Quellen: Selter, 1994, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2004a, 2009; Selter & Sundermann, 1995; Sundermann & Selter, 1995; Selter & Spiegel, 1997; Höhtker & Selter, 1998; oder ganz aktuell Selter u. a., 2012) sowie die die Dissertationen von Benz (2005) und Rathgeb-Schnierer (2006) und die aktuellen Forschungen von Heinze u. a. (2009) bzw. Grüßing, Schwabe, Heinze, & Lipowsky (2013) (s.u.), sowie die noch nicht abgeschlossenen Studien von Fast (2012, 2013); zusammenfassend beschäftigt sich die Diskussion mit dem Variantenreichtum strategischen Rechnens, der Kategorisierbarkeit von Rechenstrategien, Fragen zu Erwerb, Verständnis und Erfolg und den damit verbundenen unterrichtlichen Bedingungen, sowie deren Stellenwert im Gesamtzusammenhang des Arithmetikunterrichts, darüber hinaus findet eine Auseinandersetzung mit Stärken und Vorteilen aber auch mit Nachteilen und Problembereichen strategischen Rechnens statt.

Auch international lassen sich diese Aspekte der Diskussion um mentale Arithmetik und dem darin enthaltene strategischen Rechnen nachvollziehen (um nur einige der wichtigsten, immer wieder zitierten Studien und Autoren chronologisch zu nennen: Carpenter & Moser, 1984; Fuson, 1984; Verschaffel & De Corte, 1996; Fennema u. a., 1996; Fuson u. a., 1997; Beishuizen, 1997; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998; Klein u. a., 1998; Blöte u. a., 2000; Buijs, 2001; Fuson, 2003; Fuson & Burghardt, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004; Verschaffel, Greer, u. a., 2007; Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009; oder ganz aktuell: Peltenburg u. a., 2011; Verschaffel u. a., 2012). Dass Grundschüler flexible Rechenkompetenzen entwickeln sollen und können, kann somit als implementierter Standard der Mathematikdidaktik gelten.

Adaptive Expertise

Flexibles Rechnen allein determiniert noch nicht näher, wie adäquat die Varianten flexiblen Rechnens sind, die Kinder zu arithmetischen Problemlöseprozessen anwenden. Als Bildungsziel wird proklamiert, dass Kinder bei diesen Prozessen in der Lage sein sollen, eine zum Problem passende Strategie zu wählen. Buijs (2001, S. 126) beschreibt diesen Vorgang so, nachdem er zunächst beschreibt, wie sich aus individuellen Einzelstrategien entwickelnde Kategorien von Strategien mehr und mehr thematisiert werden:

> *„This broadens the children's repertoire of efficient ways of working still further and their understanding of what mental arithmetic in essence involves also grows: choosing a suitable approach based in their insight into numbers and their understanding of the different types of strategies, and reaching a solution quickly and neatly based on their skill in implementing these strategies.“*

Dieser Zusammenhang ist für die Themenstellung dieser Arbeit insofern wichtig, da Strategien der Komplementbildung zur Lösung bestimmter Probleme als besonders passend angesehen werden: „For example: adding-on as a clever subtraction strategy when numbers are close together (302-297 an such like)“ (Buijs, ebd.). Diesem Aspekt, wann Komplementbildung günstig sein könnte, bzw. bei welchen Aufgabenkonstellationen sie von Kindern angewandt wird, soll in Kap. 2.2.3 noch vertiefend nachgegangen werden.

In diesem Zusammenhang wird aktuell der Begriff der *adaptive expertise* thematisiert, der zunächst allgemein kognitionspsychologisch auf Hatano (1982) zurückgeht, aber in der Mathematikdidaktik oft synonym für deren Anwendung auf das strategische Rechnen, die *adaptive strategy choice*, benutzt wird. Diese wird durch die Fähigkeiten *Kreativität* (erfinden oder verändern können von Strategien), *Flexibilität* (zwischen verschiedenen neuen Strategien wechseln können) und *Adaptivität* (angemessene, bereits bekannte Strategien wählen) gekennzeichnet, wobei diese Begriffe gleichsam auch Entwicklungsstufen der adaptiven Expertise darstellen. Was angemessen bedeutet, ist dabei vom Kontext der Aufgabenstellung bestimmt: Genauigkeit, Geschwindigkeit, Anzahl der Lösungsschritte, mentale Anstrengung, Einfachheit, persönliche Präferenzen und andere Faktoren werden hier von den Autoren genannt, die sich mit adaptiver Expertise im Bereich der Primarstufenarithmetik befassen (eine Auswahl: Baroody, 2003; Blöte u. a., 2001; De Smedt u. a., 2010; Heinze u. a., 2009; Selter, 2009; Threlfall, 2009; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009a; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009; Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel, & Van Dooren, 2007).

Umstritten ist noch der Prozess, wie beim arithmetischen Problemlösen der Prozess der Strategieapplikation vollziehen könnte. Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) unterscheidet hier zwischen *Strategiewahlansatz* und *Emergenzansatz*.

Der Strategiewahlansatz zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Kinder noch vor dem Lösen der Aufgabe für eine passende Strategie auf Grund der Aufgabenmerkmale entscheiden, wie es unter anderem in diversen Studien (Blöte u. a., 2000; Klein u. a., 1998; Klein, 1998; Verschaffel, Torbeyns, u. a., 2007) erprobt wurde. Dagegen entstehen Lösungswege nach dem Emergenzansatz erst während der Problemlöseprozesse während der Aufgabenbearbeitung aus der Rekombination persönlichem Vorwissens, Erkenntnis über dessen Anwendbarkeit in der speziellen Problemstellung, und dem anwenden von Zahlenwissen und Regelkenntnis (Schütte, 2004; Threlfall, 2002, 2009). Entsprechend werden Unterrichtskonzepte unterschieden, die einen eher explizierenden Charakter (also ein pre-investigatives Einführen von Strategiekategorien) und damit das Strategiewahlmodell verfolgen, und solche, die einen eher problemorientierten Charakter haben, bei dem dann eher postinvestigativ Kategorienbildung auf der Grundlage der Schülerlösungen betrieben wird, ohne dass Standardstrategien eingeführt werden (vgl. dazu die Ausführungen zu Heinze u. a., 2009 in Kap. 2.2.3).

Notationsformen und Standards

Damit ist auch der vorletzte Aspekt des halbschriftlichen Rechnens angesprochen: Bislang wurde nur determiniert, dass dabei Teilschritte oder Nebenrechnungen aufgeschrieben werden, aber nicht wie. Unterschieden werden hier mehrere Formen; als erste der wichtigsten drei wären zunächst die sogenannten *informellen Strategien* oder *Eigenproduktionen* zu nennen, ein vor allem im *realistic mathematics education* genannten Unterrichtsprinzip in den Niederlanden kultivierter Ansatz (vgl. z.B. Streefland, 1991; Treffers, 1993; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; in die deutschsprachige Didaktik eingebracht durch Selter, 1994), in dem Kinder vor allem in einführenden Kontextsituationen vollkommen frei durch Zahl- oder Rechenwegsnotationen oder zeichnerische Darstellungen zur Lösung gelangen. Einige Autoren nennen diese Form auch *gestütztes Kopfrechnen* (vgl. Radatz u. a., 1999, S. 82f.)– qua Definition sind sie aber besser dem halbschriftlichen Rechnen zuzuordnen.

Des Weiteren entstammt ebenfalls aus diesem Unterrichtsprinzip die als besonders produktiv nachgewiesene Idee der *empty number line* (vgl. z.B. Buijs, 2001; Klein u. a., 1998; Klein, 1998; Selter, 1998; Treffers & de Moor, 1990; Treffers, 2001), die in der deutschsprachigen Didaktik als *Rechenstrich* Eingang gefunden hat (Radatz u. a., 1999, S. 87f.; Selter & Sundermann, 1995; Sundermann & Selter, 1995; Wittmann, 1999), die gleichsam ein Problemlöse- wie Prozessdokumentations- (und damit Argumentationshilfs-)mittel darstellt, und auf Grund ihrer einfachen Darstellbarkeit (Start-, Zwischen- und Zielzahlen werden unter dem Strich, Rechenschritte als Sprünge zwischen diesen durch Bögen über dem Strich in quasiproportionaler Anordnung als Abstraktion des Zahlenstrahls notiert) einen schnellen und wenig notationslastigen Zugang zu individuellen Varianten strategischen Rechnens bietet, allerdings mit der Einschränkung versehen, dass hier nicht alle Strategiekategorien gleichermaßen gut modellierbar sind.

Als dritte und letzte Form wären die sogenannten halbschriftlichen Standardstrategien zu nennen, auch Hauptstrategien oder zum Teil sogar halbschriftliche Verfahren genannt. Zum Teil werden sie eher als Kategorie-Ideen verstanden, die sich in den realen Rechnungen der Kinder durchaus divergent ausprägen können; zum Teil dann doch als rigidere Vorgaben, deren Grundstruktur es einzuüben gelte (dazu mehr in Kap. 2.2.3). Für die Subtraktion werden diese Strategiekategorien im folgenden Kapitel mit einer halbschriftlichen Beispielrechnung näher dargestellt. Diesen ist mit denen der Addition (und ähnlich bei der Multiplikation/ Division) gemeinsam eine immer relativ ähnlich beschriebene Standardnotationsform: Die eigentliche Aufgabe wird noch ohne Ergebnis (Lücke, Unterstrich) notiert, dann erfolgt ein Strich zur Abgrenzung der Nebenrechnung, und diese wird dann in der Regel stellengerecht unter der eigentlichen Aufgabe in verschiedenen Strategievarianten ausgeführt. Dabei notieren die Kinder die Rechenwege nicht nur für sich, um ihr Arbeitsgedächtnis zu entlasten, sondern auch deshalb, da die Notation der halbschriftlichen Rechenstrategien individuelle Rechenwege erst darstellbar und dadurch kommunizierbar macht (vgl. Wittmann & Müller, 1992, S. 20).

Theorems in action

Wie bereits weiter oben mehrfach angedeutet, erfolgt das Erzeugen der halbschriftlichen Rechenwege unter Ausnutzung von Rechengesetzen (s.o.). In Kap. 2.1.2 wurde dargestellt, wie aus der *empirical inversion* – also der Auseinandersetzung mit realen Aufgabenstellungen, in der Inversion angewandt wird – das Grundverständnis des *inversion* oder *complement principle*, als konstruktiver Begriffsbildungsprozess verstanden, nach und nach entsteht. So werden auch die Rechengesetze, die beim halbschriftlichen Rechnen angewendet werden, nicht a priori per Definition vorab im Unterricht eingeführt, sondern von Anfang an implizit im Unterricht benutzt, und immer wieder an realen Beispielen thematisiert, so dass auch hier ein fortwährend in Bewegung befindlicher Begriffsbildungsprozess ablaufen dürfte. Einige Autoren (Fuson, 2003; Fuson u. a., 1997; Greer, 2012; Verschaffel, Greer, u. a., 2007) benutzen hier den Begriff der *theorems in action* und beziehen sich dabei auf Vergnaud (1988, und 2009), der dort, aber auch zuletzt in einer aktuellen didaktischen Stellungnahme (Vergnaud, 2012), das Wesen der *theorems in action* am Beispiel der Subtraktion beschreibt:

- *Theorems* entstehen aus prototypischen Situationen, die Handlung des Wegnehmens ist eine prototypische Situation der Subtraktion.
- So können auch aus der prototypischen *empirical inversion* neue oder abgewandelte *theorems* der Teil-Teil-Ganzes Beziehung entstehen – *theorems in action*, da sie immer wieder aus konkreten Rechenhandlungen

als abstraktes Idealmodell entworfen und überprüft werden. Sie haben also den Charakter einer ggf. modifizierten Behauptung, die auch in Teilen wiederlegt werden könnte – sie sind implizit und dynamisch.

- Über längere Zeit, in verschieden situativen Handlungen, entwickelt sich aus den *theorems in action* dann ein *concept in action* – im genannten Beispiel etwa das *complement principle* als abstrakter, impliziter, dynamischer Begriff eines der Zusammenhänge zwischen Addition und Subtraktion.

Den Gedanken der *theorems in action* übertragen Fuson u. a. (1997, S. 150) auf die Rechengesetze für die Addition und Subtraktion:

> *„The strategies for addition and subtraction require at least implicit knowledge of properties of operation (commutativity, associativity). These are not discussed explicitly because we have no direct data concerning our children's understanding of these properties. It seems likely that much of our children's use of such properties is best characterized as theorems-in-action (Vergnaud, 1988). It is possible for such use to be focused on in discussions of such strategies. This may be especially helpful for subtraction situations, where incorrect generalizations from addition strategies may lead to errors. “*

Übertragen auf die Rechenregeln, die beim halbschriftlichen Rechnen angewandt werden, bedeuten dies also: Aus prototypischen Situationen (z.B. Zerlegungshandlungen an strukturierten Mengen, wie dem Hunderterpunktefeld) entstehen *theorems in action*, welche Zahlmanipulationen beim Zerlegen und Zusammenfassen von Zahlen im Bereich der Addition und Subtraktion erlaubt (da erfolgreich) sind, und welche nicht – vor allem im Bereich der komplementbildenden Subtraktion kann es hier zu Verwerfungen kommen, wenn etwa beim Auffüllen zwischen Subtrahend und Minuend positive Teilschritte zum Gesamtkomplement addiert werden (auf dem Rechenstrich beispielweise Zahlen über den Bögen mit einen Plus davor), so muss beim Entleeren (negative Teilschritte, ein Minus vor der Zahl über dem Bogen) trotzdem der (positive) Betrag der Schritte addiert werden, um das Gesamtkomplement zu bestimmen. Mit der Zeit bildet sich hier dann ein Begriff der Assoziativität als *concept in action* aus, ohne dass ein Assoziativgesetz der Addition jemals explizit benannt würde.

2.2.2 Komplementbildung – Einordnung in die Strategiekategorien halbschriftlichen Rechnens

Wie im vorangegangenen Kapitel erwähnt, können Kinder beim halbschriftlichen Rechnen (weiterhin als mentale Arithmetik mit Notation verstanden; die internalisierten Formen ohne Notation können im Folgenden analog mitgedacht werden) Strategien anwenden, wenn sie beim Zahlenrechnen diese flexibel und individuell verschieden zerlegen, so dass Rechenvorteile entstehen. Diese Strategien können sehr vielfältig sein, lassen sich aber nach bestimmten Kriterien kategorisieren, etwa nach übergeordneten Grundideen der Strategien, auf Grund derer die Zahlmanipulationen erzeugt werden, ein Gedanke, der vor allem durch Beishuizen (1993, 1997; Beteiligung in Klein u. a., 1998; Blöte u. a., 2000) systematisiert und in die mathematikdidaktische Forschung eingebracht wurde, der sich wiederum auf die von Fuson (1984, 2003) beschriebenen Grundvorstellungsvarianten der Subtraktion stützt, wie sie in Kap. 2.2.2 beschrieben wurden.

Strategiekategorien

In der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Literatur werden für die Subtraktion in der Regel fünf Kategorien halbschriftlicher Strategien benannt. In Tabelle 2.3 (S. 36) werden die Grundideen dieser Strategiekategorien dargestellt, als Kondensat der verschiedenen, aber ähnlichen Darstellungen in der zugrunde liegenden Literatur (chronologisch angeordnet, vgl. Wittmann & Müller, 1992, S. 21; Wittmann, 1999, S. 91; Radatz u. a., 1999, S. 86; Hengartner & Studer, 1999, S. 107; Selter, 2000, S. 231, 2003a, S. 36, 2003b, S. 48; Benz, 2005, S. 63; Padberg & Benz, 2011, S. 181f.), sowie ihre üblichen Schreibweisen und Bezeichnungen.

Über diese fünf Strategiekategorien hinaus benennen einige der genannten Autoren (vgl. z.B. Benz, 2005, S. 63; Padberg & Benz, 2011, S. 182; Selter, 2000, S. 231) auch die so genannten Mischformen, bei denen die Kinder zumeist mit einem der Kategorie Stellenweise zuzuordnenden Schritt begännen, um dann weitere Schritte der Kategorie Schrittweise anzufügen. So würde die auch in Tabelle 2.3 benutzten Aufgabe 634-378 in der Mischform mit 600-300 begonnen, dann +34, -78 (oder feinere Teilschritte). Allerdings könnte man diesen Strategientypus auch der Kategorie Hilfsaufgabe zuordnen, in der beide Zahlen, Minuend und Subtrahend zu glatten Hundertern verändert werden, an die sich dann statt einer kompensierenden Rechnung wie in der klassischen Hilfsaufgabenform einfach zwei (oder mehrere) ausgleichende Rechnungen anschließen.

Die in Tabelle 2.3 (S. 36) vorgestellten Schreibweisen haben sich als Standardnotationsformen entwickelt. Die so benannte alte Schreibweise (dargestellt nach Wittmann & Müller, 1992, S. 21; vgl. auch Krauthausen, 1993) hatte dabei eine je nach Strategie optimierte individuelle Darstellung, die vor allem das Ziel hatte, kompakt zu sein, konnte sich am Ende wegen der aus dieser Kompaktheit entstehenden Konventionskomplexität nicht durchsetzen. Darüber hinaus ist sie auch unterrichtspraktisch (Anmerkung der Lehrerin, die den Unterricht dieser Studie durchführte) auf Grund der oft entstehenden Breite der Notation (Verkettungen hinter dem Gleichheitszeichen) z.B. in kleinen Rechenheften ungeeigneter als die zwar notationsaufwändigere, aber strukturhomogenere neue Form

Tabelle 2.3: Strategiekategorien, deren Grundideen sowie Schreibweisen

Bezeichnung	**Idee** **Schreibweise alt**[1]	**Schreibweise neu**[2]
Schrittweise	Nur eine der beiden Zahlen wird zerlegt, in der Regel der Subtrahend, und in mehreren Schritten vom Minuenden weggenommen. Die Zerlegung erfolgt so, dass Rechenvorteile (mit glatten Zahlen rechnen, oder zu glatten Zahlen rechnen) bei den einzelnen Schritten entstehen.	
	634–378=264–8=256 334 –70 –8	634 – 378 = 256 634 – 300 = 334 334 – 70 = 264 264 – 8 = 256
Stellenweise[3]	Beide Zahlen werden zerlegt, jeweils den Stellenwerten entsprechend. Dann werden die Teilzerlegungen des Subtrahenden stellenkohärent von den Teilzerlegungen des Minuenden weggenommen. Der Rechenvorteil liegt hier in den stets glatten Zahlen, die verarbeitet werden müssen.	
	634–378=300-40-4=256 600–300 30– 70 4– 8	634 – 378 = 256 600 – 300 = 300 30 – 70 = -40 4 – 8 = -4 300-40-4 = 256
Hilfsaufgabe	Eine oder beide Zahlen der Ausgangsaufgabe werden so verändert, dass eine in der Nähe liegende, einfach zu rechnendere (daher Hilfs-)Aufgabe entsteht. Anschließend erfolgen kompensierende Rechenschritte, so dass die Veränderung der Ausgangsaufgabe wieder aufgefangen wird.	
	634–378=234+22=256 634–400=234	634 – 378 = 256 634 – 400 = 234 234 + 22 = 256
Vereinfachen	Die Zahlen der Ausgangsaufgabe werden beide gleichsinnig um den gleichen Betrag verändert, so dass eine der beiden Zahlen (zumeist der Subtrahend) durch seine Zahlcharakteristik einen Rechenvorteil gegenüber der Ausgangsaufgabe aufweist.	
	634–378=256 636–380 656–400	634 – 378 = 256 +12 +12 656 – 400 = 256
Ergänzen	Der Subtrahend wird durch schrittweises additives Auffüllen auf den Wert des Minuenden gebracht. Anschließend wird der Gesamtbetrag der auffüllenden Schritte ermittelt, der das Ergebnis darstellt.	
	634–378=22+234=256 400 634	634 – 378 = 256 378 + ___ = 634 378 + 22 = 400 400 + 234 = 634 22+234=256

1) Schreibweise nach Wittmann & Müller (1992, S. 21).

2) Schreibweise im Unterricht der Studie, Modifikation der Schreibweise nach Wittmann & Müller (2012, S. 66ff.) – vgl. auch Erläuterungen dazu in Tabelle 2.4, S. 43.

3) Diese Strategie hieß zunächst *Stellenwerte extra* (Wittmann & Müller, 1992, S. 21; Wittmann, 1999, S. 91; Radatz u. a., 1999, S. 75), bevor sich die heute übliche Bezeichnung durchsetzte.

nach Wittmann & Müller (2012, S. 66ff.), die dadurch zusätzlich den Vorteil bietet, vergleichbarer und damit kommunizierbarer zu sein.

Standardnotationsformen

Von den Langformen der Standardschreibweisen lassen sich *Shortcuts* erstellen (nach Radatz u. a., 1998, S. 46, 1999, S. 86). Dabei werden entweder die Zwischenergebnisse oder die Zwischenschritte notiert, ohne regelhafte Vorgabe:

Beispiel *Ergänzen* neu

```
634 - 378 = 256
378 + ___ = 634
378 +  22 = 400
400 + 234 = 634
 22 + 234 = 256
```

Beispiel *Ergänzen Shortcut*

```
634 - 378 = 256
378, 400, 634
```

oder

```
634 - 378 = 256
22, 234
```

Zum einen, so argumentieren die genannten Autoren (ähnlich bei Padberg & Benz, 2011, S. 179f.), entlaste dies weiter das Arbeitsgedächtnis auf dem Weg zum reinen Kopfrechnen, zum anderen entlaste es bei der Notation. Gleichzeitig sei diese Schreibweise auch ein Weg, die Kinder Kopfrechenwege notieren zu lassen, ohne ihnen die Mühe der halbschriftlichen Langschreibweise zuzumuten.

Internationale Strategiekategorien

International werden die Kategorien unterschiedlich benannt. Fuson u. a. (1997, S. 151f.) nennen die Kategorien *methods* und beschreiben *begin-with-one-number* (schrittweises Rechnen) *change-both-numbers* (Vereinfachen), *decompose-tens-and-ones* (stellenweises Rechnen), für die Grundvorstellung Komplementbildung die *unknown addend method* alias *adding up* im Sinne der Strategiekategorie Ergänzen.

Klein u. a. (1998, S. 444) benennen die *split method* (stellenweise Rechnen), die mit einer *decomposition procedure* ausgeführt wird, und die *jump method* (schrittweises Rechnen) zusammen als „two basic strategies for addition and subtraction“ (ebd.), die Hilfsaufgabenidee wird hier als *jump further* bezeichnet und als Sonderfall der *jump method* gesehen. Dazu kommen *adding-on* und *connecting arc* – dabei entspricht *adding-on* dem Ergänzen, *connecting arc* stellt eine Variante des *adding-on* mit sehr kleinen Differenzen dar, deren Ergebnisse also direkt „gesehen“ werden könnten. Alle *methods*, die keine *split method* sind, werden aus ihrer Sicht zusammengefasst, da sie mit *sequential procedures* gelöst werden.

Buijs (2001, S. 126) beschreibt die inzwischen meistgebräuchlichen Kategoriebegriffe *splitting* für stellenweises Rechnen, *stringing* für schrittweises Rechnen, und *varying* als übergeordneten Begriff für die Strategien, die Veränderungen der Aufgabe als Idee haben – das Ergänzen fehlt hier aber, es wird nicht explizit erwähnt, anders als in anderen Studien mit den gleichen drei Kategoriebezeichnungen, die zusätzlich die Kategorie *indirect addition* als inzwischen gebräuchliche Bezeichnung für das Ergänzen benutzen (vgl. z.B. Heinze u. a., 2009, S. 593; Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009, S. 108; oder Nunes u. a., 2012, S. 372).

Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a. (2009a, S. 80) unterscheiden Strategien der *direct subtraction* mit den Kategorien *split method* (alias *decomposition*, *partitioning*, oder *combining-units-separately method*), *jump method* (alias *cumulative*, *sequential*, oder *begin-with-one-number method*), und des *varying methods*, (Zuordnung zu den deutschen Begriffen wie vorangehend), die als Unterform die *compensation method* (Vereinfachen) enthalten. Als vierte, nicht zur *direct subtraction* gehörende Strategiekategorie wird die *indirect addition* (also das Ergänzen) genannt, darüber hinaus – im Gegensatz zu den vorangegangenen, allerdings nur in einer Fußnote – erwähnen sie die *indirect subtraction* (subtraktive Komplementbildung, vgl. Kap 2.1.1) als fünfte Strategiekategorie (die jedoch praxisfern sei).

Trotz dieser multiplen Begriffsnutzung bezeichnen dieses doch inhaltlich das Gleiche: „Although researchers do not always use the same wording [...] there is broad agreement about the general meaning of these strategies.“ (Peltenburg u. a., 2011, S. 353).

Zweidimensionale Strategiekategoriensysteme

Für die Strategiekategorien, die der Grundvorstellung Wegnehmen zuzuordnen sind, lässt sich festhalten: Bei den Bezeichnungen *Schrittweise*, *Hilfsaufgabe* und *Vereinfachen* ist ein kohärenter deutschsprachiger wie internationaler Gebrauch festzustellen. Für die zunächst mit *Stellenwerte extra* bezeichnete Strategiekategorie hat sich in den letzten Jahren die Bezeichnung *Stellenweise* durchgesetzt. In jüngerer Zeit schlagen einige Autoren vor, die auf der Idee des Veränderns beruhende Strategiekategorien Hilfsaufgabe und Vereinfachen unter einem Begriff zusammenzufassen, der dann mit *Ableiten* (Benz, 2005, S. 63; Padberg & Benz, 2011, S. 182), international aber eher mit *varying* (s.o.), also mit *Variieren* bezeichnet wird. Zum Teil wird auch vorgeschlagen, dann auf die Unterscheidung zwischen Hilfsaufgabe und Vereinfachen zu verzichten (Padberg & Benz, ebd.).

→ In dieser Arbeit werden für die Strategiekategorien, die der Grundvorstellung Wegnehmen zuzuordnen sind, die Bezeichnungen *Schrittweise*, *Hilfsaufgabe*, *Vereinfachen,* sowie *Stellenweise* benutzt. Hilfsaufgabe und Vereinfachen werden in der Kategoriengruppe *Variieren* zusammengefasst, bleiben aber als eigenständige Strategiekategorien darunter erhalten. Mischformen sollen, sofern plausibel, wie weiter oben begründet möglichst mit in die Kategoriengruppe des Variierens einbezogen werden, sie bilden keine eigenständige Kategorie.

Für die der Grundvorstellung Komplementbildung zuzuordnenden Strategiekategorie *Ergänzen* sind dagegen hier zwei Dinge festzuhalten: Zum einen wird in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik sowohl die Grundvorstellung Komplementbildung (vgl. Kap. 2.1.1) als auch die Strategiekategorie dessen, was international *indirect addition* genannt wird, mit *Ergänzen* bezeichnet.

→ Um diesem Dilemma zu entgehen, wird in dieser Arbeit der Begriff *Komplementbildung* für die mit *Ergänzen* bezeichnete Grundvorstellung verwendet, um hiermit begrifflich die mit *Ergänzen* bezeichnete Strategiekategorie von dieser Grundvorstellungsbezeichnung abzugrenzen.

Zum anderen umfasst die Grundvorstellung Komplementbildung mehr als die Idee des additiven Auffüllens – auch das Entleeren, das Subtraktionsformat, die bereits bei Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a. (2009a, S. 80) erwähnte *indirect subtraction*, muss als Strategiekategorie der Grundvorstellung Komplementbildung zugeordnet werden. Darüber hinaus ist weder mit *indirect addition* oder dem Ergänzen, noch mit *indirect subtraction* genauer beschrieben, wie dieser Komplementbildungsvorgang genauer abläuft, während *splitting*, *stringing* und *varying* als Strategiekategorien der *direct subtraction*, also der Grundvorstellung Wegnehmen zugeordnet werden (s.o., vgl. z.B. Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a, S. 80).

Aktuell (Peltenburg u. a., 2011; Selter u. a., 2012) wird daher der Gedanke unterbreitet, Ergänzen, oder *indirect addition*, gar nicht mehr als Strategie, sondern nur noch als Grundvorstellung (auch wenn Peltenburg u. a. hier von *procedures* sprechen) zu sehen, in der wiederum verschiedene Strategievarianten möglich sind. Dadurch ergibt sich eine zweidimensionale Kategorisierung – bei einer Rechnung wäre zu entscheiden, welcher Grundvorstellung (Wegnehmen oder Komplementbildung) sie angehört, und welcher Strategiekategorie sie innerhalb dieser Grundvorstellung zuzuordnen wäre.

Die Darstellung von Peltenburg u. a. (Abbildung 2.2, S. 40) nutzt diesen Gedanken vorerst für die Basisstrategien Stellenweise (Spalte *Splitting*) und Schrittweise (Spalte *Stringing*), die nun in drei Varianten ausgeführt werden können, nämlich in der Grundvorstellung Wegnehmen (Zeile *Direct subtraction*) und in der Grundvorstellung Komplementbildung (Zeilen *Indirect addition* und *Indirect subtraction*, also differenziert in das Additions- und Subtraktionsformat, wie in Kap. 2.1.1 beschrieben). Nicht nur das Wegnehmen, sondern auch auffüllende wie entleerende Komplementbildung kann nach dieser Darstellung also sowohl mit der Strategie Schrittweise als auch mit der Strategie Stellenweise ausgeführt werden. Es gibt also keine Strategiekategorie *indirect [...]* mehr.

Neben der Anmerkung, dass es sich hier nur um idealisierte, die Strategiekategorie beschreibende Beispielrechnungen handelt, die von Kindern durchaus anders gelöst werden können, weisen die Autoren darauf hin, dass das stellen-

Mental subtraction	Taking away		Determining the difference	
Decompo-sition*	83–79=10–6=? 80–70 3–9	Get the tens-remainder by taking away 70 from 80. Get the ones-remainder by taking away 9 from 3. Add/subtract the two preliminary results.	79 + ? = 83 70 + *10* = 80 9 + (*–6*) = 3 10 – 6 = *4*	*rather uncommon*: Determine the tens-difference by adding 10 to 70. Determine the ones-difference by adding –6 to 9. Add/subtract the two preliminary results.
Sequential	83 – 79 = ? 83 – 70= *13* 13 – 9= *4*	Take away the tens of the subtrahend from the minuend. Take away the ones of the subtrahend from the preliminary result.	79 + ? = 83 79 + *1* =80 80 + *3* =83 1 + 3 = *4*	Determine the difference by adding 1 to 79 and then adding 3 to 80. Add the two preliminary results.
Shortcuts	83 – 79 = ? 83 – 80 = *3* 3 + 1 = *4*	*Auxiliary task* Take away a round number (80 instead of 79). Compensate (as 79 and not 80 has to be subtracted).	79 + ? = 83 80 + *3* =83 79 +*1*+3=83	*Auxiliary task* Use a round number to determine the difference (80 instead of 79). Compensate.
	83 – 79 = ? 84 – 80 = *4*	*Balancing* Add/subtract the same number to/from both numbers in order to arrive at an easier problem.	79 + ? = 83 80 + *4* = 84	*Balancing* Add/subtract the same number to/from both numbers in order to arrive at an easier problem.

*Children in primary schools are not familiar with negative numbers. However it is discussed at least in Germany, if and how the decomposition strategy is useful for subtraction problems with bigger digits in the second number than in the first one (An alternative strategy, used by some children is 83–79=__: 80–70=10, 9–3=6, 10–6=4 or 70–70=0, 13–9=4). A representation of the decomposition strategy with the empty number line is not possible.

Abbildung 2.2: Strategien in Matrixdarstellung, aus Peltenburg u. a. (2011, S. 354)

weise Rechnen im Subtraktionsformat in der Grundvorstellung Komplementbildung „not very common“ (vgl. Abbildung 2.2) sei, aber eben doch theoretisch prinzipiell möglich. Noch indeterminiert im Sinne der Zuordnung zu Grundvorstellungen sind die Strategien des Variierens, die hier zu einem einzigen Block zusammengefasst sind, sowohl die Variante Hilfsaufgabe (1. Beispielrechnung in der Abbildung unter Varying), als auch die des Vereinfachens (2. Beispielrechnung). Beide Beispiele sind aber in der Grundvorstellung Wegnehmen ausgeführt, denn die Ausgangsaufgabe ist in beiden Fällen 77-29=__.

Dass prinzipiell auch in der Grundvorstellung Komplementbildung Strategien des Variierens nutzbar sind, zeigt dann die Darstellung aus dem zweiten Text (Abbildung 2.3, S. 41). Auch hier stellen die Autoren Strategiekategorien (jetzt zeilenweise) und Grundvorstellungen (beide Spalten) in einer zweidimen-

Table 1 Relation between procedures and strategies illustrated with problems

Procedures [Operation perspective]	Strategies [number perspective]		
	Splitting	Stringing	Varying
DS Direct subtraction	63−31=[a] 60−30=30 3−1=2 30+2=32	63−47= 63−40=23 23−3=20 20−4=16	
IA Indirect addition	67−52=[b] 50+10=60 2+5=7 10+5=15	62−58= 58+2=60 60+2=62 2+2=4	
IS Indirect subtraction	67−52=[b] 60−10=50 7−5=2 10+5=15	62−58= 62−2=60 60−2=58 2+2=4	
MO Multiple operations			77−29= 77−30=47 47+1=48 or 78−30=48

[a] The problem can be solved by the following calculation steps. The description of these steps does not necessarily reflect how the problems are or should be notated by students. The student's use of materials and models is left out as well

[b] These calculation steps are not very common to solve this problem; they are only given to explain this particular combination of procedure and strategy

Abbildung 2.3: Strategien in Matrixdarstellung, aus Selter u. a. (2012, S. 393)

sionalen Matrix dar. *Decomposition* steht hier für die Strategiekategorie Stellenweise, die in der Grundvorstellung Wegnehmen (*Taking away*) und in der Grundvorstellung Komplementbildung (*Determining the difference*) dargestellt ist, ebenso die weiteren Strategiekategorien Schrittweise (*Sequential*), Hilfsaufgabe (*Auxiliary Task*) und Vereinfachen (*Balancing*), letztere zusammengefasst zur Gruppe der *Shortcuts* (stringenter wäre hier *Varying* gewesen). Allerdings sind die Beispiele zu den Strategievarianten in der Grundvorstellung Komplementbildung, im Gegensatz zum vorgenannten Vorschlag von Peltenburg u. a., nur im Additionsformat notiert, der Vollständigkeit halber müsste man sich unter *Determining the difference* noch eine zweispaltige Darstellung differenziert in *indirect addition* und *indirect subtraction* vorstellen, gefüllt mit zusätzlichen entleerenden Rechenbeispielen. Auch hier wird – analog zu Peltenburg u. a., dort aber nur auf das Subtraktionsformat bezogen – die Variante stellenweisen Rechnens in der Grundvorstellung Komplementbildung als „rather uncommon" (vgl. Abbildung 2.3, oben) bezeichnet, und dabei auf das Problem negativ wirkender Teilschritte hingewiesen, die in der Darstellung von Peltenburg u. a. nicht auftreten, da die Beispielaufgaben hier keine Stellenwertübergänge haben.

Definition und Erläuterung des Strategiekategoriensystems dieser Arbeit

→ In Anlehnung an die Darstellung von Selter u. a. (2012) wurden in Tabelle 2.4 (S. 43) die noch fehlenden Aufgaben im Subtraktionsformat der Komplementbildung ergänzt, und die Rechenbeispiele auf den Tausenderraum und die in dieser Arbeit verwendete Schreibweise der halbschriftlichen Strategien modifiziert. Damit ist das Strategiekategoriensystem dieser Arbeit definiert.

Die einzelnen Beispielrechnungen sind dabei jeweils Varianten der Kategorienidee – und nicht als Standardstrategien mit explizierendem Charakter zu verstehen. Ein Beispiel: Für die drei Varianten schrittweisen Rechnens wurde für Schrittweise in der Grundvorstellung Wegnehmen die Variante der Zerlegung „in glatte Rechenzahlen", für Schrittweise additiv in der Grundvorstellung Komplementbildung die Variante der Zerlegung „zu glatten Zwischenzahlen" und für Schrittweise subtraktiv die Zerlegung „stellengerecht" (der erste Schritt stellt die Einerstelle der Zielzahl des Entleervorgangs her, der zweite Schritt würde die Zehnerstelle herstellen, die aber schon erreicht ist – also stellt der nächste, eigentlich dritte Schritt die Hunderterstelle her). Diese letzte Variante der Zerlegung ist strukturgleich auch im Additionsformat möglich, die anderen beiden Varianten der Zerlegung sind sogar in allen drei Grundvorstellungsvarianten der Strategiekategorie denkbar. Auch in den weiteren Beispielen wurden denkbare Varianten eingestreut, zu erwähnen ist vielleicht noch die komplementbildende Hilfsaufgabe im Additionsformat – hier findet sich die Hilfsaufgabenidee – „glatt zu weit rechnen und kompensierend zurück" – erst in der zweiten und dritten Zeile der Rechnung. Auch solche Rechnungen sind in der Strategiekategorie Hilfsaufgabe subsumiert.

→ Der Begriff Strategie ist in der vorliegenden Arbeit also immer im Sinne von Strategiekategorie mit möglicher breiter Varianz in der Ausführung zu denken, nicht als Musterlösung oder normierender Standard.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass sich die in Tabelle 2.4 (S. 43) als halbschriftliche Rechnungen notierten Beispiele für die Strategiekategorien ebenfalls als internalisiert gerechnete Kopfrechenstrategien mit der gleichen Zerlegungsidee denken lassen. Ebenso sind andere Notationsformen als die halbschriftliche für die angegebenen 12 Kategorien denkbar, etwa eine informelle Schreibweise, oder eine Darstellung des Rechenweges am Rechenstrich (zum Rechenstrich vgl. Kap 2.2.1, zum Grundprinzip der Darstellung der Grundvorstellungen am Rechenstrich vgl. Tabelle 2.2, S. 9). Vor allem die schrittweisen

Tabelle 2.4: Strategien in Matrixdarstellung, differenziert in Grundvorstellungen und Formate

MA*		GV*	Wegnehmen	Komplementbildung	
		Format	Subtraktion	Addition	Subtraktion
Strategie		Schrittweise	683-479= ? 683-400=283 283- 70=213 213- 9=204	479+ ? =683 479+ 21=500 500+100=600 600+ 83=683 21+100+83=204	683- ? =479 683- 4=679 679-200=479 204
		Stellenweise	683-479= ? 600-400=200 80- 70= 10 3- 9= -6 200+10-6=204	479+ ? =683 400+200=600 70+ 10= 80 9- 6= 3 200+10-6=204	683- ? =479 600-200=400 80- 10= 70 3+ 6= 9 200+10-6=204
	Variieren	Hilfsaufgabe	683-479= ? 683-500=183 183+ 21=204	479+ ? =683 479+ 21=500 500+200=700 700- 17=683 21+200-17=204	683- ? =479 679-200=479 200+ 4=204
		Vereinfachen	683-479= ? +21 +21 704-500=204	479+ ? =683 +21 +21 500+204=704	683- ? =479 +1 +1 684-204=480

* MA = Mentale Arithmetik, GV = Grundvorstellung

Strategien und die (meisten) Hilfsaufgaben (als Gegenbeispiel vgl. die Hilfsaufgabenrechnung in subtraktiver Komplementbildung, hier wird mit einem veränderten Subtrahend begonnen) lassen sich elegant darstellen; Vereinfachen dagegen nur unschön, Stellenweise dagegen gar nicht.

2.2.3 Komplementbildung im Unterricht der Primarstufe

In Kap. 2.2.1 wurde bereits dargestellt, dass die in den Neunziger Jahren geführte Diskussion um die Relevanz halbschriftlichen, strategischen Rechnens inzwischen als abgeschlossen angesehen werden kann. Dass Kinder in der Primarstufe zunächst breit flexible Rechenkompetenzen entwickeln können und sollen, kann als Standard gelten, bevor schriftliche Verfahren thematisiert werden. In diesem Kapitel sollen nun didaktische Aspekte der Komplementbildung innerhalb des halbschriftlichen, strategischen Rechnens dargestellt werden, dabei geht es in den folgenden Studien und didaktischen Positionen in der Regel um *multi-digit arithmetic* in schulischen, unterrichtlichen Kontexten, also um eine Anwendung des in der *single-digit arithmetic* erworbenen Grundverständnisses (vgl. Kap. 2.1) der Inversion zwischen Addition und Subtraktion in höheren Zahlenräumen.

Die übergeordnete Fragestellung müsste also zunächst lauten, ob komplementbildendes Rechnen überhaupt stattfindet, ob Kinder in höheren Zahlenräumen die Subtraktion über die inverse Komplementbildung lösen können. Schon die in Kap. 2.2.1 genannten Studien generell zum halbschriftlichen strategischen Rechnen beantworten diese Frage , so könnte man subsumieren, mit „grundsätzlich ja“, und auch die folgenden, speziell auf die Komplementbildung bezogenen Studien und Positionen tun dies ebenso, fügen aber an „grundsätzlich ja“ ein „aber“ an – denn es werden differenziert einzelne Aspekte der Komplementbildung in unterrichtlichen Situationen diskutiert:

- Wann wird Komplementbildung gewählt? Diese Frage wird
    - zum Teil aufgabenspezifisch beantwortet (Stichworte: Sind sogenannte kleinen Differenzen, oder passenden Kontexte Auslöser für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung, verbunden mit der Frage, ob diese Wahl vor oder während des Lösens der Aufgabe geschieht),
    - zum Teil auf den längerfristigen Lernprozess bezogen (z.B. vor oder nach der Thematisierung komplementbildender Strategien oder des schriftlichen Rechnens).
- Wie effizient ist das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung (unter quantitativen Aspekten, wie Fehleranfälligkeit, aber auch qualitativ, etwa ob sich Verständnisentwicklungen abzeichnen)?
- Lässt sich Komplementbildung schulen, differenziert in: Welche Unterrichtlichen Bedingungen (Lehr- und Lernformen, Notationsformen wie der Rechenstrich, Arbeitsumgebungen) haben Einfluss bei der Thematisierung der Komplementbildung?
- Zusätzlich differenzieren einige Autoren die drei vorgenannten Fragen dahingehend, ob für bestimmte Schülergruppen (z.B. Leistungsstarke/ Leistungsschwache) differenzierte Aussagen gemacht werden können.

Im Hinblick auf das vorangegangene Kapitel wird darauf zu achten sein, wie in den Studien und Positionen Komplementbildung verstanden wird, bzw. welche Strategiekategorien der Komplementbildung verwendet oder welche Strategievarianten beobachtet werden, auch beiläufig die des Wegnehmens – denn die hier verbleibenden vier Strategiekategorien sind auch für die Komplementbildung denkbar, also ist auch ihr Stellenwert untereinander für eine solche Übertragung interessant.

Seltene, aber effiziente Nutzung

Ausgehend von den frühen Studien (um nur einige, wichtige frühe Arbeiten zu nennen: Carpenter, Hiebert, & Moser, 1983; Baroody u. a., 1983; Fuson, 1984, 1986; Fuson & Willis, 1988; weitere vgl. Kap 2.1.2) zum Erwerb des Grundverständnisses zur Inversion im Bereich der *single-digit arithmetic* und Kindern am Übergang zwischen Kindergarten und Grundschule begann man in den Neunzigerjahren nicht nur allgemein (vgl. Kap. 2.2.1) auf die Entwicklung strategischen und flexiblen Rechnens in höheren Schuljahren zu schauen, sondern nahm dort auch Strategien wie etwa *counting up* aus den Arbeiten Fusons, die man heute der Grundvorstellung Komplementbildung zuordnen würde, in den Blick.

Als eine der ersten empirischen Studien, die sich flexiblem Rechnen in der *multi-digit arithmetic* zuwandte, ist die von Beishuizen (1993) zu nennen, der im Kontext des niederländischen Aufbruchs zur *realistic mathematics education* (vgl. Kap. 2.2.1) Additions- und Subtraktionsstrategien von Zweitklässlern im Unterricht mit strukturierten Materialien (Rechenstäbe und Hundertertafel) und ohne Material (als Kontrollgruppe) untersuchte, die in die Kategorien *1010* (Stellenweise) und *N10* (Schrittweise) eingeteilt wurden. Schrittweises (wegnehmendes, denn so wurde am Material vorgegangen) Subtrahieren trat in den Materialklassen öfter als stellenweises Rechnen auf. Weitere Strategien wurden nur als *other* (ebd., S. 307) gekennzeichnet, die in den (wegnehmend operierenden) Materialklassen gerade einmal eine Häufigkeit von 2-3% erreichten, in denen ohne Material allerdings 15%. Obwohl sich Beishuizen in Theorie und Analyse auch auf die genannten Arbeiten Fusons und Baroodys stützt, wird *counting up* oder *indirect addition* nicht ein einziges Mal erwähnt – ob sich solche Strategien unter den mit *other* gekennzeichnet befanden, geht aus der Studie nicht hervor; traten sie also überhaupt auf, dann sehr selten.

In den Studien von Beishuizen, Van Putten, & Van Mulken (1997) und Klein, Beishuizen, & Treffers (1998) wird dann aber bei Subtraktionsaufgaben neben *1010* und *N10* auch die Strategiekategorie *A10* benutzt, die mit *adding on*, also Komplementbildung im Additionsformat bezeichnet wurde.

In der ersten der beiden Studien trat diese Strategie nicht bei einer symbolisch notierten Subtraktionsaufgabe, aber bei einer Kontextaufgabe auf, in welcher der Unterschied zwischen zwei Preisen errechnet werden sollte. Auch wenn *A10* im Vergleich zu *1010* und *N10* selten (9 von 88 Rechenwegen) benutzt wurde, so waren die Kinder hierin doch sehr erfolgreich – alle 9 Rechnungen (eher von den leistungsstärkeren Schülern) waren richtig, die *N10* Rechnungen wurden nur zu etwa 90%, die *1010* Rechnungen sogar nur zu etwa 70% (symbolische Aufgabe) bzw. gerade 21% (Kontextaufgabe) korrekt gelöst.

In der zweiten Studie von 1998 tritt dann eine weitere Strategiekategorie auf, die *N10C* genannt wird, die der wegnehmenden Hilfsaufgabe zuzuordnen ist. Außerdem wurde ein Sonderfall der *A10* Strategie als *Connectig Arc* bezeichnet, für sehr kleine Differenzen (51-49), für die keine Zerlegungen in Rechenschritte gebraucht werden. Zusätzlich wurde der Rechenstrich als Notationsform halbschriftlichen Rechnens zum Gegenstand des Unterrichts gemacht, denn es erfolgte hier eine Interventionsstudie, in der ganzheitliches, problemlösendes Vorgehen im Sinne der *realistic mathematics education* (in den Niederladen kurz RME genannt) mit einem gestuftem, kleinschrittigen Unterrichtskonzept verglichen wurde. In beiden Unterrichtssettings wurde mit dem Rechenstrich gearbeitet – im ersten flexibel, im zweiten restriktiver. 275 niederländische Zweitklässler nahmen an dieser Studie teil, in einem Pre-Post-Testdesign wurden sowohl kontextfreie als auch kontextbezogene Aufgaben gestellt.

Erneut trat hier die *A10* Strategie immer noch selten, aber vor allem bei den Kontextaufgaben auf – und zwar wesentlich häufiger in den RME-Klassen als in der Vergleichsgruppe. Auch konnte eine von den Zahlenwerten abhängige Nutzung der A10 Strategie festgestellt werden – bei Kontextaufgaben des Typs *Unterschied zwischen 73 und 29* (also ein als Subtraktionsaufgabe gedachter Subtrahend knapp unter einem glatten Zehner, ein Minuend knapp über einem glatten Zehner) wurde wesentlich häufiger die *A10* Strategie, aber auch noch häufiger die *N10C* Strategie, also eine wegnehmende Hilfsaufgabe benutzt, während bei Aufgaben ohne diese Charakteristik vor allem schrittweises Wegnehmen auftrat.

Diese drei Studien, vor allem aber die aus den beiden vorangehenden resultierende letzte Studie, ist in vieler Hinsicht bemerkenswert, da hier gleich mehrere der eingangs angesprochenen Fragestellungen rund um komplementbildende *multi-digit arithmetic* angesprochen werden:

- Es zeigte sich deutlich, dass hier der Kontext als Auslöser für die *A10* Strategien (übertragen gedacht: für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung) eine Verantwortung zu haben schien. Einige empirische Studien haben diesen Zusammenhang bestätigt (vgl. Hengartner & Studer, 1999; Blöte u. a., 2000, 2001; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; oder aktuell Peltenburg u. a., 2011). Zuvor hatten z.B. schon Sundermann & Selter (1995) mit dem Kinokontext (vgl. Kap 2.1.1) und Rechnungen am Rechenstrich experimentiert. Damals lösten 4 der teilnehmenden 27 Kindern die Kontextaufgabe „Im Kino können 212 Personen sitzen. Es sind schon 175 da.“ additiv komplementbildend, leider sind keine Aussagen zu anderen, eher wegnehmenden Kontexten beschrieben. Seiner Zeit (1995) war eher noch die übergeordnete Diskussion über prinzipielle Strategieheterogenität herausragender als der detailliertere Blick etwa auf das komplementbildende Rechnen.
- Es zeigte sich weiter, dass die Nutzung des Rechenstrichs einen Anteil daran zu haben schien, die Strategievielfalt anzuregen. Da Komplementbildung am Rechenstrich gut darstellbar ist, und gerade der Grundvorstellungswechsel durch die andere Notation der an der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung beteiligten Zahlen sichtbar wird (vgl. Tabelle 2.2, S.

9), scheint dieser die Nutzung komplementbildender Strategien nicht zu behindern, sondern ebenfalls zu fördern. Viele Studien, in Deutschland etwa die, an denen Selter beteiligt war (vgl. Kap 2.2.1), haben dies immer wieder bestätigt. Allerdings muss man hier einschränken, dass diese Studien in der Regel auf einem traditionellen Vorunterricht aufsetzen, und mit dem Rechenstrich den Kindern ein schneller und direkter Zugang zu strategischem Rechnen ermöglicht wird, ohne dass zuvor Notationskonventionen erfolgen müssen etc. – dagegen scheint noch unerforscht, wie sich die wiederholte Nutzung des Rechenstrichs in höheren Schuljahren, etwa wenn – wie in der vorliegenden Arbeit – auf vorhandene Erfahrungen halbschriftlichem Rechnens und Rechnens am Rechenstrich aus dem zweiten Schuljahr aufgesetzt werden kann, wenn die Subtraktion für den neuen Tausenderraum im dritten Schuljahr erarbeitet werden soll.

- Es zeigte sich darüber hinaus, die *A10* Strategien, besonders die Subform *Connectig Arc* einen Zusammenhang mit den Zahlenwerten der Aufgabenstellung haben könnten. Dieser Zusammenhang, wann Zahlenwerte günstig für komplementbildendes Rechnen sind, bzw. ob diese dann auch den Wechsel in die Grundvorstellung hervorrufen können, wurde später in der Theorie der sogenannten *kleinen Differenz*, vor allem durch Forschungen sogenannten Leuven-Gruppe (s.u.) ausdifferenziert und untersucht – darauf wird weiter unten noch ausführlicher eingegangen.
- Zudem zeigte sich in der Studie von 1997, das *A10* zwar selten benutzt wurde, aber effizient zu sein schien – denn, im Gegensatz zu den anderen Strategien, waren hier alle *A10* Rechnungen richtig. Dieser Effekt der höheren Effizienz war bereits aus der *single-digit arithmetic* bekannt (vgl. Kap. 2.1.2) und stützt sich auch hauptsächlich auf die dort genannten Studien, wurde später nur selten, dann aber deutlich feststellbar in der *multi-digit arithmetic* nacherhoben (z.B. von Menne, 2001; oder aktuell von Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009; De Smedt u. a., 2010). Auch die grundsätzlich seltene Nutzung komplementbildender Strategien, wurde, wenn diese überhaupt vom Kategoriensystem erfasst wurden, bestätigt, z.B. in den gerade genannten und in weiteren Studien (z.B. Blöte u. a., 2000, 2001; Selter, 2000, 2001a, 2003b), dabei werden zum Teil auch Bezüge zur Aufgabencharakteristik, wie gerade zuvor genannt, beschrieben. Allerdings berichten zwei Studien, die beide mit Kontextproblemen arbeiteten, von einer wesentlich häufigeren Nutzung als die vorgenannten (Hengartner & Studer, 1999 - hier war Ergänzen mit 51% die häufigste Strategie; sowie aktuell Peltenburg u. a., 2011).
- Es wurden in dieser Studie zum ersten Mal zwei vom Ansatz her verschiedene Unterrichtsprogramme auf ihre Effektivität für das strategi-

sche Rechnen verglichen, darin auch die Varianz im Bereich der Komplementbildung beobachtet. Studien zur Lehrbarkeit komplementbildenden Rechnens gab es schon vorher, etwa die in Kap. 2.1.2 beschriebenen Studien von Fuson u. a. (z.B. Fuson, 1986; Fuson & Willis, 1988; Fuson, 1990; Fuson & Fuson, 1992), in denen im Bereich der *single-digit arithmetic* die elementare Lehrbarkeit von *counting up* per *instruction* untersucht wurde, die aber wenig mit flexibler Strategiewahl, ebenfalls wenig mit entdeckendem Lernen zu tun hatten, und vor allem keinen Vergleich zu anderen Formen des Lernen boten. Auch dieser Aspekt, welche *instructional settings* Einfluss auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen, ja sogar speziell der Komplementbildung haben könnten, wurde später in weiteren Studien untersucht (ebenfalls weiter unten noch differenzierter dargestellt).

Schon innerhalb der drei genannten Studien lässt sich erkennen, wie die Kategorienbildung im Bereich der beobachteten Strategien weiter verfeinert wurde. Man kann hier also keinesfalls von einem durch die zu Grunde liegende Mathematik statisch fest definiertem System ausgehen, sondern Strategiekategorien scheinen ebenfalls ein *theorem in action* zu sein – hier eben eines der sich mit diesem Thema auseinandersetzenden Mathematikdidaktiker. Lange Zeit schien also das sich in dieser Zeit ausbildende Standardkategoriensystem für halbschriftliche Strategien zu ruhen, bis in den letzten Jahren durch die im vorangegangenen Kapitel genannten Vorschläge von Peltenburg u. a. (2011) und Selter u. a. (2012) wieder neue Gedanken in dieses System eingebracht wurden.

Zum Beispiel werden in der bereits weiter oben kurz genannten Studie von Hengartner & Studer (1999) verschiedene Strategien der informellen halbschriftlichen Subtraktion bei Kontextaufgaben im 1000er-Raum analysiert. Die Autoren nutzen dabei die fünf Kategorien aus Wittmann (1999), um die Schülerdokumente zuzuordnen. Die beiden Rechenwege in Abbildung 2.4 (unten) ordnen sie aber nicht dem Ergänzen (der damaligen Kategorie für komplementbildendes Rechnen) zu, vermutlich, weil Ergänzen zu sehr mit schrittweisem

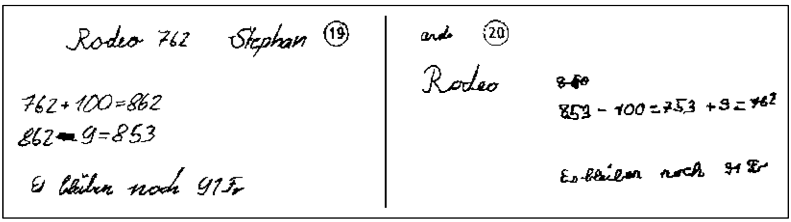


Abbildung 2.4: Rechenwege zu 853-762=91, aus Hengartner & Studer (1999, S. 106), hier nebeneinander gesetzt, im Original untereinander

Vorgehen verknüpft war, sondern dem damals wegnehmend definierten Vereinfachen – obwohl diese Rechenwege erkennbar die seinerzeit ebenfalls wegnehmend definierte und dem Vereinfachen recht ähnliche Hilfsaufgabenidee (glatt zu weit rechnen, kompensierend in Gegenrichtung) enthalten.

Nach den im vorangegangenen Kapitel definierten zweidimensionalen Kategoriensystem müsste man diese Rechnungen in die Strategiekategorie Hilfsaufgabe der Grundvorstellung Komplementbildung einordnen, denn in beiden Rechnungen wird das Komplement zwischen 762 und 853 ermittelt - die erste Rechnung ist dabei im Additions-, die zweite im Subtraktionsformat ausgeführt. Unzuordbare Rechenwege werden oft, wie oben beschrieben, in *others* kategorisiert, oder – in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik – in die sogenannten *Mischformen* (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 182; oder Benz, 2005, S. 63, die in ihrem Kategoriensystem sogar selbst auf das damals gebräuchliche Ergänzen verzichtete). Auch wenn die *Mischformen* eigentlich als zunächst stellenweises, dann schrittweises Vorgehen beschrieben werden, könnte man im bislang üblichen Kategoriensystem hier eine Mischform aus Ergänzen und Hilfsaufgabe konstatieren. Im zweidimensionalen Modell aber sind diese Rechnungen eindeutig kategorisierbar.

Theorie der kleine Differenz

Ein wichtiger Schwerpunkt der Forschung rund um die Komplementbildung existiert in der durch ihre Universitätszugehörigkeit benannten belgischen Leuven-Gruppe (Autoren um Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière & Verschaffel), die in mehreren empirischen, zumeist unterrichtsbezogenen Studien indirekt oder direkt Forschungen zum Bereich der Komplementbildung betrieben haben, dies sowohl zur *single-digit arithmetic*, z.B. Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquière (2005), die feststellten, dass stärkere Erstklässler flexibler im Strategiegebrauch waren als schwächere, oder aktuell Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel (2012), dort wurde ein deutlicher Effizienzvorteil der *indirect addition* gegenüber der *direct subtraction* bei den *large problems* (Minuend >10) in der *single-digit arithmetic* festgestellt. Vor allem aber hat die Gruppe zur *indirect addition* innerhalb der *multi-digit arithmetic* geforscht und dabei den Begriff der kleinen Differenz geprägt. In Tabelle 2.5 (S. 50) werden einige ausgewählte Kernpublikationen dieser Gruppe zu zentralen empirischen Studien in chronologischer Abfolge vorgestellt, in denen auch der Begriff der kleinen Differenz näher bestimmt wird (vgl. Studie B in vorgenannter Tabelle).

Die Befunde dieser Studien (Bezüge durch die den Quellen vorangestellten Buchstaben) lassen sich wie folgt zusammenfassen: Zunächst einmal kann man festhalten, dass alle Studien auf sogenanntem traditionellen Unterricht (A, E) aufsetzen, oder zumindest mit Kindern/ Erwachsenen durchgeführt wurden, die

Tabelle 2.5: Studien der Leuven-Gruppe

<table>
<tr><th colspan="2">Quelle</th></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ergebnisse</th></tr>
<tr><td colspan="2">A) Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel (2008): Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children.</td></tr>
<tr><td>Traditionell unterrichtete Schüler in Klasse 2 bis 4, u.a. Subtraktionsaufgaben, a) deren Einer auf 8 oder 9 endet, die eine Hilfsaufgabe auslösen sollten; und b), die eine kleine Differenz (<6, immer mit Stellenwertübergang) zwischen Minuend und Subtrahend enthalten, und die indirect addition auslösen sollten.</td><td>Die meisten Kinder benutzten die im Unterricht erlernte schrittweise Strategie, additive Komplementbildung wurde selten (in der Regel in <5% der Aufgaben des Typs b) gewählt, aber immer noch häufiger als die Hilfsaufgabe bei Aufgaben des Typs a. Viertklässler schnitten deutlich besser ab, dabei war ein Gefälle zwischen starken und schwachen Schülern zusätzlich erkennbar. Leider wird nicht berichtet, ob auch Aufgaben des Typs a per indirect addition gelöst wurden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B) Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel (2009): Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction.</td></tr>
<tr><td>Zwei Studien mit jungen Erwachsenen (die im Grundschulunterricht nie der indirect addition begegnet waren), dreistellige Subtraktionsaufgaben, mit einer kleinen, mittleren oder großen Differenz, die wie folgt definiert wird: Minuend immer zwischen 812 und 829;
kleine Differenz: Subtrahend zwischen 770 und 790;
mittlere Differenz: Subtrahend zwischen 470 und 490;
große Differenz: Subtrahend zwischen 170 und 190.</td><td>Vor allem Aufgaben mit kleiner Differenz wurden wesentlich effizienter (sowohl vom Fehlerquotienten als auch von der Berarbeitungsperformanz) per indirect addition gelöst, als über direct subtraction, aber auch bei mittleren und großen Differenz war die indirect addition noch erkennbar effizienter. Bei Aufgaben mit kleiner Differenz zeigte sich ein wesentlich höherer Nutzungsanteil der indirect addition als bei den anderen Aufgabentypen. In der zweiten Studie wurde das Feld zwischen der kleinen und mittleren Differenz differenzierter untersucht – mit kohärenten Ergebnissen. Etwa die Hälfte aller Erwachsenen löste hier alle Aufgaben per indirect addition – ein Viertel mixte, ein Viertel wählte nur die direct subtraction.</td></tr>
<tr><td colspan="2">C) Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel (2009): Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: influence of task, subject, and instructional factors.</td></tr>
<tr><td>Es wurden Zweitklässler verglichen, die vorab keinen Unterricht zur indirect addition hatten (aus 2 Schulen), mit solchen, in deren Schule die indirect addition „did recieve special instructional attention“ (Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009, S. 85, in einem mehrere Studien zusammenfassenden Artikel über diese Studie). Die Kinder wurden dort so unterrichtet, dass sie indirect addition anwenden sollten, wenn die Differenz zwischen zwei Zahlen kleiner als 10 war. Die …</td><td>Die Autoren fassen zusammen (ebd., S.86, IA = indirect addition, DS = direct subtraction):
„The major result of this study was surprising and, from an instructional perspective, quite disappointing. While children from the IA-favoring school used IA slightly more frequently than children from the two other schools, the frequency of IA was generally extremely low in all schools: 7.53% (or 62 out of a total of 823) for the IA-oriented school and 0.19% (3 out of a total of 1547) for the DS-oriented schools“.
Vor allem die unterdurchschnittlich starken Schüler fanden dabei gar keinen Zugang zur indirect addition, in beiden Gruppen, während das Anwenden der indirect addition fast ausschließlich bei sehr kleinen Differenzen (< 10, Minuend auf 1 oder 2 endend) beobachtet wurde. Selbstkritisch merken die Autoren retrospektiv an, dass eine solche starre Regel des …</td></tr>
</table>

Tabelle 2.5 (Fortsetzung)

Quelle **Inhalte**	**Ergebnisse**
… Subtraktionsaufgaben des Tests für beide Gruppen, alle mit Stellenwertübergang, bestanden aus kleinen Differenzen kleiner 10, bei der Minuend auf 1 oder 2 endete (z.B. 81-79) und aus eben solchen großen Differenzen (z.B. 72-58) im Hunderterraum, und eben solchen Aufgaben beider Typen, die nicht aus 1 oder 2 endeten (z.B. 66-58 und 95-79).	… Anwenden *Müssens* der Strategiewahl kein Verständnis und keine Flexibilität im Sinne einer adaptiven Expertise, also des Anwenden *Könnens*, entwickeln ließ. Kritisch mag man hier noch hinzufügen, dass die starre Regel ja eigentlich bereits die Lösung des Problems zumindest antizipierend voraussetzt, vermutlich mit schrittweisem Wegnehmen als Standardrechenweg – wenn die Kinder also nicht auf einen Blick, wie bei den sehr kleinen Differenzen, erkannten, dass diese kleiner 10 waren, hatten sie eigentlich keine Chance, die Regel adäquat anzuwenden.
D) Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel (2009): *Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100.*	
Subtraktionsaufgaben mit Stellenwertübergang im Hunderterraum, mit Subtrahenden, die auf 8 oder 9 endeten, im Vergleich zu solchen ohne diese Endung. Allerdings hatten die Kinder keine freie Strategiewahl, sondern konnten nur am Beispiel von 42-29 wahlweise die Aussagen „zuerst minus 30, dann…“ (dies implementierte die Nutzung der Strategie Hilfsaufgabe) oder „zuerst minus 20, dann…“ (implementierte schrittweises Rechnen).	Die Kinder nutzten häufig und effizient die Hilfsaufgabenstrategie. Obwohl bei dieser Aufgabe auch Komplementbildung hätte sinnvoll (kleine Differenz, End-Einer beide nahe am Zehner) sein können, hatten die Kinder leider keine Chance in der Testumgebung, diese anzuwenden.
E) De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel (2010): *Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments.*	
Es wurden zwei Lernumgebungen mit traditionell unterrichteten Schülern aus dritten Schuljahrsklassen erprobt, eine implizierende (Stimulation der *indirect addition* durch kleine Differenzen), und eine explizierende (Lösen von Aufgaben in einer eigenen Strategie und in *indirect addition*, Vergleich der Vor- und Nachteile).	Keines der Kinder, die implizit unterrichtet wurden, wandte *indirect addition* an, auch die Kinder der Gruppe des explizierenden Unterrichts nur sehr selten – so die Aussage der Autoren. Immerhin wurden hier im dritten von vier Testzeitpunkten 37% der Aufgaben mit einer kleinen Differenz per *indirect addition* gelöst, im vierten waren es 31%. Sogar die mittlere Differenz (Definition siehe oben) wurde zu 10%/ 13% per *indirect addition* in diesen Tests gelöst, nur die große blieb mit 4% dahinter zurück. Wenn die Kinder *indirect addition* anwandten, waren sie erneut sehr erfolgreich darin – im zweiten der vier Tests etwa erreichten *indirect addition* Rechnungen 100% Korrektheit, im dritten 97%, im vierten 95%, dagegen lag diese Quote bei den *direct subtraction* Rechnungen durchgängig nur bei etwa 86%. Ebenso zeigte sich erneut in Performanzwerten, dass die *indirect addition* vor allem bei kleinen Differenzen der *direct subtraction* überlegen war.

zuvor nicht *indirect addition* unterrichtet wurden (B, C); selbst wenn mitunter *instruction* stattfindet (C, E), heißt dies, dass vermutlich nicht vom ersten Schultag an (die kritische Phase zum Erwerb von Grundvorstellungen zur Komplementbildung, vgl. Kap. 2.1.2) Verständniserwerb stattfand, also diese speziellen Lernvoraussetzungen möglicherweise nicht vorhanden waren.

Deutlich zeigte sich, wenn sie denn angewendet wird, die höhere Effizienz der *indirect addition* (B, E), was sowohl den Fehlerquotienten als auch die Rechenperformanz angeht (E), denn die zweite zentrale Aussage dieser Studien ist, dass Kinder dies von sich aus generell selten tun (A, C, E). Dabei scheinen Stärkere im spontanen Strategiegebrauch besser als Schwächere zu sein (A), ältere traditionell unterrichtete Kinder besser als jüngere (A), Erwachsene wiederum besser als Kinder (B).

Während generell die der *indirect addition* selten angewendet wird, so können Aufgaben mit einer kleinen Differenz dies ändern (B, C, E). Allein das Vorlegen einer kleinen Differenz allerdings nutzt bei Kindern ohne Vorerfahrung für die Grundvorstellung Komplementbildung nichts (E), sondern es muss gleichzeitig im unterrichtlichen Rahmen die *indirect addition* thematisiert werden (C, E). Bei einer sehr kleinen Differenz (<6) zwischen Minuend und Subtrahend dagegen zeigt sich eine durchaus häufigere Nutzung der *indirect addition* (A, B, C), vermutlich „sehen" die Kinder hier das Komplement schon in der Aufgabe (vgl. dazu *connecting arc* weiter oben bei Klein u. a., 1998).

Die *indirect addition* konkurriert dabei mit der Hilfsaufgabe, sie ist etwas stärker (A), aber beide sind selten (A, D). Die Charakteristik strategiekonformer Zahlenwerte ist für beide Strategien ähnlich (D), in keiner der Studien wurde dagegen die der Hilfsaufgabe doch sehr nahe liegende Strategie Vereinfachen berücksichtigt. So wurde in Studie (E) innerhalb der *direct subtraction* nicht zwischen verschiedenen Strategiekategorien unterschieden, es hätte interessant sein können, wie die variierenden Strategien das Bild komplettiert hätten; möglicherweise sind deshalb Aussagen zu relativieren, die *indirect addition* trete nur sehr selten auf: Wenn etwa in (E) 37% der Aufgaben mit einer kleinen Differenz per *indirect addition* gelöst werden, könnten beide variierenden Strategien, die sich ebenfalls als günstig bei Aufgaben zeigen, die zumindest Elemente der kleinen Differenz beinhalten (Subtrahend nahe am Hunderter), in den restlichen Zweidrittel der Lösungen zu einem hier leider nicht erhobenen, aber vermuteten Teil enthalten sein. Die kleine Differenz kann also eine Rolle bei der *indirect addition* spielen, und somit auch für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung – allerdings ebenso für die variierenden Strategien theoretisch in beiden Grundvorstellungen, definitiv aber in der Grundvorstellung Wegnehmen.

Insgesamt mag man relativierend betrachten: Alle Studien der Leuven-Gruppe bestehen aus *bare-number-problems*, die für den Grundvorstellungswechsel wichtige Rolle des Kontextes (vgl. Kap. 2.1.2) wurde hier komplett außen vorgelassen; auch zu Strategievarianten innerhalb der *indirect addition* (es muss sich hier nicht zwangsläufig um schrittweises Rechnen gehandelt haben) oder gar der *indirect subtraction*, also der Komplementbildung im Subtraktionsformat, werden keine differenzierenden Angaben gemacht. Man kann hier also nicht einfach *indirect addition* mit Komplementbildung gleichsetzen, aber diese als Grundlage für den Erkenntnisstand über Komplementbildungsprozesse in der *multi-digit arithmetic* in unterrichtlichen Situationen heranziehen.

Diese unterrichtlichen Situationen muss man in den genannten Studien ebenfalls differenziert hinterfragen. Allein implizite Instruktionen durch vorlegen von Aufgaben mit kleinen Differenzen reichen nicht aus (E), aber auch explizierende Instruktion ist nicht sehr effektiv (C, D, E). Generell scheint hier weniger *instruction*, sondern mehr *construction* im Unterricht notwendig zu sein, eine auf Verständnis beruhende, eigene Auseinandersetzung mit komplementbildendem Rechnen an Stelle von rezepthaften Regeln (C). So fassen auch Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a. (2009, S. 89) in einem Artikel über mehrere ihrer Studien zusammen:

> *„Finally, there is a need for intervention studies in which the emergence and the further development of the IA strategy is investigated in the context of more powerful IA-oriented learning environments.“*

Interventionsstudien zu Komplementbildung fördernden Lernumgebungen

Mit der Studienreihe ausgehend von den Arbeiten von Klein und Beishuizen (Blöte u. a., 2000, 2001; Klein u. a., 1998) sowie den speziell die Komplementbildung in den Blick nehmenden Studienreihen der Leuven-Gruppe (De Smedt u. a., 2010; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a) sind bereits einige der wichtigsten empirischen Interventionsstudien (in denen also nicht nur Unterricht beobachtet, sondern beeinflusst wurde) vorgestellt, die *instructional settings* entweder für einen Unterricht zum strategischen Rechnen, darin enthalten auch zur Komplementbildung, oder direkt zur *indirect addition*, also direkt zu komplementbildendem Rechnen, evaluieren. Zwei aktuelle Studien können hier noch weitere Erkenntnisse bieten:

Heinze u. a. (2009; vgl. auch die follow-up Studie von Grüßing u. a., 2013) kontrastierten zwei verschiedene Unterrichtsansätze, basierend auf den unterschiedlichen Konzepten zweier Schulbücher, und auf die dort unterschiedliche Entwicklung von adaptiver Expertise beim strategischen Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 1000 mit Drittklässlern. Beide Unterrichtsansätze setzen dabei nicht auf *instruction*, sondern auf *construction*. Im sogenannten *investigative approach* werden den Kindern explizit einzelne Strategiekategorien als Lösungsidee an Beispielen aufgezeigt, wie Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen, und ebenso auch das dort so genannte Ergänzen, die dann in Formen strukturierten und problemorientierten Übens angewendet werden sollen.

Dagegen setzt der sogenannte *problemsolving approach* nicht auf das anwendende Üben vorab explizierend eingeführter Strategieideen, sondern präsentiert breit Aufgaben als offene Probleme, die verschiedene Lösungsmöglichkeiten bieten, und für Erkundungen über das Ausnutzen von Zahlbeziehungen geeignet sind. Dieser Ansatz geht davon aus, dass die Kinder sich nicht vor der Aufgabenbearbeitung für eine Strategie aus dem vorhandenen Repertoire entscheiden, sondern für jede Aufgabe ernneut eine spezifische Strategie entwickeln, basierend auf Vorwissen und Erfahrung, angepasst auf die Problemstellung (vgl. dazu Strategiewahl- und Emergenzansatz nach Rathgeb-Schnierer, 2010, in Kap. 2.2.1). Auch hier werden die genannten fünf Strategieformen durch Beispielrechnungen angeregt, ohne diese aber zu klassifizieren, zu benennen, oder als wichtig zu kennzeichnen, aber mit dem Ziel, in persönlichen Problöseprozessen und gemeinsamen Interaktion daraus adaptive Expertise zu entwickeln.

Als Ergebnis dieser Studie, ermittelt durch *bare-number* Pre- und Posttests, wird berichtet, dass die Effizienz und die Adaptivität in beiden Lehransätzen ähnlich sei, dabei aber bei Kindern des *problemsolving approach* leichte Vorteile im Bereich der Adaptivität festzustellen waren, dagegen im *investigative approach* die Effizienz etwas höher war, und auch die schwächeren Kinder einen besseren Zugang zum strategischen Rechnen fanden, sich aber schnell basale Standardstrategien wie schrittweises Wegnehmen durchsetzten. Für beide Lerngruppen ließ sich feststellen, dass bei der wegnehmenden Subtraktion sehr häufig mit der Strategie Schrittweise gerechnet wurde (30%), gefolgt von Stellenweise (15%), während Hilfsaufgabe (10%), Vereinfachen (3%), aber vor allem Ergänzen (2%) nur geringe Fallzahlen aufwiesen (allerdings wiesen auch nur 2 der 18 Testaufgaben eine für das Ergänzen günstige Zahlencharakteristik auf). In einer follow-up Studie konnten Heinze u. a. (Heinze u. a., 2011) nachweisen, dass eine gezielte unterrichtliche Thematisierung der Aufgabencharakteristik die Nutzung des Ergänzen bei geeigneten Aufgaben deutlich steigern konnte (von 2% im Pretest zu 17% im Posttest).

Peltenburg u. a. (2011) führten eine Studie mit Förderschülern durch, die ein mathematisches Level Ende Klasse 2 besaßen, und zuvor im Unterricht nicht mit komplementbildenden Strategien in Kontakt waren. Die Aufgaben im Hunderterraum waren, im Gegensatz zu allen vorgenannten Studien der Leuven-Gruppe oder von Heinze u. a., nicht nur *bare-number problems*, sondern auch Kontextaufgaben, und zwar solche, die sowohl das Wegnehmen, wie das Komplementbilden intendieren sollten. Zusätzlich variierten die Aufgaben in ihrer Zahlencharakteristik: Es wurden Aufgaben mit einer kleinen Differenz (hier, da die Studie im Hunderterraum mit zweistelligen Zahlen stattfand, definiert als Differenz <7) und darüber, Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang, und Aufgaben, bei denen der Subtrahend und Minuend nahe (<3) am Zehner waren. Das Strategiekategoriensystem dieser Studie berücksichtigt dabei zum ersten Mal auch systematisch die *indirect subtraction* zusätzlich zur *indirect addition*, und stellt Strategie und Grundvorstellung in einer zweidimensionalen Matrix dar (vgl. Kap. 2.2.2), und differenziert die *indirect subtraction* und die *indirect addition* zusätzlich in schrittweise wie stellenweise Strategien (vgl. Abbildung 2.2, S. 40). Dabei teilten sich Grundvorstellungen und Strategiekategorien wie folgt auf (die Prozentwerte beziehen sich auf 768 Gesamtfälle):

- 63% Wegnehmen, aufgeteilt 34% Stellenweise und 29% Schrittweise,
- 34% *indirect addition*, also Komplementbildung im Additionsformat, die sich aufteilte in 4% Stellenweise und 30% Schrittweise
- 1% *indirect subtraction*, also Komplementbildung im Subtraktionsformat, hier gehörten alle Strategien zur Kategorie Schrittweise,
- 60% aller Strategien gehörten also in die Kategoriengruppe Schrittweise, etwa pari belegt durch die Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung
- 38% aller Strategien gehörten in die Kategoriengruppe Stellenweise, davon aber nur 4% in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Das Variieren wurde im Strategiekategoriensystem dieser Studie weder dem Wegnehmen noch der Komplementbildung zugeordnet, so dass diese Fälle hier nicht berücksichtigt sind – es traten aber auch nur 2 Fälle in allen Rechnungen auf. Alle weiteren Fälle außerhalb dieser Kategorien bis auf eine auswendig gewusste Aufgabe waren Verwechselungen der Operation, die Zahlen wurden also addiert statt subtrahiert.

Rein aus Zahlen bestehende Aufgaben mit der oben definierten kleinen Differenz, ob mit oder ohne Zehnerübergang, wurden häufig komplementbildend gerechnet (je 50% dieser Aufgabenvariation), alle anderen Aufgabenvariationen immerhin noch zu je ~25%, während bei den Kontextproblemen sogar 70% der Komplementbildung intendierenden Aufgaben mit dieser gelöst wurden. Bei Kontextaufgaben, die Wegnehmen intendieren sollten, wurde immer noch zu 25% die Grundvorstellung Komplementbildung gewählt. Beim Fehlerquotienten zeigte sich die Komplementbildung erneut dem Wegnehmen deutlich überlegen.

Bis auf den letzten Befund relativiert die Studie einige vorhergehende Aussagen. Die Autoren fassen zusammen:

> *„Although most students had not been taught indirect addition for solving subtraction problems, they frequently applied this procedure spontaneously.“* (S. 350)

> *„In sum, our study has revealed that: SE students (1) are able to use IA spontaneously, (2) are rather flexible in applying IA to solve sub-*

> *traction problems, and (3) are quite successful when solving subtraction problems by IA. These outcomes contrast with some research findings described in Section 1.3 which suggested that weak students have difficulties in applying IA to solve subtraction problems.“* (S. 104; IA = indirect addition, SE = special education)

> *„The item characteristics were the main prompt for using indirect addition. Context problems that reflect an adding on situation and problems that have a small difference between the minuend and subtrahend most strongly elicited the use of the indirect addition procedure. Moreover, indirect addition was identified as a highly successful procedure for special education students, and the best predictor of a correct answer was found in combination with a stringing strategy.”* (S. 350)

Zugang zur Grundvorstellung Komplementbildung für alle Kinder?

Nicht nur, dass sich hier also ein wesentlich höherer Gebrauch der Komplementbildung darstellte – die vermuteten Gründe dafür sind in den Zitaten benannt, sondern vor allem die Tatsache, dass hier Förderschüler Leistungen erbrachten, die man einigen zuvor genannten Studien zufolge nicht einmal leistungsschwachen Regelschülern zugetraut hätte.

Auch über diese Befunden zu komplementbildendem Rechnen hinaus ist diese Studie bemerkenswert, denn mitunter finden sich Aussagen, die mathematisch „schwächeren“ Schüler (bzw. Kinder, die im Lernprozess weniger weit fortgeschritten sind oder langsamer fortschreiten als andere) seien mit Unterrichtskonzepten, wie sie etwa Heinze u. a. (2009) in Regelklassen zum flexiblen Rechnen erprobt haben, oder gar dem flexiblen Rechnen als solches, überfordert. Eine Verständnisentwicklung für beide Grundvorstellungen, Wegnehmen und Komplementbildung, wird für diese Gruppe von Kindern als schwierig beschrieben. Padberg & Benz (2011, S. 174) empfehlen in Anlehnung an (Radatz u. a., 1999), bei Kindern, die Schwierigkeiten haben, operative Beziehungen zu sehen und daher wenig sinnvolle Lösungswege „entdecken“ (Anführungen im Original), das Bewusstmachen des Fehlers und das gemeinsame Erarbeiten eines Normalverfahrens (Padberg & Benz, 2011, S. 174, Hervorhebungen im Original):

> *„Daher ist die* breite Vielfalt *von Strategien für* möglichst viele *Kinder einer Klasse, jedoch gleichzeitig jeweils* eine *Strategie für* die *Kinder, denen die Voraussetzungen für eine flexible Vorgehensweise weithin fehlen, eine sinnvolle und differenzierte Vorgehensweise.“*

Radatz u. a. (1999, S. 86), auf die Padberg & Benz sich hier beziehen, empfehlen, rechenschwachen Kindern lediglich die Strategie Schrittweise zugänglich zu machen, und „zu überlegen, ob es nicht günstiger ist, ihnen im Sinne einer Differenzierung schon frühzeitig das Verfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion zu zeigen". In den Niederlanden (Van de Craats, 2007; zur Diskussion vgl. Van den Heuvel-Panhuizen, 2009, 2010) oder in den USA (United States. National Mathematics Advisory Panel., 2008) werden ähnliche Positionen vertreten, etwa, dass schwächere Schüler besser nur eine sichere Strategie als viele flexible lernen sollten. Allerdings werden diese Position nicht durch geeignete empirische Studien belegt; auch vorhandene gegenteilige Befunde, dass auch schwächere Kinder flexible Rechenfähigkeiten entwickeln können (interntional z.B.: Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009; Verschaffel, Torbeyns, u. a., 2007; Van den Heuvel-Panhuizen, 2010; national etwa: Schütte, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2006; Benz, 2005), werden nicht mit einbezogen. Wenn auch einige der zuvor beschriebenen Studien der Leuven-Gruppe graduelle Unterschiede bei der Benutzung der Komplementbildung von in der Regel zuvor traditionell unterrichteten Schülern feststellen, ergibt sich daraus keine Evidenz, diesen Kindern gar keinen Zugang zu komplementbildenden Strategien zu ermöglichen; auch diese erwerben zu Schuleintritt ein Grundverständnis von Inversion (vgl. Kap. 2.1.2), und können dieses – selbst Förderschüler, wie Peltenburg u. a. (2011) nachgewiesen haben – in höheren Zahlenräumen bei in geeigneten Lernumgebungen anwenden.

2.2.4 Zusammenfassung und Fazit

> *„The inversion principle is tied to the theory of groups, which is certainly a strong and fruitful theory. But it is not an adequate framework for the description and analysis of learning and teaching arithmetic."*

Dieses Zitat von Vergnaud (2012, S. 441) spannt den Diskussionsrahmen der Teilkapitel des Kap. 2.2 auf: Als Bezugssystem für unterrichtliche Prozesse, in denen subtraktives Rechnen in den Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung stattfindet, wurde mentale Arithmetik im Sinne halbschriftlichen, später internalisierten strategischen Rechnens definiert, und die dort verschiedenen Notationsformen (informell, standardisiert, Rechenstrich) vorgestellt, und auf den Rahmen dieser Arbeit zurechtgeschnitten. Beim subtraktiven halbschriftlichen Rechnen im Tausenderraum erfordert das Zerlegen der Zahlen, um günstige Teilschritte zu erreichen, die Anwendung von Rechengesetzen (vor allem die Umkehrung des Assoziativgesetzes der Addition), die vermutlich als *theorems in action* nach Vergnaud (2009), also durch implizite Begriffsbildungsprozesse durch die Auseinandersetzung mit der Anwendung von Rechenstrategien wachsen.

Das zweite Bezugssystem, um auf das Eingangszitat zurückzukommen, ist das Strategiekategoriensystem, in das subtraktives mentalarithmetisches Rechnen eingeordnet werden soll. Hier zeigte sich, dass die fünf in der Mathematikdidaktik als Standard gehandelten Rechenstrategien wie Schrittweise, Stellenweise, Vereinfachen, Hilfsaufgabe und Ergänzen vermutlich nicht als fünf gleichberechtigte Strategien behandelt werden dürfen, sondern dass eine davon, das Ergänzen, vielmehr als übergeordnete Kategorie und damit für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung gedeutet werden kann, und somit eine zweidimensionale Strategiematrix entsteht – in beiden Grundvorstellungen (Wegnehmen und Komplementbildung) ist das Rechnen in den vier verbleibenden Strategiekategorien theoretisch (vgl. die Tabelle von Selter u. a., 2012, in Abbildung 2.3, S. 41), aber auch nachweisbar (vgl. die Ausführungen zur Studie von Peltenburg u. a. in Kap. 2.2.3) möglich. Unter Berücksichtigung der Formate nach Campbell (2008, vgl. Kap. 2.1), also der auffüllenden wie entleerende Komplementbildung, entsteht daraus eine zweidimensionale Strategiekategorienmatrix mit zwölf denkbaren Strategievarianten (vgl. Tabelle 2.4, S. 43), in der das im Unterricht in der Regel als additiv-schrittweise Komplementbildung durchgeführte Ergänzen (die ehemalige fünfte Strategiekategorie im eindimensionalen System) nur eine der acht Möglichkeiten abdeckt.

Wie aus dem Eingangszitat von Vergnaud hervorgeht, sind diese Kategoriensysteme auf das Lernen, aber auch auf das Lehren von Komplementbildung bezogen. Zur Lehrbarkeit der Komplementbildung liegen einige Aussagen aus den in Kap. 2.2.3 dargestellten empirischen Studien vor:

- Kinder, die noch keinen Unterricht zur Komplementbildung hatten, nutzen diese von sich aus eher selten (Blöte u. a., 2000, 2001; De Smedt u. a., 2010; Klein, 1998; Selter, 2000; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2008; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009).
- Kinder, die Komplementbildung nutzen, nutzen diese effizient (Beishuizen u. a., 1997; De Smedt u. a., 2010; Menne, 2001; Peltenburg u. a., 2011; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009).
- Zwei Faktoren scheinen einen wesentlichen Einfluss darauf zu haben, wann Komplementbildung gewählt wird:
  - Komplementbildung intendierende Kontextaufgabe lösen deutlich ein Rechnen in dieser Grundvorstellung aus (Klein, 1998, S. 19; Peltenburg u. a., 2011)
  - Kleine Differenzen (Aufgaben wie 712-689, zur genaueren Definition der kleinen Differenz siehe oben) können einen Einfluss auf die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung haben (Torbeyns u. a., 2008; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009), aber auch auf die Wahl der variierenden Strategien (Peltenburg u. a., 2011; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009b). Bei kleinsten Differen-

    zen (<10 oder <6, siehe oben) sehen die Kinder vermutlich das Komplement direkt, ohne die Zahlenwerte der Aufgabe erst analysieren zu müssen (Blöte u. a., 2000, 2001; Klein, 1998; Peltenburg u. a., 2011; Torbeyns u. a., 2008; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a).

- Der Rechenstrich kann den Gebrauch komplementbildender Strategien begünstigen, zumindest bei Kindern, die vorab keinen Kontakt zum strategischen Rechnen hatten (Blöte u. a., 2000, 2001; Klein, 1998; und viele Arbeiten von Selter, s.o.)
- Für den Erfolg des Unterrichts zur Komplementbildung ist dessen Form entscheidend:
    - Eine reine *instruction*, also eher regelorientierter Einsatz der Komplementbildung, führt nur zu mäßigen Ergebnissen (Klein, 1998; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, u. a., 2009a).
    - Ein Unterricht, der den Kindern die Möglichkeit der *construction* gibt, also der den Erwerb eigenen Grundlagenwissens über Komplementbildung, der den Aufbau der entsprechenden Grundvorstellung unterstützt, zeigt sich dabei erfolgreicher, wobei hier das rein implizite Anregen etwa durch Aufgaben mit einer kleinen Differenz nicht ausreicht (De Smedt u. a., 2010), sondern durch explizite Thematisierung strategischen Rechnens (einerlei, ob investigativ oder problemlösend angeregt, Heinze u. a., 2009) der Aufbau adaptiver Expertise vorangebracht wird, und somit auch Strategien komplementbildenden Rechnens häufiger gewählt werden (De Smedt u. a., 2010; Heinze u. a., 2009; Klein, 1998; Peltenburg u. a., 2011)
- Die mathematische Leistungsfähigkeit der Kinder führt zu graduellen Unterschieden bei der Nutzung der Komplementbildung (z.B. Torbeyns u. a., 2008), aber selbst Förderschüler können in geeigneten Lernumgebungen einen Zugang finden (Peltenburg u. a., 2011).

Abschließend für dieses Kapitel kann noch einmal festgehalten werden, dass sich die Argumentation bislang im Wesentlichen auf empirische Studien zur Komplementbildung innerhalb der *multi-digit arithmetic* bewegte. Didaktische Analysen und Positionen geben hier eindeutige Postulate: Strategisches Rechnen in beiden Grundvorstellungen (Wegnehmen und Komplementbildung) muss integrativ erweckt und kultiviert werden (z.B. Freudenthal, 1983; Müller & Wittmann, 1984, um zwei ältere Quellen zu nennen; oder Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009; Selter u. a., 2012, als aktuelle Darstellungen - die Liste ließe sich noch weitläufig fortführen).

2.3 Komplementbildung – ein schriftlicher Algorithmus

Auch wenn das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung schwerpunktmäßig an das strategische Rechnen in der mentalen Arithmetik, hier besonders an das halbschriftliche Rechnen gekoppelt ist, so findet die Grundvorstellung der Komplementbildung auch in anderen Zusammenhängen ihre Anwendung. Für die Subtraktion in der Primarstufe ist dies vor allem die Nutzung in jenem schriftlichen Subtraktionsalgorithmus, der *Auffüllen mit Ergänzen* genannt wird.

Zunächst sollen hier dieser Subtraktionsalgorithmus in die bestehenden weiteren Algorithmen zur Subtraktion eingeordnet werden, bevor dann Einführungsszenarien vorgestellt und diskutiert werden. Abschließend wird die Frage thematisiert, ob und wie Kinder verständige Einsicht in (diesen) Subtraktionsalgorithmus erwerben können. Doch zunächst ist die Frage: Was ist ein Algorithmus? Bass (2003, S. 323) beschreibt diesen so:

> *„Seeking a single, clearly described, generic solution method that works in all cases makes sense for mathematical problems that occur repeatedly, in more or less standard forms. Such a general solution method, for a general class of problems, is called an algorithm. An algorithm consists of a precisely specified sequence of steps that will lead to a complete solution for a certain class of computational problems."*

Krauthausen & Scherer (2007, S. 49) formulieren etwas kürzer:

> *„Ein Algorithmus ist ein für seine spezifische Anwendungsfälle (z.B. Multiplikationen) allgemein gültiges, in seiner Abfolge festgelegtes, eindeutig beschriebenes Verfahren, das nach endlich vielen Schritten und unabhängig von der Person, die diesen Algorithmus ausführt, zur Lösung führt."*

Oder noch einfacher formulieren Kilpatrick u. a. (2001, S. 103):

> *„More simply, an algorithm is a recipe for computation."*

Algorithmusdefinitionen ließen sich hier noch viele finden, eine Übersicht findet sich etwa in Ziegenbalg, Ziegenbalg, & Ziegenbalg (2010, S. 19ff.), die sich allesamt um die Kriterien Terminiertheit (nach endlich vielen Schritten gelangt man zur Lösung) und Determiniertheit (jeder Verfahrensschritt ist eindeutig bestimmt, die Lösung ist immer gleich) drehen (ebd. S. 23 f.).

2.3.1 Standardverfahren der schriftlichen Subtraktion

Allgemein anerkannt ist eine zweidimensionale Matrix der möglichen Subtraktionsalgorithmen, die differenziert wird in die Art und Weise,

„- *wie die Differenz (der Unterschied) bestimmt wird: durch Abziehen oder durch Ergänzen;*

- *wie der Stellenwertübergang behandelt wird: durch Entbündeln, durch gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend (Erweiterungstechnik) oder durch Auffüllen des Subtrahenden zum Minuenden.“ (Radatz u. a., 1999, S. 132)*

Daraus ergibt sich die in Tabelle 2.6 dargestellte Kombinationsmöglichkeit aus Padberg & Benz (2011, S. 240; vgl. auch Radatz u. a., 1999). Wie schon im Bereich der Grundvorstellungen (*Ergänzen* als Bezeichnung für Komplementbildung, vgl. Kap. 2.1.1) und der Strategien (*Ergänzen* als Bezeichnung für schrittweises, additives Komplementbilden, vgl. Kap. 2.2.2), wir hier *Ergänzen* in einer dritten Bedeutungsvariante benutzt: Die Bezeichnungen *Abziehen* und *Ergänzen* entstammen dabei den Sprechweisen der Algorithmen – im ersten Fall wird (es sei ein beliebiger Stellenwert des Minuenden 8, der gleiche des Subtrahenden 5, die unterstrichene Ergebnisziffer wird notiert) „Acht minus Fünf ist? Acht minus Fünf ist Drei!“ gesprochen, was der Grundvorstellung Wegnehmen entspricht; im zweiten Fall wird „Fünf plus wie viel ist Acht? Fünf plus Drei ist Acht!“ gesprochen, was Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung im Additionsformat darstellt.

Dabei ist nicht nur *Ergänzen* ein Synonym für additiv-auffüllendes Komplementbilden, sondern auch *Auffüllen* des Subtrahenden zum Minuenden für eben dieses. Die Bezeichnung *Auffüllen mit Ergänzen* ist also eigentlich eine doppelte Benennung des additiven Komplementbildens. Im Sinne des in den vorangegangenen Kapiteln definierten Begriffskanons müsste man an Stelle der Bezeichnungen *Abziehen* und *Ergänzen* nun Wegnehmen und Komplementbildung verwenden. Letztere differenziert sich aber in das Additions- und das Subtraktionsformat, das in der Matrix der Algorithmen – konsequenter Weise, ebenso wie bei den Grundvorstellungen und den Strategien – erneut keine Berücksichtigung findet. Padberg & Benz (2011, S. 240) begründen das Fehlen des sechsten Verfahrens in Tabelle 2.6 damit, „da sich Auffüllen nur mit dem Ergänzen kombinieren lässt“. Dies ist dann schlüssig, wenn *Ergänzen* sich auf die additive Form der Komplementbildung beschränkt.

Die Tabelle 2.7 stellt nun eine Erweiterung der Kombinationsmöglichkeiten der Subtraktionsverfahren dar, hier ist das Subtraktionsformat mit aufgenommen; als Sprechweise müsste angefügt werden: „Acht minus wie viel ist Fünf? Acht minus Drei ist Fünf!“ (vgl. Tabelle 2.2, S. 9). Gleichzeitig wird hier

Tabelle 2.6: Kombinationsmöglichkeiten der Subtraktionsverfahren

	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	X	X	–
Ergänzen	X	X	X

Entnommen aus Padberg & Benz (2011, S. 240)

vorgeschlagen, den Begriff *Auffüllen* aus der Kopfzeile zu entnehmen und als Synonym für die Grundvorstellungsvariante in der Zeile zu verwenden, und *Entleeren* als subtraktive Variante der Komplementbildung mit hinzuzunehmen.

An Stelle des Begriffs *Auffüllen* wurde im erweiterten Vorschlag der Begriff *Über- oder Unterschreitung* gesetzt, denn die Kopfzeile bezieht sich auf die Art und Weise, wie der „Stellenwertübergang behandelt wird" (Radatz u. a., 1999, S. 132). Ein Stellenwert kann aber nicht aufgefüllt werden, sondern er wird typischer Weise bei diesem (zunächst für die additive Komplementbildung betrachtet) überschritten: Sei der Minuend 472, der Subtrahend 358, so würde an der Einerstelle gesprochen: „Acht plus wie viel ergibt eine [eigentlich: die kleinstmögliche] Zahl, deren Einerziffer 2 ist? Acht plus <u>Vier</u> ergibt Zwölf!" Dabei wird die Vier als Ergebnisziffer und die durch Überschreiten entstandene Zehnerziffer Eins des Überschreitungsergebnisses Zwölf als sogenannte Übertrag notiert. Der erste Messschritt der Komplementbildung hätte hier den Betrag Vier und wird notiert, die Zahl 358 wird dadurch um 4 auf 362 erhöht, der Zehner 5 wird dabei überschritten und wird zur 6 (was der Übertrag in Kurzform andeutet). Von dieser Zahl aus wird nun der nächste Komplementbildungsschritt ziffernweise an der Zehnerstelle ausgeführt, und so weiter.

Dieses Verfahren lässt sich auch als Entleeren denken: Bei den gleichen Zahlbeispielen, wie oben, würden nun gesprochen: „Eine Zahl mit der Endziffer Zwei minus welche [kleinstmögliche] Zahl ergibt eine neue Zahl mit der Endziffer 8? Das passiert, wenn ich Vier subtrahiere!". Hier wird nun nicht der Subtrahend zum Minuend aufgefüllt, sondern der Minuend zum Subtrahenden hin entleert. Aus 472 würde durch Entleeren um 4 (als erster Messschritt der Komplementbildung) dann 468, mit dieser Zahl würde im folgenden Schritt an der Zehnerstelle weitergearbeitet, die allerdings unterschritten wurde – an Stelle eines Übertrages würde man hier ein Häkchen über der Zehnerstelle des Minuenden notieren, so wie es beim Entbündeln üblich ist, um zu kennzeichnen, dass diese Stelle um 1 vermindert wurde. Auf dieses sechste (bzw. achte) Verfahren wird etwa von Bender hingewiesen, der dazu schreibt (1994, S. 14) „Als schriftliches Verfahren hätte es wie die anderen seine Stärken und Schwächen und ich schätze sein Fehlen letztlich als historischen Zufall ein".

Tabelle 2.7: Erweiterung der Kombinationsmöglichkeiten der Subtraktionsverfahren

	Entbündeln	Erweitern	Über- oder Unterschreiten
Wegnehmen	X	X	–
Additive Komplementbildung oder Auffüllen	X	X	X
Subtraktive Komplementbildung oder Entleeren	X	X	X

Weder auf die Notations- und Sprechweisen der anderen Verfahren kann hier aus Platzgründen nicht weiter eingegangen werden, noch auf die in der Literatur zu findenden weiteren, zum Teil exotischen Varianten des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion, z.B. zum Rechnen von links nach rechts (vgl. Kilpatrick u. a., 2001; Labinowicz, 1985), zur *Treviso*-Methode (z.B. bei Treffers, Notteboom, & de Goeij, 2001), oder zum sogenannten *Rounding up* bzw. *Rounding down* (Sugarman, 2007, eine Variante des Erweiterns). In Kap. 2.3.3 wird stattdessen die Algorithmusvarianten *Computersubtraktion*, und *Subtraktion im Additionsformat*, die ebenfalls mit Komplementbildung zu tun haben, noch näher vorgestellt.

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik entbrannte Ende der Neunzigerjahren eine breite Diskussion, welcher der Algorithmen der aus didaktischen Gründen zu bevorzugende sei (vgl. als Auslöser Padberg, 1994; Radatz & Schipper, 1997; Wittmann, 1997; sowie viele weitere Folgeartikel) – auf diese Diskussion soll hier ebenfalls nicht weiter eingegangen werden, da in der Unterrichtsstudie dieser Arbeit – wie in Kap. 3.2 noch dargelegt werden wird – von der den Unterricht durchführenden Lehrerin das Verfahren *Auffüllen mit Ergänzen* gewählt wird. Ebenso spielen empirische Studien zum Gebrauch der Standardverfahren (wichtige Studien, chronologisch: Johnson, 1938; Brownell & Moser, 1949; Gerster, 1982; Mosel-Göbel, 1988; Fiori & Zuccheri, 2005) sowie didaktische Positionen dazu (Breidenbach, 1957; Krauthausen, 1993; Thompson, 1999; Treffers u. a., 2001; Kilpatrick u. a., 2001; Bass, 2003; Thompson, 2007; Wittmann, 2010; Padberg & Benz, 2011; Selter u. a., 2012) hier nur eine untergeordnet Rolle, so dass auf deren Diskussion hier ebenfalls verzichtet werden soll; Kerngedanke ist dabei immer, dass eine rein prozedurale Beherrschung der Algorithmen nicht ausreiche, sondern diese von konzeptuellem Verständnis getragen werden sollen: „Von entscheidender Bedeutung ist der Aufbau von *Grundvorstellungen*, die die *Algorithmen* tragen“ (Wittmann, 1999, S. 92, Hervorhebungen im Original).

Nach der Einführung der schriftlichen Algorithmen entscheiden sich Kinder oft für diese, unabhängig von deren Effektivität (Rathgeb-Schnierer, 2010; Selter, 2000), zu Ungunsten mentaler Arithmetik. Die Fähigkeit zur Wahl passender Rechenstrategien (adaptive Expertise, vgl. Kap. 2.2.1) wird aber in der Regel im Zusammenhang mit strategischem Rechnen (halbschriftlich oder im Kopf) diskutiert. Eine Einbeziehung der schriftlichen Verfahren scheint hier sinnvoll (Padberg & Benz, 2011, S. 264): „Die individuelle und auch gemeinsame Reflexion über verschiedene Rechenmethoden muss auch nach der Behandlung der schriftlichen Subtraktion unverändert beibehalten werden". Nach der Einführung der schriftlichen Verfahren kann es also auch Bestandteil einer adaptiven Expertise sein, sich bewusst für eine schriftliche Rechnung bei komplexem Zahlenmaterial, oder gegen diese, bei offensichtlich schnellerem strategischem Zugang, zu entscheiden.

2.3.2 Einführungsszenarien

Versuche, die Kinder selbst den Algorithmus entdecken zu lassen, erwiesen sich als wenig tragfähig: „Children's mental calculations are unlikely to develop naturally into formal, standard algorithms" (Thompson, 1999, S. 171). Während für das Entbündeln in der Grundvorstellung Wegnehmen die niederländische Form der *column subtraction* bzw. *kolomsgewijs aftrekken* (Buijs, 2001; Treffers u. a., 2001) eine interessante Zwischenform zwischen halbschriftlicher Strategie und schriftlichem Algorithmus darstellt, sehen einige Autoren für die Grundvorstellung Komplementbildung die Chance, einen eleganten Weg, über das halbschriftliche additive Komplementbilden zum Subtraktionsalgorithmus *Auffüllen mit Ergänzen* zu gelangen, z.B. argumentiert Thompson (2007, S. 7):

> *„On the other hand, counting up is the only subtraction procedure with a built-in natural progression from basic mental strategy through a range of levels of jottings and informal notation to a more formal written notation."*

Thompson beschreibt später (2010, S. 30f.) einen Weg beginnend vom Ergänzen am leeren Zahlenstrahl über sich verkürzende halbschriftliche Strategien bis hin zum Algorithmus. Dieser Weg (ebenfalls beschrieben in Wittmann & Müller, 1992; Krauthausen, 1993; Wittmann, 2010; Selter u. a., 2012), nutzt geschickt die Variante des halbschriftlichen Ergänzens aus, in der die Komplementbildung schrittweise additiv ausmessend von Subtrahend zu Minuend erfolgt, und zwar in der Art und Weise, dass die Zwischenschritte so gewählt werden, dass nicht glatte Zwischenergebnisse, sondern Stellenwerte des Minuenden hergestellt werden – in der Reihenfolge Einer – Zehner – Hunderter durchgeführt, kommt dieses Vorgehen dem schriftlichen Algorithmus sehr nah.

Tabelle 2.8: Ergänzen stellengerecht & Auffüllen mit Ergänzen

Halbschriftliches Rechnen		Schriftliches Rechnen
„Ergänzen“ beliebig	„Ergänzen stellengerecht“	„Auffüllen mit Ergänzen“
469+ ? =683 469+ 31=500 500+100=600 600+ 83=683 31+100+83=214	469+ ? =683 469+ 4=473 473+ 10=483 483+200=683 214	6 8 3 -4 6 $_1$9 2 1 4

In Tabelle 2.8 (oben) ist dieses Vorgehen zwischen der halbschriftlichen Strategie des schrittweisen additiven Komplementbildens (gängig als *Ergänzen* bezeichnet, vgl. Kap. 2.2.2) mit eigentlich beliebiger Schritterzeugung (hier in der Variante „zum glatten Hunderter“) und dem schriftlichen Algorithmus auf Basis des additiven Komplementbildens (gängig als *Auffüllen mit Ergänzen*, neu als *Überschreiten durch Auffüllen* bezeichnet, s.o.) dargestellt. Dieses Vorgehen wird als *Ergänzen stellengerecht* bezeichnet (vgl. Wittmann & Müller, 1992, S. 21), stellt aber eigentlich keine halbschriftliche Strategie mehr dar, sondern ein Verfahren, denn hier ist die Reihenfolge der Schritte (Einer – Zehner – Hunderter) wie auch die Schrittgröße (immer die kleinstmögliche glatte Zahl addieren, die zur Stelle der Zielzahl des Auffüllvorgangs führt) vorgegeben, allerdings auf Zahlenebene, nicht auf Ziffernebene, wie beim schriftliche Verfahren. Man könnte also von einem quasi-algorithmischen Verfahren sprechen (vgl. Kap 2.2.1). Erwähnt werden kann noch die handlungsorientierte Modellierung dieses Verfahrens durch Weiterdrehen von Zählerrädern (vgl. Wittmann, 2010), das aber mathematisch dem der halbschriftlichen Rechenweise entspricht.

2.3.3 Algorithmusverständnis durch Vergleichen

Während der gerade beschriebene Weg, über *Ergänzen stellengerecht* zum Algorithmus zu gelangen, auf Verständnisentwicklung vor der Einführung des schriftlichen Verfahrens setzt, so wird aktuell vorgeschlagen, das Verständnis auch nach der Einführung durch vergleichende Betrachtungen anzuregen. Dazu bietet sich an, die in Tabelle 2.8 dargestellten Verfahren *Ergänzen stellengerecht* und *Auffüllen mit Ergänzen* parallel nebeneinander zu rechnen (vgl. Selter u. a., 2012, dort allerdings nicht halbschriftlich, sondern am Rechenstrich), und einzelne Rechenschritte zu hinterfragen. So kann etwa das auffüllende Komplementbilden mit den das Komplement ausmessenden Schritten, das auch dem

Tabelle 2.9: Auffüllen mit Ergänzen im Vergleich zum Algorithmus im Additionsformat und zur Computersubtraktion

„Auffüllen mit Ergänzen“	Subtraktion im Additionsformat	Computer-Subtraktion
$\begin{array}{r} 6\,8\,3 \\ -\underline{4\,6_{1}9} \\ 2\,1\,4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4\,6_{1}9 \\ +\underline{2\,1\,4} \\ 6\,8\,3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6\,8\,3 \\ +\,\underline{5_{1}3\,0_{1}} \\ \cancel{1}\,2\,1\,4 \end{array}$

schriftlichen Verfahren zu Grunde liegt, noch einmal an der halbschriftlichen Rechnung nachvollzogen werden, oder im Vergleich einzelner Schritte. So wird etwa in der Zeile 469+4=473 des Beispiels für *Ergänzen stellengerecht* in Tabelle 2.8 (S. 65) das Überschreiten des Zehners deutlich, dass im schriftlichen Verfahren an gleicher Stelle zur Notation des Übertrags führt.

Während im zuvor gegebenen Beispiel der Algorithmus *Auffüllen mit Ergänzen* mit dem halbschriftlichen Verfahren verglichen wird, so wäre es auch denkbar, diesen mit anderen schriftlichen Subtraktionsalgorithmen zu vergleichen. Allerdings scheiden hier die Algorithmen der anderen Stellenwertübergangsbehandlungstechniken aus, da hier die Gefahr bestehen könnte, dass Teilschritte wie Übertrags- bzw. Entbündelungsnotationen auf Grund ihrer großen Nähe zu Verwechselungen führen könnten. Daher soll hier in die Diskussion eingeführt werden, etwas weiter entfernte alternative Algorithmen der schriftlichen Subtraktion, die trotzdem einen Zusammenhang zur Komplementbildung aufweisen, zur vergleichenden Betrachtung im Unterricht heranzuziehen.

Zum einen kann hier der Algorithmus *Subtraktion im Additionsformat*, der auf eine Idee von Bedürftig & Koepsell (1995a, 1995b) zurückgeht, herangezogen werden. Hierbei wird die Subtraktionsaufgabe in eine stellengerecht notierte indirekte Additionsaufgabe transformiert, so wie sie auch vom Ansatz her bei der halbschriftlichen Komplementbildung im Additionsformat gedacht würde (aus 683-469 = ? wird 469+ ? =683). Genau wie beim schriftlichen Subtraktionsalgorithmus lassen sich hier Verfahrensschritte definieren, die mit ziffernweisem Rechnen von rechts nach links und Fallunterscheidungen beim Überschreiten von Stellenwerten zum eindeutigen Ergebnis führen.

Zum anderen kann der hiermit eingeführte Algorithmus *Computersubtraktion* benutzt werden. Als Idee einer Rechenübung ist sie von Wittmann & Müller unter der Bezeichnung *Plus und Minus* (1992, S. 42f.) publiziert, wird aber als Algorithmus genauso (allerdings binär) in Halbleiterprozessoren von Datenverarbeitungsgeräten durchgeführt (allerdings binär, vgl. z.B. Eccles, 2007). Hier wird an Stelle der Subtraktion des Subtrahenden sein Neunerkomplement (Ziffernweise Komplementbildung zu 9) addiert, zusätzlich ein künstlicher Übertrag an der Einerstelle notiert und die durch die Addition entstehende zusätzliche größte Stelle (im Beispiel die Tausenderstelle) gestrichen. Arithmetisch handelt es sich dabei um die Addition von 1, und die Subtraktion der größten Stelle, hier minus 1000. Da an Stelle der Subtraktion des Minuenden das Neunerkomplement addiert wird, wird zum Subtrahenden eigentlich 999 addiert (im Beispiel (-469)+999=530), die durch die weiteren Algorithmusvorschriften wieder entfernt werden.

Zentrale Gedanken aller vier Vergleichssituationen (das quasi-algorithmische *Ergänzen stellengerecht* halbschriftlich und am Rechenstrich, sowie die Algorithmen *Subtraktion im Additionsformat* und *Computersubtraktion*) sollen dabei durch den Kontrast auf die Besonderheiten und Wirkungsweisen des Standardalgorithmus fokussieren.

2.3.4 Zusammenfassung und Fazit

Ebenso wie im Kapitel 2.2 zu den halbschriftlichen Strategien festgestellt, ist die zur Zeit übliche Kategorisierung der schriftlichen Subtraktionsalgorithmen unpräzise, und verwendet den Begriff *Ergänzen* nicht stringent im Sinne der Grundvorstellung, denn der auch im Unterricht dieser Studie verwendete Algorithmus mit der Bezeichnung *Auffüllen mit Ergänzen* ist durch diese Synonyme für additive Komplementbildung nicht eindeutig charakterisiert. Dafür wird im bestehenden Kategoriensystem die subtraktive Komplementbildung, wie ebenfalls in Kap. 2.2 zu den halbschriftlichen Strategien festgestellt, auch hier nicht berücksichtigt. In Tabelle 2.7 (S. 63) wurde daher das bestehende Kategoriensystem erweitert, Ergänzen mit additiver und zusätzlich subtraktiver Komplementbildung (Auffüllen und Entleeren) ersetzt, sowie Über- oder Unterschreiten als dritte Möglichkeit des Umgangs mit dem Stellenwertübergang als Bezeichnung vorgeschlagen.

Eine verständige, auf der Grundvorstellung Komplementbildung aufbauende Einführung des Algorithmus *Auffüllen mit Ergänzen* (neu: *Auffüllen durch Überschreiten*) kann mit der halbschriftlichen Rechenart *Ergänzen stellengerecht* erfolgen, also mit schrittweiser additiver Komplementbildung mit einer festgelegten Art und Reihenfolge der Schritte, die aber selbst schon quasi-algorithmischen Charakter hat. Darüber hinaus kann das Algorithmusverständnis vertieft werden, wenn der eingeführte Algorithmus der Subtraktion mit anderen alternativen Subtraktionsalgorithmen (Subtraktion im Additionsformat, Computersubtraktion) verglichen wird, und dabei Gemeinsamkeiten und Unterschiede festgestellt werden.

Nach der Einführung und Übung der schriftlichen Subtraktion kann es interessant sein, zu beobachten, ob die Wahl des schriftlichen Rechenverfahrens in die adaptive Expertise mit einbezogen wird, oder sich eine Dominanz des schriftlichen Verfahrens ausbreitet, wie es andere Autoren festgestellt haben.

2.4 Komplementbildung in weiteren Verwendungszusammenhängen

Auch jenseits der Subtraktion und jenseits der Primarstufe findet die Grundvorstellung Komplementbildung Verwendung –einen Einblick gibt das folgende Kapitel in aller gebotenen Kürze. Dazu wird zunächst auf die Grundvorstellung Komplementbildung im Zusammenhang mit negativen Zahlen eingegangen, bevor die Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung mit parallelen Grundvorstellungen bei Multiplikation verglichen werden. Abschließend werden weitere mathematische und außermathematische Verwendungssituationen des Begriffs *Komplement* bündig beschrieben.

2.4.1 Komplementbildung mit negativen Zahlen

Für die Subtraktion wurden die Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung beschrieben (vgl. Kap. 2.1.1). Dabei lässt sich die Komplementbildung wiederum kontextuell in die Subformen Auffüllen und Entleeren und arithmetisch in das Additions- bzw. Subtraktionsformat unterscheiden. Bislang waren Komplementbildungsprozesse bezogen auf die in der Primarstufe benutzten positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}_0$ beschränkt, obwohl die zugrunde liegende abelsche Gruppe (vgl. Kap 2.1.1) für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, also erweitert auf negative Zahlen, gilt.

Der Grundvorstellung Komplementbildung wird daher auch beim Verständniserwerb für Operationen mit negativen Zahlen eine tragende Rolle zugeschrieben. Wittmann (2003, S. 37, ähnlich auch in 2010, S. 41) argumentiert:

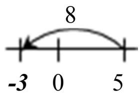
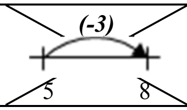
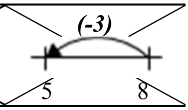
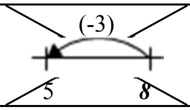
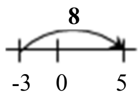
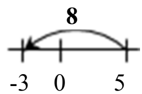
> *„Die Subtraktion in der Form des anschaulichen Wegnehmens von Plättchen verliert bei der Subtraktion im Bereich der negativen Zahlen völlig ihren Sinn, in der Form des Ergänzens ist sie mühelos auf negative Zahlen fortsetzbar.“*

Das Plus- wie das Minuszeichen kann in $\mathbb{Z}$ sowohl für eine Rechenoperation, als auch für das Vorzeichen (hier wird das Plus in der Regel nicht notiert) einer Zahl stehen, und entsprechend verkettet werden.
In Anlehnung an Tabelle 2.2 (S. 9) wurde in Tabelle 2.10 (S. 69) diese Darstellung für die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ übertragen. Die Erweiterung auf die negativen Zahlen erfolgt am Rechenstrich durch hinzufügen von Zahlen links der Null, kontextuell eingeführt z.B. durch Kontostände oder Höhen in Bezug auf den Meeresspiegel (vgl. z.B. Schindler & Hußmann, 2012). Zusätzlich erhalten die Bögen nun Pfeile, um die Operation von den Zahlvorzeichen zu trennen. Geht der Pfeil von rechts nach links, heißt die Operation Minus, geht der Pfeil von links nach rechts, heißt die Operation Plus. Während in $\mathbb{N}$ lediglich Beträge der Teilschritte über den Bögen notiert wurden, erhalten diese nun ggf. mit einem

Minus die Zusatzbedeutung, dass sie negativ wirken, also in Gegenrichtung zu durchlaufen sind.

Am Beispiel der Aufgabe 5-8 in der Grundvorstellung Wegnehmen ist dies in Tabelle 2.10 (unten) nachvollziehbar: Die Operation heißt Minus, also muss der Pfeil von 5 aus nach links gehen, der Minuend ist positiv, also wird in Pfeilrichtung ein Betrag von 8 gesprungen, und man landet beim Ergebnis (-3). Problematisch wird diese Darstellung aber bei negativem Subtrahenden in der Grundvorstellung Wegnehmen, wie am darunter dargestellten Beispiel für 5-(-3) deutlich wird: Die Operation ist Minus, also muss der Pfeil von 5 aus gezeichnet werden, da aber ein negativ wirkender Schritt (-3), also in Gegenrichtung durchlaufen werden muss, gelangt man von der 5 nach rechts zur 8, zeichnet also einen nach links zeigenden (Pfeil am Anfang) aber nach rechts wirkenden Bogen von 5 zur 8. Diese doppelte Negation ist schwierig plausibel zu machen; dagegen überwindet ein Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung

Tabelle 2.10: Grundvorstellungen zur Subtraktion mit negativen Zahlen

Gv/ F Kon	Subtra-hend	W- wegnehmen	K+ auffüllen	K- entleeren
Alg		*c-a=__?* *c-a=* ***b***	*a+__=c?* *a+* ***b*** *=c*	*c-__=a?* *c-* ***b*** *=a*
Za	+	*5-8=__?* *5-8=****(-3)***	*8 + __ = 5?* *8 +****(-3)****=5*	*5 - __ = 8?* *5 -* ***(-3)*** *=8*
Rs	+	 8 ***-3*** 0 5	 ***(-3)*** 5 8	 ***(-3)*** 5 8
Za	-	5-(-3)=__? 5-(-3)= ***8***	(-3)+__= 5? (-3)+ ***8*** = 5	5-__ = (-3)? 5- ***8*** = (-3)
Rs	-	 (-3) 5 ***8***	 **8** -3 0 5	 **8** -3 0 5

Legende: Gv/F = Grundvorstellung/Format, Kon = Kontexteinkleidung, alg = algebraisch, Za = auf Zahlenebene, Rs = am Rechenstrich dargestellt, W = Wegnehmen, K+ = Komplementbildung im Additionsformat, K- = Komplementbildung im Subtraktionsformat, + = positiver Subtrahend; - = negativer Subtrahend.

diese Problematik, wie in Tabelle 2.10 zur gleichen Aufgabe daneben dargestellt: Hier wird einfach das Komplement zwischen -3 und 5 gesucht, beide Zahlen werden an den Rechenstrich geschrieben, und das Komplement 8 wird entweder durch Auffüllen oder Entleeren ermittelt.

Zurück zur Aufgabe 5-8, aber in der Grundvorstellung Komplementbildung betrachtet, würde der Ansatz lauten: Wie kommt man von der 8 zur 5? Mit einer Plusaufgabe nur, wenn man einen negative Betrag notiert, also der Plus-Pfeil in Gegenrichtung durchlaufen wird (gleiches Problem wie zuvor), aber durch Entleeren, also eine Minusaufgabe (Pfeil) mit dem Betrag 3. Diese 3 allerdings ist positiv – aus der Ausgangsaufgabe von 5-8=(-3) in der Grundvorstellung Wegnehmen wird in der Grundvorstellung Komplementbildung im Subtraktionsformat die nicht ganz passende Umformung 5-(-3)=8 (Minus steht hier für die Operation und für das Vorzeichen des Komplementes), während die an sich passendere Umformung im Additionsformat mit 8+(-3)=5 zwar ein negatives Komplement ergibt, und somit zum negativen Ergebnis der Aufgabe in der Grundvorstellung Wegnehmen besser passt. Beide sind aber in der Darstellung am Rechenstrich problematisch.

Festzuhalten bleibt hier, dass die Verwendung der Grundvorstellung Komplementbildung Einsicht in Rechenregeln bieten kann, die sonst rezepthaft auswendig gelernt werden, bei denen sich hier nun ein Verständniserwerb ermöglicht: 8+(-3) gleich 8-3 erschließt sich aus dem Wechsel in diese Grundvorstellung, warum man statt 5-(-3) einen positiven Betrag ergeben muss, wird durch das Bilden des Komplementes zwischen (-3) und 5 erst richtig deutlich.

2.4.2 Parallelen zum multiplikativen Rechnen

So, wie die direkte (wegnehmende) Subtraktion als Inversion der Addition definiert ist (vgl. Kap. 2.1.1) und diese auch durch die inverse (auffüllende) Addition oder inverse (entleerende) Addition im Subtraktionsformat ersetzt werden kann, so besteht ein ähnlicher Zusammenhang auch zwischen Multiplikation und der Division als Inversion der Multiplikation, wenn etwa Aufgaben wie 21:3=__ mit Hilfe der indirekten Multiplikation 3·__=21 oder __·3=21 gelöst werden. Die beiden Grundvorstellungsvarianten Auffüllen und Entleeren (die in das Additions- und Subtraktionsformat münden) der Komplementbildung finden ihr Pendant in den Grundvorstellungsvarianten Aufteilen („Immer drei Brötchen in eine Tüte", __·3=21) und Verteilen („Drei Tüten mit wie viel Brötchen", 3·__=21) bei der Division, die sich wiederum über die indirekte Multiplikation erklären lassen (ausführlich beschrieben in Selter, 1994; vgl. auch Wittmann, 2010, S. 36). Allerdings spricht man hier nicht vom Komplement zwischen 3 und 21, sondern vom Komplementärteiler der 3 zur 21, der mit 3 multipliziert 21 ergibt. Durch eine Primfaktorzerlegung lassen sich alle Teiler und Komplementärteiler einer Zahl finden, die, jeweils miteinander multipliziert, wieder diese Zahl ergeben. Zur Lösung der Division durch inverse Multiplikation, die übrigens sogar beim hierzulande gebräuchlichen schriftlichen Multiplikationsalgorithmus angewandt wird, und dem Verständniserwerb hierin existieren parallel zur Subtraktion einige, aber deutlich weniger Studien (einen Überblick über den Forschungsstand geben z.B. Robinson & LeFevre, 2012), die in ihrer Grundaussage von Verschaffel u. a. (2012, S. 331) zusammengefasst werden mit:

> *„Robinson and LeFevre [2012] review research on children's and adults' understanding and use of the inversion principle between multiplication and division, which is assumed to be more difficult than the inverse relation between addition and subtraction. The findings suggest that the inversion principle is difficult for both children and adults to implement on multiplication and division problems."*

Als Konsequenzen für den Unterricht wird ebenfalls der Aufbau adaptiver Expertise, hier im multiplikativen Rechnen, empfohlen, mit dem Hinweis, dass Verständniserwerb für den inversen Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division dadurch möglich sei. Robinson & LeFevre (2012, S. 425) betonen darüber hinaus:

> *„However, ensuring that children realize how inversion and associativity apply to pairs of operations (addition–subtraction, multiplication–division) is likely the best way to support use of these principles in problem solving situations."*

Umgekehrt kann man hieraus schlussfolgern, dass eine ausführliche, auf Verständniserwerb ausgerichtete Thematisierung der inversen komplementbildenden Subtraktion auch eine bessere Grundlage für das Verständnis der inversen, Komplementärteiler nutzenden Division ermöglichen könnte.

2.4.3 Weiterer Gebrauch des Begriffs Komplement

Generell wird das flexible Rechnen, auch bei der Subtraktion, und hier insbesondere der Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung und das Nutzen der Inversion zum Lösen von Problemen als propädeutisch für Verständnisentwicklung im Bereich der Algebra angesehen (vgl. z.B. Greer, 2012; Usiskin, 2008; Verschaffel u. a., 2012; Wittmann, 2010). Wie zum Beispiel Selter u. a. (2012, S. 404) darlegen, bereitet der grundschultypische Gebrauch der Notation additiver Komplementbildung wie etwa 3+__=7 auf die Benutzung der algebraischen Schreibweise 3+x=7 und – unter Rückgriff auf die Erfahrungen mit den in Kap. 2.1 beschriebenen Varianten der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung – auch auf die typische Lösungsumformung $3+x=7 \Leftrightarrow x=7-3$ vor. Bei der für das flexible, strategische Rechnen notwendigen Anwendung der *theorems in action* (vgl. Kap 2.2.1) auf die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, somit auch auf die Komplementbildung in beiden Formaten, stellt also eine Art „arithmetic as inherently algebraic"

(Verschaffel u. a., 2012, S. 330) dar, die beschriebenen Platzhalter werden dabei nach Akinwunmi (2012, S. 88) als so genannte Quasi-Variablen bezeichnet. In eben dieser Arbeit wird dabei die propädeutischen Entwicklung von präalgebraischen Variablenkonzepten in der Grundschule als bedeutsam herausgestellt, und die Fähigkeit von Grundschülern, bereits verallgemeinernd sich vom konkreten Zahlenbeispiel lösen zu können, nachgewiesen.

Zum Begriff *Komplement* lassen sich neben den bereits zuvor beschriebenen noch weitere mathematische Verwendungszusammenhänge finden:

- In der Restklassenaddition ($\mathbb{Z}/n$, +), also dem Addieren in modulo n, kann die Inversion der Addition nicht nur mit der Subtraktion, sondern ebenfalls mit einer komplementären Addition erfolgen. Am Beispiel für n=26: (13+7≡20) mod 26, diese Addition kann rückgängig gemacht werden durch (20-7≡13) mod 26, aber auch durch (20+19≡13) mod 26. Das additive Invers 19 bezeichnet man in diesem Fall auch als 26er-Komplement zu 7 (7+__= 26, dabei gibt 26 das Modul an). Man könnte also analog zur Subtraktion in ℕ sagen: Man kann in der Restklassenaddition nicht nur direkt subtrahieren, sondern auch indirekt addieren, in dem man die Komplementbildung zum Modul benutzt.
- Im etwas komplexeren Fall der Restklassenmultiplikation lässt sich eine Multiplikation nicht durch eine Division invertieren, sondern bei bestimmten Umständen nur indirekt durch eine Multiplikation mit dem multiplikativen Invers (einem Komplementärmultiplikator des passenden kommutativen Paares) aufheben.
- In der linearen Algebra wird bei der Matrizenrechnung von einer *komplementären Matrix* gesprochen, wenn sie aus den transponierten Kofaktoren der Matrix besteht, und mit deren Hilfe eine inverse Matrix berechnet werden kann.
- In der Vektorrechnung wird als *komplementärer Unterraum* bezeichnet, wenn ein Unterraum des Vektorraumes diesen in zwei voneinander unabhängige Unterräume zerlegt.
- In der Geometrie nennt man zwei Winkel *Komplementwinkel*, wenn sie einander zu 90° ergänzen.
- In der Graphentheorie ist ein *komplementärer Graph* derjenige, der die gleichen Knoten wie sein Pendant hat, aber genau die Kanten hat, die der Vergleichsgraph nicht hat.

Auch jenseits der Mathematik findet der Begriff *Komplement* Anwendung in verschiedensten Zusammenhängen:

- In der Sprachwissenschaft kann sich grammatikalisch ein mit »dass« eingeleiteter *Komplementsatz* an einen Hauptsatz anschließen. In der Phonetik wird die *komplementäre Distribution* von Allophonen unterschieden – so kann z.B. das Graphem <ch> in unterschiedlichen lautlichen Umgebungen anders klingen (vgl. „ich“ und „ach“) – die Verwendungssituationen sind komplement, also überschneidungsfrei. Synonyme bezeichnen gleiche Inhalte mit anderen Begriffen; dagegen stellen Antonyme die Gegenbegriffe dar. Überschneidungsfreie Antonyme werden als *Komplementärantonym* bezeichnet (Beispiel: lebend – tot).

- In der Musiktheorie kennt man *Komplementärintervalle*, das sind jene Tonstufen, die sich gegenseitig zur Oktave ergänzen (z.B. Terzen und Sexten, oder Quarten und Quinten). In der Bachschen Kontrapunktlehre sind *Komplementärrhythmen* solche, die durch Asynchronitiät einzelne Stimmen als selbständig geführt wahrnehmbar machen.
- In der Wirtschaftslehre kennt man *Komplementärgüter*, das sind solche, die sich wirtschaftlich gegenseitig ergänzen, so würden etwa keine Druckerpatronen verkauft, wenn es keine Drucker gäbe, aber Drucker werden verkauft, um den Umsatz an Druckerpatronen zu steigern. Von *Komplementäranbietern* ist die Rede, wenn einzelne Partizipianten einen Gesamtmarkt erstellen, ohne sich gegenseitig Konkurrenz zu machen (z.B. Medienagenturen mit verschiedenen Schwerpunkten wie Sport, Technologie, Politik, die gemeinsam das Wirtschaftsgut Nachrichten erstellen). In einer GmbH & Co. KG übernehmen *Komplementäre* einzeln, aber in der Summe gemeinschaftlich die Haftung.
- In der Elektrotechnik benutzt man *Komplementärtransistoren* zum Aufbau von Gegentaktverstärkern: Da Halbleiter nur positive Ströme modulieren können, werden die negativen Anteile einer Schwingung von einem gegenpolig geschalteten zweiten Transistor erstellt.
- In der Farbenlehre spricht man von *Komplementärfarben*, wenn sie sich im Farbkreismodell genau gegenüber liegen (z.B. blau und gelb), diese bilden untereinander einen maximalen Kontrast, den *Komplementärkontrast*.
- In der Medizin wird als *Komplementärmedizin* bezeichnet, was die Schulmedizin ergänzt (z.B. Naturheilverfahren, Esoterik). Auch spricht man von *Komplementärdiagnostik*, wenn etwa nicht ein Erreger selbst, aber seine Antikörper im Blut nachgewiesen werden.
- In der Mystik haben z.B. Sternzeichen ein *Komplementärzeichen*, die zugeschrieben Eigenschaften verhalten sich diametral.

Der Physiker Nils Bohr (vgl. Buchheim, 1984) bezeichnete all diese Varietäten, zwar auf die Quantenphysik bezogen, aber durchaus verallgemeinernd gemeint, mit dem Überbegriff *Komplementarität* – scheinbar diametrale Eigenschaften eines Sachverhaltes zeigen sich als zusammengehörig und ergänzen sich gegenseitig. Abschließend lässt sich für dieses Kapitel damit festhalten, dass eine Thematisierung von Komplementbildungsprozessen letztlich auch Verständniserwerb in dem viel weiter gefassten *Komplementaritätsprinzip* ermöglicht, oder zumindest vorbereitet.

2.4.4 Zusammenfassung und Fazit

Die Komplementbildung als Grundvorstellung zur Subtraktion in der Primarstufe zu kultivieren, hat möglicherweise auch grundlegendere Bedeutung, da Komplementbildung später einen wichtigen Beitrag zum Verständniserwerb weitere mathematischer und außermathematischer Inhalte leisten kann:

- Eine direkte Erweiterung der Komplementbildung als Grundvorstellung zur Subtraktion ergibt sich in der Sekundarstufe, wenn negative Zahlen und das Rechnen mit diesen eingeführt werden, und die komplementbildende Subtraktion verständigere Einsicht in Rechenregeln ermöglicht.
- Noch in der Primarstufe bietet sich die Nutzung der Inversion beim Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division an, denn Divisionsaufgaben können durch indirekte, Komplementärteiler nutzende Multiplikationsaufgaben gelöst werden. Dies zieht sich von der Kontextorientierten Einführung bis zum Divisionsalgorithmus hin, der ebenfalls die indirekte Multiplikation ausnutzt. Es zeigt sich hier deutlich eine Parallelität zur komplementbildenden Subtraktion, deren Verständnis hier propädeutische Funktion haben könnte.
- Letztlich dient die Beschäftigung mit komplementbildendem Rechnen allgemein der Begriffsentwicklung im Bereich der Komplementarität, die sich sowohl in weiteren mathematischen wie auch in außermathematischen Zusammenhängen immer wieder zeigt.

3 Design der Studie

Aus den in Kap. 2. dargelegten theoretischen Grundlagen und Forschungsbefunden lassen sich Implikationen einer Studie über komplementbildendes Rechnen ableiten. Peters u. a. (2012, S. 346) fassen als Konsequenz ihrer eigenen Studie, in der Kinder Komplementbildung von sich aus selten, aber wenn, dann effektiv nutzten, einordnend in den Forschungsstand zusammen:

> *„These results call for the design of more powerful instructional settings, with explicit and systematic attention to the subtraction by addition strategy and to the inverse relation between addition and subtraction.“*

Die in Kap. 2.2.3 vorgestellten Interventionsstudien zu komplementbildendem Rechnen setzen in der Regel auf Unterricht auf, in dem die Grundvorstellung Komplementbildung bis dahin nicht thematisiert wurde. Die Interventionen selbst divergieren zwischen eher instruktionellem Charakter bis hin zu konstruktivistischen Ansätzen, in denen die Kinder Raum für eine eigenständige Auseinandersetzung und breiterem Verständniserwerb für die immer noch neue Komplementbildung bekamen.

Die vorliegende Studie setzt hier an, geht aber noch einen Schritt weiter: Hier soll in einer Langzeitstudie über ein komplettes halbes Schuljahr lang verfolgt werden, wie Grundschüler, die vom ersten Schultag an immer wieder mit den Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung konfrontiert wurden, die bereits im zweiten Schuljahr strategisches subtraktives Rechnen betrieben haben und die einen Unterricht nach dem konstruktivistischen Ansatz (nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung, vgl. Kap 3.2.2) erhalten, im dritten Schuljahr mit Komplementbildungsprozessen im Rahmen der Subtraktion im Tausenderraum umgehen. Sie stellt also keine klassische Interventionsstudie dar, da hier keine Veränderungen gegenüber dem bestehenden Unterricht evaluiert werden, sondern führt für die Lerngruppe existierende Unterrichtskonzepte konsequent fort, und beobachtet darin Prozesse und Verständnisentwicklungen zum komplementbildenden Rechnen.

In Kap. 3.1 wird zunächst das übergeordnete Forschungsinteresse dieser Studie expliziert, das sich dann in vier konkrete Forschungsinteressen ausdifferenziert. Anschließend werden in Kap. 3.2 das Studiendesign und die Planungsgrundsätze des durchgeführten Unterrichts dargelegt. Kap. 3.3 geht dann auf die tatsächliche Umsetzung des Unterrichts ein; Kap. 3.4 stellt dann die Dokumentations- und Auswertungsmethodik näher vor.

3.1 Forschungsinteressen zur Komplementbildung

Aus dem in Kap. 2 vorgestellten Erkenntnisstand über Komplementbildung lassen sich folgende Punkte ableiten, die als Grundlage für die im Weiteren aufgestellten Forschungsinteressen gelten können:

- Wenn Kinder etwa zu Schuleintritt ein Grundverständnis über die Inversion zwischen Addition und Subtraktion erwerben, kann man davon ausgehen, dass im dritten Schuljahr ein solches vorhanden ist. Prinzipiell sollten sie also in der Lage sein, die Inversion anzuwenden.
- Ebenso scheinen Kinder schon bei Schuleintritt grundsätzlich sowohl in kontextgebundenen als auch in kontextfreien Problemstellungen Komplementbildungsprozesse anwenden zu können.
- Zur Verständnisentwicklung scheinen dabei weniger Unterrichtsansätze beizutragen, die auf *instruction* setzen, sondern eher solche, die auf Anregung zu eigenem, konstruktivem Denken setzen, in denen Kinder sich individuell Verständnis erarbeiten können.

Im dritten Schuljahr und einem auf *construction* setzenden Unterricht (mehr dazu in Kap. 3.2.2) wird also weniger die Frage sein, ob Kinder in diesem Alter generell in der Lage sind, Komplementbildungsprozesse durchzuführen, sondern mehr, in welcher Quantität und Qualität sie es tun, und welche Gelingensfaktoren dafür ausgemacht werden können.

Aus den vorangegangenen Darlegungen ergibt sich daher das übergeordnete Forschungsinteresse dieser Arbeit, das wie folgt formuliert wird:

> *Welchen Stellenwert hat Komplementbildung im Rahmen eines an fortschreitender Mathematisierung angelehnten Unterrichts zur Subtraktion im Tausenderraum?*

Dieses übergeordnete Forschungsinteresse differenziert sich dann in vier konkrete Forschungsinteressen aus, die nun im Einzelnen spezifiziert werden.

3.1.1 Anwendung und Erfolg

Einige zentrale Aussagen der in Kap. 2 vorgestellten empirischen Studien sind, dass Kinder komplementbildendes Rechnen selten von sich aus anwenden, wenn sie es tun, dann aber effektiv. Einige Studien differenzieren hier weiter, dass vor allem die leistungsstärkeren Kinder eher das komplementbildende Rechnen anwenden. Dazu existieren Aussagen, dass nach der Einführung der schriftlichen Subtraktion kaum noch strategisches Rechnen stattfindet; demnach auch keines, das in der Grundvorstellung Komplementbildung zu verankern wäre. Aus dieser Befundelage formuliert sich als erstes Forschungsinteresse:

FI1: 1. *Inwieweit verwenden die Kinder Komplementbildung (zu unterschiedlichen Zeitpunkten) im Unterricht?*
2. *Wenn die Kinder Komplementbildung verwenden: Wie erfolgreich sind sie dabei?*
3. *Gibt es Kinder, die der Komplementbildung eher zusprechen, und solche, die sie eher vermeiden?*

3.1.2 Varianten

In Kap. 2 wurde ebenfalls dargestellt, dass die in der deutschen Mathematikdidaktik benutzte Bezeichnung *Ergänzen* für additive, in der Regel schrittweise durchzuführende Komplementbildung weiteren denkbaren Formen der Komplementbildung wenig Raum gibt, sowohl in anderen Strategiekategorien als auch im Subtraktionsformat. Zumindest theoretisch sind diese möglich, einige werden vorab als „not very common“ (Peltenburg u. a. 2011, S. 354) oder „rather uncommon“ (Selter u. a. 2012, S. 393) bezeichnet. Nach der Thematisierung im Unterricht fand sich in einigen Studien eine höherer Grad der Nutzung komplementbildendem Rechnens als vorher. Somit ist zu fragen:

FI2: Welche Varianten von Komplementbildung lassen sich im Unterricht wann beobachten, wie …
1. *Rechnungen im Additions- oder im Subtraktionsformat,*
2. *Rechnungen in der Strategiekategorie Schrittweise,*
3. *Stellenweise,*
4. *Hilfsaufgabe und*
5. *Vereinfachen, sowie*
6. *Varianten der Rechenarten und Notationsformen?*

3.1.3 Entwicklungen

Wie in Kap. 2.3 beschrieben, lässt sich die Idee des Stelle Herstellens so im Unterricht kultivieren, dass mit der Spezialform der schrittweise additiven Komplementbildung, dem *Ergänzen stellengerecht*, ein eleganter, Verständnis entwickelnder Weg zum Algorithmus eingeschlagen werden könnte. Anschließend könnte durch reflexive Betrachtung dieses Verständnis vertieft werden. Diese Kultivierung der Komplementbildung soll im Unterricht der Studie beobachtet werden. Als Forschungsinteresse lässt sich formulieren:

FI3: 1. *Inwieweit und ggf. in welchen Varianten tritt die Idee des Stelle Herstellens im Unterricht auf?*
2. *Wie kultiviert die Lehrerin diese Idee verständnisentwickelnd zum Algorithmus?*
3. *Inwiefern wird diese Idee nach der Einführung des Algorithmus zur reflexiven Verständnisentwicklung verwendet?*

3.1.4 Auslöser

Wie in Kap. 2.2.3 beschrieben, lassen sich grundsätzlich vier mögliche Auslöser für komplementbildendes Rechnen festmachen: So weisen Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel (2009) auf die besondere Rolle der *kleinen Differenz* in *bare-number-problems* hin, während etwa Peltenburg u. a. (2011) einen starken Einfluss des Kontextes ausmachen. Verschiedene Studien beschäftigen sich mit der Rolle der *instructions*, also damit, ob und wie komplementbildendes Rechnen angeregt werden kann. Selter (2000) weist darauf hin, dass auch individuelle Vorlieben eine Rolle spielen können. Als Forschungsinteresse wird formuliert:

FI4: Welche Rolle spielen mögliche Auslöser der Komplementbildung, wie
1. Aufgaben mit Kontexten, die einen Grundvorstellungswechsel anregen können,
2. Aufgaben mit einer kleinen Differenz,
3. Anregungen durch Reflexionen über das Vorgehen anderer Kinder, und
4. individuelle Vorlieben für bestimmte Varianten komplementbildenden Rechnens?

3.2 Planungsgrundsätze und Studiendesign

Wie bereits eingangs in Kap. 3 angemerkt, soll in dieser Studie ein drittes Schuljahr über ein komplettes Schulhalbjahr lang beim Unterricht zur Subtraktion im Tausenderraum (diese wird in der Regel in der zweiten Hälfte des dritten Schuljahres thematisiert) begleitet werden, und dies in einer Klasse, die bereits Vorerfahrungen sowohl im Bereich der Grundvorstellung Komplementbildung als auch im Bereich flexiblen Rechnens aus dem zweiten Schuljahr hat, um darin Prozesse und Verständnisentwicklungen zum komplementbildenden Rechnen beobachten zu können.

Die Wahl fiel hierbei aus mehreren Gründen auf Kinder einer dritten Klasse: Zum einen sollten bewusst, wie gerade genannt, Vorerfahrungen auch beim flexiblen Rechnen vorhanden sein, zum anderen ist der Tausenderraum interessanter, als dies im Hunderterraum im zweiten Schuljahr der Fall wäre, weil sich hier auf Grund der Größe der Zahlen und der Dreistelligkeit divergentere Substrategieformen ausbilden können. Darüber hinaus wird üblicherweise am Ende des dritten Schuljahres der schriftliche Subtraktionsalgorithmus eingeführt, und sowohl der verständniserwerbende Weg zum schriftlichen Algorithmus, als auch dessen Einbezug in Prozesse adaptiver Expertise sollte mit beobachtet werden können.

In Kap. 3.2.1 wird dieser Ansatz zunächst in die mathematikdidaktische Forschungsmethodologie eingeordnet, bevor in Kap. 3.2.2 die konkrete Planung des Unterrichts der Studie unter Berücksichtigung zu Grunde gelegten didaktischen Prinzipien dargestellt wird.

3.2.1 Einordnung in die mathematikdidaktische Forschungsmethodologie

In dem weiten Feld mathematikdidaktischer Forschung, die sich im Spannungsfeld zwischen der Fachwissenschaft und der Erforschung von Lehr- und Lernprozessen bewegt, welche wiederum von den Bezugsdisziplinen Pädagogik, Psychologie, und Soziologie interdisziplinär determiniert ist, ist die vorliegende Studie forschungsmethodologisch wie folgt einzuordnen (vgl. im Folgenden Reiss & Ufer, 2010):

- Sie ist *empirisch*, da systematisch Daten erhoben werden, hier in der Variante der *Feldforschung*, da real existierender Unterricht beobachtet wird, in dem keine kontrollierten Laborbedingungen vorherrschen.
- Sie zählt zum Bereich der *Unterrichtsforschung*, da hier schwerpunktmäßig sowohl der Unterricht als auch seine Ergebnisse im Fokus des Interesses stehen, und relevante Aspekte der Lehr- und Lernprozesse beobachtet werden, und grenzt sich damit ab zum einen von der Lernforschung, die eher individuelle Lernprozesse einzelner Schüler (z.B. in Interviewstudien) differenzierter in den Blick nimmt, und zum anderen von der Testforschung, die sich mit der Konstruktion verlässlicher Evaluationsinstrumente beschäftigt, obwohl beide Instrumente (Interviews und Tests) flankierend eingesetzt werden.
- Sie ist primär *qualitativ*, da Schülerdokumente und Unterrichtsinteraktionen einer kleinen, nicht repräsentativen Stichprobe als Datenbasis herangezogen werden, die unstandardisiert vor der Folie der mathematikdidaktischen Theorie offen interpretiert werden, auch wenn quantitative Elemente (wie Häufigkeits- und Verteilungsanalysen) ergänzend angewandt werden.
- Sie ist eher *beobachtend* und weniger intervenierend angelegt, da hier keine für die Schüler im Gegensatz zum gewohnten Unterricht völlig neue Lernumgebung evaluiert wird, sondern diese lediglich in ihrem gewohnten Unterricht (der allerdings *state of the art* auf der Grundlage der didaktischen Handbücher und Theorien durchgeführt wird) studiert werden.
- Sie ist eine *Längsschnittstudie*, da hier langfristige Lehr- und Lernprozesse eines halben Schuljahres dokumentiert und ausgewertet werden, in der speziellen Form der *Langzeitstudie,* da hier die Datenerhebung nicht nur wiederholt zu verschiedenen Zeitpunkten, sondern kontinuierlich erfolgt.

Langzeitstudien

In der mathematikdidaktischen Literatur wird allerdings nicht trennscharf zwischen Längsschnitt- und Langzeitstudien unterschieden. In der Regel handelt es sich um Längsschnittstudien, wenn von Langzeitstudien gesprochen wird. Einerseits wird betont, dass Langzeitstudien erforderlich seien, um die Entwicklung und Erprobung von Unterrichtskonzepten, Curricula, und Lernentwicklungen zu evaluieren (vgl. z.B. Bruder, 2009), andererseits werden selten Langzeitstudien, schon gar nicht mit kontinuierlicher Datenerhebung, durchgeführt. Für das übergeordnete thematische Umfeld dieser Studie (Subtraktion in Klasse 3) lassen sich einige wenige Langzeitstudien (chronologisch) nennen, die inhaltlich bereits in Kap. 2.2.1 thematisiert wurden, an die sich auf methodischer Ebene diese Studie anfügt:

- Carpenter & Moser (1984) beobachteten die Entwicklung von Lösungen einfacher Kontextprobleme (im Bereich der *single-digit arithmetic*) zur Addition und Subtraktion von 88 Kindern über drei Jahre hinweg von Klasse 1 bis Klasse 3; dazu gab es 8 Interviewzeitpunkte.
- Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson (1998) untersuchten die Entwicklung des Verständnisses für Addition und Subtraktion von 82 Kindern über drei Jahre hinweg von Klasse 1 bis Klasse 3; dazu gab es fünf Interviewzeitpunkte, und eine begleitende interventive Lehrerfortbildung (Fennema u. a., 1996).
- Selter (2000) untersuchte, welche Rechenarten (mündlich, halbschriftlich, schriftlich) und mit welchem Erfolg unterschiedliche Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Tausenderraum angewendet wurden. An der Studie nahmen 300 Kinder teil; es wurden drei schriftliche Tests in Klasse 3 (vor und nach der Einführung der schriftlichen Verfahren) und zu Beginn von Klasse 4 gestellt.
- Benz (2005) beobachtete 100 Zweitklässler bei der Addition und Subtraktion in Klasse 2; dazu wurden Interviews Anfang, Mitte und Ende des zweiten Schuljahres durchgeführt.
- Rathgeb-Schnierer (2006) untersuchte die Entwicklung von Rechenwegen und flexibler Rechenkompetenz an Hand von Subtraktionsaufgaben bei 20 Kindern einer Klasse 2, und führte dazu selbst interventiven (adaptive Expertise forcierenden) Unterricht in drei Blöcken durch, an die sich jeweils eine Interviewerhebung anschloss.
- Aktuell (noch nicht abgeschlossen) analysiert Fast (2012, 2013) die Lösungsmethoden und deren Entwicklung von 44 österreichischen Kindern, die von Klasse 2 bis Klasse 4 zu sechs Zeitpunkten in Interviews Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 und bis 1000 lösten.

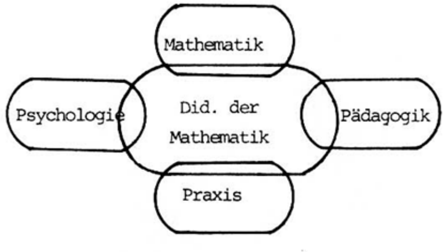


Abbildung 3.1: Mathematikdidaktik als Design Science, aus Wittmann (1982, S. 5).

Es existieren also einige wenige Längsschnittstudien, in denen eher allgemein Addition und Subtraktion rund um die Klasse 3 evaluiert wird; komplementbildendes Rechnen wird dabei nur in Teilaspekten oder gar nicht betrachtet. Keine der Studien beobachtet dabei Unterricht kontinuierlich, sondern alle vorgestellten Studien setzen auf punktuelle Erhebungen in Form von Tests oder Interviews.

Die vorliegende Studie ordnet sich somit in diese überthematisch ähnlichen Studien ein, indem hier eine reine Konzentration auf Komplementbildungsprozesse und keine punktuelle, sondern eine kontinuierliche langfristige Unterrichtsbeobachtung stattfindet, und dies in einer Unterrichtsform, die dem in Kap. 2.2.3. beschriebenen, erfolgversprechenderen konstruktivistischen Ansatz entspricht, in der zudem die Kinder bereits Vorerfahrungen zum flexiblen und komplementbildenden Rechnen haben.

Zu erwähnen ist noch die in den Niederlanden durchgeführt Studie von Buijs (2008), die zwar mit dem großen Einmaleins in Klasse 5/6 nicht direkt zum Themenkreis dieser Arbeit gehört, aber eine Längsschnittstudie (offene Tests zu drei Untersuchungszeitpunkten) darstellt, in der interventiver Unterricht nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung (vgl. Kap. 3.2.2) durchgeführt wurde, wie er auch im Unterricht dieser Studie erfolgen soll. Im Prinzip ist auch die Studie zu Eigenproduktionen beim Einmaleins von Selter (1994) eine Längsschnittstudie, in der Unterricht nach diesem Prinzip erfolgte, auch wenn dieses nicht Kern der Untersuchung war.

Design Science & Design Research

Die konkrete Planung des Unterrichts der Studie ordnet sich dem Bild der Mathematikdidaktik als *Design Science* unter. Wittmann (1982, 1992, 1995, 1998, 2001) definiert diese als Ingenieurskunst, die sich der Bezugsdisziplinen Mathematik, Psychologie und Pädagogik bedient, sowie in der Praxis evaluiert werden muss (vgl. Abbildung 3.1, oben).

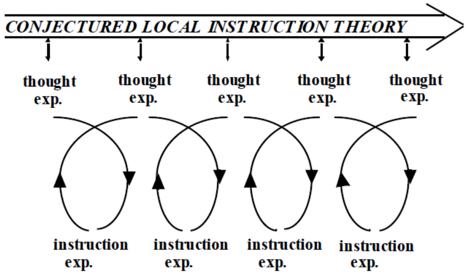


Abbildung 3.2: Design Research: Local Instruction Theory. Aus Gravemeijer & Cobb (2006, S. 54).

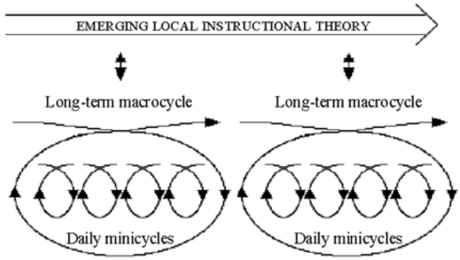


Abbildung 3.3: Design Research: Macro- & minicycles. Aus Gravemeijer & Cobb (2006, S. 54).

In dieser Studie wird dem Design Science Gedanken mehrfach Rechnung getragen: Das Kategoriensystem der Strategien (vgl. Kap. 2.2.2) fußt auf der fachmathematischen Analyse der Inversion zwischen Addition und Subtraktion, während die Grundvorstellungen oder die dort verwendeten *theorems in action* dem Grundverständniserwerb und somit der Kognitionspsychologie zuzuordnen sind. Der konkrete Unterricht soll nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung durchgeführt werden (vgl. Kap. 3.2.2), das wiederum auf konstruktivistischen kognitionspsychologischen Grundideen, aber auch auf pädagogischen Realisierungsansätzen von Unterricht fußt. Dabei werden in der Regel keine neuen Unterrichtsideen eingesetzt, sondern solche, die bereits in der Praxis erprobt und optimiert wurden – zum Beispiel die in Kap. 2.1.1 und 2.2.3 beschriebenen Kino-Kontexte zur Subtraktion oder die Notationsformen der halbschriftlichen Rechenstrategien (vgl. Kap. 2.2.2). Darüber hinaus entsprechen die verwendeten Unterrichtsformen und -methoden (Rhythmisierung des Unterrichts, Organisationsvarianten von Reflexionsphasen, etc.) den fachübergreifenden, primarstufenadäquaten Pädagogikmaximen.

Während Wittmann (s.o.) vor allem den Gedanken der vom Fach aus mitbestimmten Lernstrukturen hoch bewertet, gibt er in seinen Texten relativ wenig

Hinweise, wie genau eine Evaluation der Unterrichtsbeispiele, später Lernumgebungen genannt, in der Praxis aussehen kann, obwohl diese für die in den *Handbüchern produktiver Rechenübungen* (vgl. Wittmann & Müller, 1990, 1992) oder im Lehrwerk *Das Zahlenbuch* (z.B. Wittmann & Müller, 2012) benutzten Lernumgebungen nach eigenem Bekunden immer wieder durchgeführt wurde. Daher orientiert sich diese Studie an den *Design Research* genannten methodischen Ideen, die vor allem von Gravemeijer (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2011; Gravemeijer & Cobb, 2006; Gravemeijer, 1994a, 1994b, 1998) zur qualitativen Evaluation von Lernumgebungen in kleinen Strichproben (also z.B. in nur einer Klasse) im Umfeld der niederländischen *realistic mathematics education* (vgl. Kap. 2.2.3) publiziert wurden. Zentraler Gedanke dabei ist die so genannte *local instruction theory*, die sich zunächst aus den in der Studie zu überprüfenden Inhalten und Lernvoraussetzungen ergibt. Dabei beinhaltet diese zwei Aspekte, wie Gravemeijer & Cobb (2006, S. 19) anmerken:

> *„This local instruction theory encompasses both provisional instructional activities, and a conjectured learning process that anticipates how students' thinking and understanding might evolve when the instructional activities are employed in the classroom."*

Während das *design experiment* durchgeführt wird, soll diese *local instruction theory* immer wieder überprüft, revidiert und konkretisiert werden. Dies geschieht in zyklischen Prozessen (vgl. Abbildung 3.2., S. 82) zwischen Phasen der Durchführung der Studie und der Reflexion der Durchführung. Die Instruktionstheorie ist also nicht a priori bis ins Kleinste determiniert, sondern reagiert auf die Begebenheiten, die sich bei der Durchführung ergeben. Dies geschieht auf einer lokalen Ebene, etwa nach täglichen Unterrichtseinheiten, um die Instruktionstheorie für die folgenden Einheiten anzupassen, aber auch auf einer globaleren Ebene, wenn Lernabschnitte oder die gesamte Studie durchgeführt wurden (vgl. Abbildung 3.3, S. 82), dann auch auf einer theoretischeren Ebene.

Dazu soll der Forscher eine *thick description* (Gravemeijer & Cobb, 2006, S. 45) der Studie anfertigen, also eine möglichst umfassende Dokumentation, nicht nur des Unterrichts, sondern auch der zyklisch daraus gezogenen Konsequenzen. Diese hat zwei Ziele: Zum einen soll auch eine retrospektive Revision der *local instruction theory* möglich sein, in Aspekten, die während der Durchführung möglicherweise noch nicht diskriminierbar waren, sich erst im Verlauf der Studie herauskristallisierten – mit anderen Worten: Dadurch wird die Studie nicht nur theorierevident, sondern ggf. auch emergent, wenn sich hier unvorhergesehene Aspekte ergeben. Zum anderen soll eine *thick description* die Reliabilität der Studie und ihrer Ergebnisse erhöhen, in dem ihre Dokumentation für andere Forscher offengelegt wird, und gegebenenfalls nachvollzogen werden kann. Es ist dabei nicht zu erwarten, dass sich Ergebnisse in anderen Lerngruppen präzise wiederholen, aber Kernaussagen können damit nachvollzogen werden. Gleichsam stellt die *thick description* die Möglichkeit dar, das vorgestellte *design experiment* mit der revidierten *local instruction theory* etwa von Lehrern adaptierbar zu machen, bzw. weitere Forschungen daran anknüpfen zu können.

Diesem methodischen Katalog wird in dieser Studie insofern gefolgt, dass zunächst, wie im folgenden Kapitel beschrieben, ein globaler Rahmen der Unterrichtsinhalte in Themenblöcken aufgespannt wird, für die bereits eine Vorauswahl möglicher Inhalte und antizipierter Lernprozesse, sowie eine klare Vorstellung der anzuwendenden didaktischen Prinzipien besteht; konkrete Aufgabenformate, Reflexionsthemen oder unterrichtliche Anregungen sollen dann aber block- oder sogar stundenweise präzisiert werden. Für die Durchführung (vgl. Kap. 3.3) bedeutet dies, schon vorab für eine breite Dokumentation (vgl. Kap 3.4) zu sorgen, die nicht nur Unterrichtsinhalte, Interaktionen und Ergebnisse, sondern auch die lokalen Instruktionstheorien der Stunden nachvollziehbar macht.

3.2.2 Planung des Unterrichtsversuchs

Im Sinne der vorgenannten methodologischen Theorien wird in diesem Kapitel zunächst das globale Planungsraster des Unterrichts der Studie aufgestellt und kommentiert. Anschließend werden in aller gebotenen Kürze die dem Unterricht zugrunde liegenden didaktischen Prinzipien dargelegt, die diesen zwar bestimmen, selbst aber nicht Gegenstand der Forschungsinteressen sind.

Planungsraster des Unterrichts der Studie

Als übergeordnetes Planungsziel des Unterrichts wurde festgelegt, eine komplette Lerngruppe, also eine dritte Klasse, über die Dauer des gesamten Unterrichts zur Subtraktion in diesem Jahrgang zu begleiten. Dazu wurde eine Unterrichtsverteilung in Inhaltsblöcken erdacht, die sich in etwa auf Schulwochen beziehen sollte, und gemeinsam mit der Klassenlehrerin, in deren Klasse die Studie durchgeführt werden sollte, für das zweite Halbjahr des Schuljahres 2010/2011 terminiert, wie in Tabelle 3.1 (S. 85) dargestellt. Bei der Terminierung wurden bereits bekannte Ausfalltage berücksichtigt. Flankierender, weiterer Mathematikunterricht (z.B. die geometrischen Themen) sollte parallel zum Arithmetikunterricht stattfinden, wenn nicht alle „Fachstunden" (die in flexibler Zeiteinteilung erfolgen sollten, nicht starr an das 45-Minuten-Raster gebunden) in den Wochen der Inhaltsblöcke benötigt würden, sowie in den unbelegten Wochen erfolgen.

Die Blöcke selbst sollten die thematischen Rahmen skizzieren und verteilen, im Sinne fortschreitender Mathematisierung (s.u.) sollte von Anfang an toleriert werden, dass die Kinder diese in unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen. An dieser Stelle soll nun kurz skizziert werden, welche Grundideen

Tabelle 3.1: Planungsraster des Unterrichts zur Subtraktion in Blöcken

Woche	Block	Inhalt
01.02.2011		Beginn des zweiten Schulhalbjahres
07.02.2011	00	Lernstandserhebung (Pretest)
28.02.2011	01	Strategien finden: „Im Kino" , halbschriftliches Rechnen , erste Strategien
07.03.2011		07.03.: Bew. Ferientag, 08.03.: Karneval, 09.03.: Aschermittwoch
14.03.2011	02	Strategiekategorien erarbeiten: Thematisierung aller Strategien
21.03.2011	03	Strategien anwenden: Flexibilisierung des Strategiegebrauchs
28.03.2011	04	Strategien strukturiert üben: Halbschriftliche Subtraktion festigen
	05	Lernstandserhebung (Posttest)
04.04.2011	06	Einführung der schriftlichen Addition
11.04.2011		Strukturiertes Üben der schriftlichen Addition
18.04.2011		Osterferien bis 30.04.
02.05.2011		Wiederholung der schriftlichen Addition
	07	Wiederholung der halbschriftlichen Subtraktion
09.05.2011	08	Einführung der schriftlichen Subtraktion
16.05.2011		Projektwoche
23.05.2011	09	Strukturiertes Üben der schriftlichen Subtraktion
30.05.2011		02.06. Himmelfahrt
06.06.2011 13.06.2011	10	Vergleichende Betrachtung: halbschriftlich und schriftlich Subtrahieren, andere Algorithmen, 08.06. Sportfest, 13.06. Pfingstferien
20.06.2011		23.06. Fronleichnam, 24.06. beweglicher Ferientag
27.06.2011	11	Zurück zum Start: Subtraktive Sachkontexte – halbschriftlich, schriftlich oder im Kopf?
04.07.2011	12	Lernstandserhebung (Retentiontest)
11.07.2011		Pufferwoche
18.07.2011		Letzte Schulwoche vor den Sommerferien

sich hintern den einzelnen Blöcken verbergen – die konkreten Realisierungen, Aufgabenstellungen, etc. werden dann in Kap. 3.3 dargelegt:

- Blöcke 00, 05, 12: Lernstanderhebungen als Pre-, Post- und Retentiontest. Hierbei handelt es sich nicht um standardisierte empirische Tests, sondern hier soll zu drei Zeitpunkten in schriftlich in Einzelarbeit zu bearbeitenden, aber von der Aufgabenstellung her offenen Tests die Bearbeitungsfähigkeit von rein auf der Zahlenebene präsentierten Subtraktionsaufgaben mit dreiziffrigen Zahlen im Tausenderraum erhoben werden. Dabei soll es Kernaufgaben geben, die in allen drei Tests vorkommen, an denen möglicherweise Entwicklungen abgelesen werden können. Der Pretest soll direkt zu Beginn des zweiten Halbjahres erfolgen, noch bevor die Subtraktion im Tausenderraum überhaupt thematisiert wird. Der Posttest erfolgt dann kurz vor den Osterferien, da bis dahin die Blöcke zur halbschriftlichen Subtraktion abgeschlossen sind. Kurz vor den Sommerferien soll dann noch einmal ein Retentiontest eingesetzt werden, um zu überprüfen, ob und wie halbschriftliches, flexibles Rechnen noch stattfindet in Konkurrenz zum bis dahin eingeführten Algorithmus. Drei Kinder werden die Tests in Interviewform durchlaufen, um hier ggf. aus der Interaktion Zusatzinformationen entnehmen zu können.

- In den Blöcken 01 – 04 geht es um die Thematisierung der halbschriftlichen Subtraktion im Tausenderraum.
    - In Block 01 soll diese durch den erprobten Kino-Kontext (nach Selter & Sundermann, 1995; vgl. hierzu Kap. 2.1.1) erweckt werden, da vermutet wird, dass Kontextaufgaben beide Grundvorstellungen aktivieren könnten. Dies zeigte sich zum einen in niederländischen Studien (vgl. Kap. 2.2.3), zum anderen wurde diese Art des Einstiegs in neue Themenkomplexe in der niederländischen *realistic mathematics education* erfolgreich erprobt. Die Bearbeitung der Kontextaufgaben soll (auch in der Notation, z.B. auch am Rechenstrich) noch frei sein, aber eine Übertragung der erworbenen Kompetenzen sowohl beim halbschriftlichen Subtrahieren aus dem zweiten Schuljahr im Hunderterraum als auch beim halbschriftlichen Addieren aus dem dritten Schuljahr im Tausenderraum angeregt werden. Auftretenden Strategievarianten sollen gemeinsam kommuniziert werden.
    - In Block 02 sollen dann die in Block 01 auftretenden Strategievarianten in Kategorien eingeordnet werden. Dabei geht es weniger um einen explizierenden Ansatz, in dem Standardstrategien erarbeitet würden (vgl. Kap. 2.2.3), sondern eher um Begriffsbildungsprozesse, um den bis dahin aufgetretenen individuellen Strategien gemeinsame „Familiennamen" zu geben. Zusätzlich soll diese Kategorienbildung die Kommunikation über Strategievarianten erleichtern; dazu trägt auch bei, dass in diesem Block eine standardisierte Notationsform (vgl. Kap. 2.2.2) erarbeitet werden soll. Wie bereits weiter oben mehrfach angemerkt, erfolgt die Kategorienbildung im Strategiekategoriensystem der Lehrerin auf der Basis der gängigen Handbuch-Darstellung (also keine Differenzierung in Grundvorstellungen, fünf Strategiekategorien inklusiv Ergänzen).
    - In Block 03 sollen die Kinder dann angeregt werden, sich möglicherweise weiteren Strategiekategorien zuzuwenden, als jenen, die

sich ggf. bis dahin präferiert haben, und dabei auch die Aufgabencharakteristik in den Blick zu nehmen, einerlei, ob dies vor (Strategiewahlansatz) oder während (Emergenzansatz, vgl. Kap. 2.2.1) des Lösens der Aufgabe erfolgt. Reflexionsgespräche entfernen sich nun von der Thematisierung der Umsetzung einzelner Strategiekategorieideen, und nehmen Prozesse der adaptiven Expertise in den Blick.

  - In Block 04 geht es dann abschließend darum, durch strukturierte, substanzielle Aufgabenformate Routine in das halbschriftliche Subtrahieren zu bekommen, eine Art Trainingslager, das die verständige Erarbeitung strategischen Rechnens abrundet (vgl. dazu die Aussagen zum Stellenwert des Übens weiter unten).

- In Block 06 erfolgt die Einführung der schriftlichen Addition. Dieser Block wurde nur deshalb in das Planungsraster mit aufgenommen, um die inhaltliche Stringenz des Unterricht des Halbjahres aufzuzeigen; für die Forschungsinteressen dieser Studie ist er nicht von Bedeutung.
- Die Blöcke 07 – 10 beschäftigen sich dann mit der verständigen Einführung der schriftlichen Subtraktion, ihrer strukturierten Übung und der verständnisorientierten vergleichenden Betrachtung zum halbschriftlichen Rechnen und zu alternativen Algorithmen (vgl. Kap. 2.3). Für die Forschungsinteressen dieser Studie sind sie insofern relevant, da hier ggf. das Verständnis der Grundvorstellung Komplementbildung im Bereich der Algorithmen erkennbar werden könnte.
- In Block 11 sollen dann erneut Kontextaufgaben wie in Block 01 eingesetzt werden, um zu überprüfen (und zu reflektieren), ob sich die Kinder im Sinne adaptiver Expertise verhalten, und geeignete Rechenarten wählen, und dabei neben halbschriftlichen oder zu diesem Zeitpunkt dann auch internalisiert im Kopf durchgeführten aufgabenadäquaten Strategien auch das schriftliche Rechnen mit einbeziehen, oder ob letzteres, wie andere Studien implizieren (vgl. Kap. 2.3), dominant wird, und das flexible Rechnen verdrängt.

Damit ist der geplante „Lehrgang“ zur Subtraktion in Klasse 3 skizziert, im Folgenden sollen nun drei zentrale mathematikdidaktische Prinzipien dargelegt werden, welche die Art des Unterrichts und das Verhalten der Lehrerin im Unterricht der Studie determinieren; da diese aber allgemein anerkannt und nicht Gegenstand des Forschungsinteresses sind, kann dieses Darstellung in aller gebotenen Kürze erfolgen.

Aktiv-entdeckendes Lernen

Der Mathematikunterricht der Studie (aber auch sämtlicher Unterricht in der ausgewählten Lerngruppe davor) wird nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden

Lernens durchgeführt. Dieser von Wittmann (1990, und zahlreichen weiteren Publikationen) geprägte, aber schon weit vorher (z.b. bei Winter, 1984, 1988, 1989, aber auch bis in die Zeit der Reformpädagogik zurückverfolgbare) entstandene Begriff steht für eine Unterrichtsform, die Lernende als aktive Subjekte begreift, die ihr Wissen selbst durch die Auseinandersetzung mit geeigneten Aufgabenstellungen in offenen, substanziellen Lernumgebungen konstruktiv erzeugen. Wissenserwerb wird hier als eigenständiger Prozess gesehen, nicht als fertiges, zu vermittelndes Produkt. Musste sich dieser Ansatz zu Beginn der Neunzigerjahre noch gegen kleinschrittiges und belehrendes, auf Vermittlung setzendes Lernen verteidigen, so kann er heute als allgemein anerkannt gelten. Nicht nur die didaktischen Handbücher (Wittmann & Müller, 1990, 1992; Radatz u. a., 1998; Krauthausen & Scherer, 2007; Padberg & Benz, 2011) beschreiben dies unisono, auch in den Bildungsstandards, wie z.B. im Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalens, wird konstatiert, dass „das Mathematiklernen durchgängig als konstruktiver, entdeckender Prozess verstanden wird“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalens, 2008, S. 55). Selbst für den Unterricht mit Förderschülern (vgl. Scherer, 1995; Scherer & Wember, 2005; Moser Opitz, Schmassmann, & Hansen, 2003), sogar für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (Ratz, 2009; Ratz & Wittmann, 2011) wurde es als natürliche Form des Lernens nachgewiesen. Auch international ist dieses Prinzip anerkannt, zum Beispiel in der niederländischen *realistic mathematics education* als *acitivity principle* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, S. 5, 2010, S. 4; zurückgehend auf Treffers, 1987a; und Freudenthal, 1991).

Fortschreitende Mathematisierung

In eben diese niederländische Mathematikdidaktik wurde auch das Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung durch Treffers (1979, 1983, 1987a, 1987b) geprägt, und zum Beispiel in den Studien von Selter (1994) oder Buijs (2008) nachvollzogen. Treffers selbst beschreibt den Kerngedanken dieses Prinzips so (1979, S. 9):

> *„De kinderen krijgen gelengenheid om de volledige cijferhandelingen steeds meer te schematiseren, te verkorten en te verinnerlijken, zodat het standaardalgoritme voor en belangrijk deel als het ware op en natuurlijke wijze door de kinderen zélf wordt ontwikkeld.“*
>
> *„Die Kinder bekommen die Gelegenheit, die umfangreichen Zahlhandlungen [heute: individuelle, informelle Rechenwege] zunehmend zu schematisieren, zu verkürzen und so zu verinnerlichen, sodass der Standardalgorithmus als bedeutungsvoller Gegenstand von den Kindern auf eine natürliche Weise selbst entwickelt wird.“ (Übersetzung U. Schwätzer).*

Treffers (1983, S. 20) selbst hat einen idealtypischen Verlauf von Unterrichtseinheiten aufgestellt, der hier verkürzt und leicht adaptiert („7. Die Endstufen sind entsprechend den Endzielen variabel“ wurde durch diesen Punkt erläuternde Textzitate in den unter 7. und 8. eingefügten Punkten ersetzt) wiedergegeben werden soll:

1. Zwangloser Einstieg in das Thema
2. Kontextaufgaben: Bedeutungsvolle Rechenhandlungen
3. Anknüpfen an informelle Rechenmethoden der Kinder, Anregung der Anwendung geeigneter(er) Methoden
4. Von Anfang an große Zahlen, Differenzierung durch Lösungsstufen
5. Schriftliches Rechnen wird mit Kunstgriffrechnen verknüpft
6. Immer stärkere Verkürzung und Schematisierung
7. Die Dauer des Lehrgangs kann von Schüler zu Schüler variieren
8. Das erstrebte Endziel braucht nicht für alle Schüler übereinzustimmen

Einige Punkte müssen dabei aus dem Kontext erklärt werden:

- Punkt 4 grenzt sich von dem seinerzeit vorherrschenden Unterricht nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte ab, „große Zahlen“ könnte aktueller als ganzheitlicher, einschränkungsloser Einstieg in das zu behandelnde Thema verstanden werden, also zum Beispiel bei der Subtraktion erfolge kein gestufter Einstieg, der zunächst auf glatte Zahlen und den Verzicht von Stellenwertübergängen setzt, sondern man setze direkt Aufgaben auf hohem Schwierigkeitsniveau ein. Die „Differenzierung durch Lösungsstufen“ versteht sich dann als eher kontinuierliche Spannbreite zwischen kleinschrittig-probierendem und heuristisch-elegantem Vorgehen.
- Eine zeitgemäße Transformation von Punkt 5 könnte lauten: Individuelle, informelle Rechenwege [das könnte hier mit schriftlichem Rechnen gemeint sein, also eher aufgeschriebenes Rechnen] werden zu flexiblen Rechenstrategien [Kunstgriffrechnen] entwickelt.

Der sowohl in Punkt 6 wie auch im Zitat darüber benutzte Begriff *Verkürzung* darf dabei nicht allein für die Notationsformen gedacht werden, auch wenn gerade die Beispiele, die Treffers selbst angegeben hat, vor allem durch diese gekennzeichnet sind. Es geht hier vielmehr um kognitive Schematisierungsprozesse, in denen sich die Schüler zu höheren Erkenntnis- und Verständnisniveaus vorarbeiten. Treffers (1987a, S. 277ff.), bezieht sich hier auf Piaget, und dessen Beschreibung eines Prozesses der Aneignung kognitiver Konzepte. Dabei kann es auch zu Verkürzungen von Notationen kommen, wie in den Beispielen von Treffers (1983) oder Selter (1994) deutlich wird, wenn die Kinder dort von der fortgesetzten Addition zur Multiplikation übergehen. Übertragen auf die komplementbildende Subtraktion bedeutet dies, dass die Aufgabe 358+__= 542 zunächst mit kleineren, vorsichtigeren auffüllenden Schritten gelöst wird (z.B. +2, +40, +100, +40, +2; zusammen 184), später aber auch – nach entsprechendem Verständniserwerb – ein kürzerer, aber vor allem kognitiv anspruchsvollerer (auf höherer, also fortgeschrittener Schematisierung beruhender) Rechenweg mit Schritten von +200 und -16 denkbar wäre. In der niederländischen *realistic mathematics education* wird dieses Prinzip auch als *level principle* bezeichnet (Van den Heuvel-Panhuizen, 2010, S. 5, vgl. auch 2000, S. 5f.):

> *„[…] students pass various levels of understanding: from the ability to invent informal context-related solutions, to the creation of various levels of shortcuts and schematisations, to the acquisition of insight into how concepts and strategies are related. Models serve as an important device for bridging the gap between informal, context-related mathematics and the more formal mathematics.“*

Zusätzlich kann noch angemerkt werden, dass Treffers selbst (1979, Zitat s.o.) zunächst den Standardalgorithmus als Entwicklungsziel eines solchen Unterricht definierte, und seine Beispiele auch in diese Richtung gehen. Auch Padberg & Benz etwa nennen das Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung nur im Zusammenhang mit der Einführung der schriftlichen Multiplikation (2011, S. 269ff.) und Division (ebd., S. 289ff.). Treffers selbst sieht dieses Prinzip aber später universeller (1987). Selter (2004b, S. 18) schreibt dazu:

> *„Der Ansatz von Treffers wird im Übrigen häufig einschränkend nur auf dem Weg ausgehend von den halbschriftlichen Strategien der Kinder hin zu den schriftlichen Normalverfahren bezogen. Doch es handelt sich um ein umfassendes Unterrichtsprinzip: Man versucht auch in Bezug auf andere Inhalte, die Erfindungen der Kinder mit der ‚Norm‘ zu verbinden, sie also anzuregen, ihre Gedankenwelt zielbewusst weiter zu entwickeln.“*

Hengartner & Studer, die informelle Strategien zur Subtraktion bei Kontextaufgaben im Tausenderraum erhoben, erläutern zur Subtraktion, hier bezogen auf den in der Schweiz üblichen Algorithmus des Entbündelns (1999, S. 108):

> *„Abschließend sei erwähnt, dass keines der 116 Kinder von sich aus so gerechnet hat, wie es für das schriftliche Normalverfahren wichtig wäre, nämlich stellenweise. Die schriftliche Subtraktion wird die Lehrkraft demnach schlicht einführen müssen; sie kann sich kaum auf spontan entwickelte Lösungsansätze abstützen.“*

Im Unterricht dieser Studie wird das Prinzip wie folgt umgesetzt: Durch einen zwanglosen Einstieg (P[unkt]1, s.o.) mit Hilfe des Kino-Kontextes (P2) sollen dort in bereits komplexen Problemstellungen (P4) die Grundvorstellungen Wegnehmen und Komplementbildung aktiviert werden (P2), und zunächst mit Hilfe individueller Rechenwege (P3) auf verschiedenen Niveaus (P4) gelöst werden. Die sich anschließenden Unterrichtsblöcke haben dann das Ziel, Kategorienbildung und Optimierung innerhalb dieser individuellen Rechenstrategien zu betreiben (P5, P6), und dabei adaptive Expertise zu entwickeln (P3, P6). Dabei werden einige Kinder langsamer zu höheren kognitiven Niveaus bezüglich der Subtraktion, und darin auch zur Komplementbildung voranschreiten (P7), andere vorauseilen; auch wird am Ende zu tolerieren sein, dass der Grad des Verständnisses für komplementbildendes Rechnen und der erlangten adaptiven Expertise unterschiedlich ausgeprägt sein kann (P8). Zwei Aspekte sind in diesem Zusammenhang wichtig. Zum einen haben die Thematisierungen von Strategiekategorien in Block 02 (vgl. Tabelle 3.1, S. 85) nicht einen explizierenden Charakter (vgl. Planungsraster weiter oben) im Sinne von Standardstrategien, sondern sie sollen die Kategorienbildung als Begriffsbildungsprozess anregen. Zum anderen ist es nicht a priori Ziel, den Algorithmus der schriftlichen Subtraktion aus den halbschriftlichen Rechenstrategien quasi als maximale Verkürzung herzuleiten, es kann sich jedoch ergeben, dass die halbschriftlichen Strategien der Kinder eine Erkenntnisgrundlage bereiten und zur Einführung des Algorithmus mitbenutzt werden.

Zone der nächsten Entwicklung

Zusätzlich zur konstruktive Auseinandersetzung mit geeigneten Aufgabenstellungen in beiden genannten Prinzipien wird der Haltung der Lehrkraft entscheidende Bedeutung zugemessen, was Treffers (s.o., P2) bereits mit „Anregung der Anwendung geeigneter(er) Methoden“ („Methoden“ müsste hier durch „Strategien“ im Sinne der adaptiven Expertise ersetzt werden) umschreibt. In der niederländischen *realistic mathematics education* wird dieses Prinzip auch als *guidance principle* bezeichnet, auf Freudenthal (1991) geht hier der Begriff der *guided reinvention* zurück. Van den Heuvel-Panhuizen beschreibt die dazu nötig Lehrhaltung (2000, S. 9):

> *„One of Freudenthal's (1991) key principles for mathematics education is that it should give students a 'guided' opportunity to 're-invent' mathematics. [...]One requirement is that teachers must be able to foresee where and how they can anticipate the students' understandings and skills that are just coming into view in the distance[...].“*

In der der deutschen Mathematikdidaktik existiert als Pendant das Prinzip der Zone der nächsten Entwicklung, das eng an das gleichnamige entwicklungspsychologische Modell von Vygotskij (2002) geknüpft ist. Es beantwortet die Frage, wie denn die individuelle Auseinandersetzung zu ähnlichen Begriffsbildungsprozessen innerhalb einer Gesellschaft führt, denn nach Auffassung Vygotskijs haben alle höheren psychischen Funktionen, auch das begriffliche Denken, einen sozialen Ursprung. Entwicklung findet dabei in der Zone der nächsten Entwicklung statt: In der Zone der aktuellen Entwicklung beherrscht das Kind unabhängiges Problemlösen. In der Zone der nächsten Entwicklung kann das Kind durch Anregung von Erwachsenen oder in Zusammenarbeit mit gleichaltrigen, aber bereits kognitiv vorangeschrittenen Kindern, also im sozialen Kontext, den Sprung zu neuen Problemlösungen schaffen.

> *„Die Zone der nächsten Entwicklung definiert jene Funktionen, die zwar noch nicht herangereift sind, sich aber im Prozeß der Reifung befinden. Funktionen, die morgen heranreifen werden, sich gegenwärtig aber noch in einem embryonalen Stadium befinden. Man könnte diese Funktionen eher als ‚Knospen' oder ‚Blüten' der Entwicklung bezeichnen – im Gegensatz zu ihren ‚Früchten'." (Vygotskij, 1978, Übersetzung aus dem Englischen nach Miller, 1993)*

Das mathematikdidaktische Prinzip der Zone der nächsten Entwicklung konstatiert also, dass auch mathematisches Wissen nicht a priori in der Sache steckt oder im Individuum angelegt ist, sondern durch soziale Enkulturation erworben wird. Dabei ist es die Aufgabe des Lehrers, die heranreifenden Fähigkeiten der Kinder zu erkennen und durch vorsichtiges Anregen diese in die Zone der nächsten Entwicklung zu leiten. Keines Falls ist dies ein Plädoyer für einem belehrenden Unterricht nach alter Schule: Den Weg zur Erkenntnis müssen sich die Kinder nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernen selbst erarbeiten, aber die Richtung wird durch Enkulturation in das bestehende, bewertete mathematikdidaktische Denksystem der Lehrenden bestimmt.

Für den Unterricht dieser Studie bedeutet dies zunächst, dass die Lehrerin den Kindern gegenüber eine kompetenzorientierte Grundhaltung einnehmen wird, also weniger auf die noch im Rechenweg vorhandenen Defizite, sondern mehr auf die Entwicklungschancen im Sinne fortschreitender Mathematisierung blicken soll. Dabei wird sie global (also im Unterricht der Gesamtklasse) jene Rechenstrategien thematisieren, die für die Mehrzahl der Kinder eine Verständnisentwicklung versprechen, zum Beispiel, wenn noch viele Kinder recht vorsichtig und kleinschrittig die Rechenschritte wählen, ihnen Beispiele aufzuzeigen, wie man mit weniger Schritten eleganter zum Ziel kommen kann. Lokal wird sie bemüht sein, sich an den individuellen Entwicklungsständen der einzelnen Kinder zu orientieren, und in der Lehrer-Schüler-Interaktion geeignete Impulse oder Konflikte erzeugen, die dem Kind bei der Auseinandersetzung mit dem aktuellen Problem ggf. beim Eintreten in die Zone der nächsten Entwicklung helfen können.

3.3 Durchführung des Unterrichtsversuchs

Der im vorangegangenen Kapitel skizzierte Unterricht zur Studie wurde im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2010/2011 an einer Dortmunder Grundschule in einer Klasse mit 18 Kindern durchgeführt. Sie wurden von der Klassenlehrerin unterrichtet, die dort seit der ersten Klasse das Fach Mathematik lehrt.

Im Ganzen wurden 35 Stunden in den geplanten Blöcken nach Tabelle 3.1 (S. 85) durchgeführt. Dabei handelte es sich nicht um traditionelle Stunden mit 45 Minuten Dauer, sondern diese wurden in das Tagesgeschehen der Klasse eingepasst und waren unterschiedlich lang, die meisten hatten in etwa die Dauer einer Einzelstunde, es wurden aber auch Stunden, die über zwei Stunden oder länger gingen durchgeführt, ggf. von einer Pause unterbrochen. Zu diesen Stunden zählt auch die Durchführung der 3 Tests in der Blöcke 00, 05, 12, die für die Kinder gleichsam auch eine Art von Unterricht in Einzelarbeit darstellten (Lerneffekte können auch bei überprüfenden Aufgabenstellungen nicht ausgeschlossen werden), sowie eine Förderstunde, an der nur ausgewählte Kinder teilnahmen.

Insgesamt ergab sich die Durchführung kohärent zur Planung, allein das Zeitraster musste mehrfach auf Grund schulischer Ereignisse umgeplant werden. Die vollständige Stundenliste ist der Tabelle 3.2 (unten) zu entnehmen. Die Stundenbezeichnung erfolgt mit Kurzformen, die später auch in der Auswertungssoftware (vgl. Kap. 3.4) verwendet werden. In der Tabelle sind alle Aufgabenstellungen der Stunden dargestellt, ggf. mit einem Kommentar ergänzt, nicht jedoch die didaktische Kernidee oder die Herkunft des Aufgabenformates. Hier sei auf Kap. 4.3 (Dokumentation) verwiesen, in dem auf eine Quelle zur *thick description* der *local instruction theories* nach Gravemeijer (vgl. Kap. 3.2.1) hingewiesen wird. Hier sei noch angemerkt, dass die Lehrerin in den Stunden 02-Strat1 und denen des Blocks 08 Ereignisse aus Vorstunden aufgreift und in die dadurch leicht von der Planung abweichende Durchführung integriert. In der im Raster fehlenden Stunde 04-Ueb3 erhalten 2 vorher erkrankte Kinder lediglich eine kurze (fünfminütige) Einführung in das Aufgabenformat, sie wird daher nicht als Stunde in dieser Tabelle mit aufgezählt.

Tabelle 3.2: Auflistung aller Unterrichtsstunden der Studie

Tag	Block	Stunde	Aufgabenstellung/ *Kommentar*
01.03.	00	Pretest	*Gehört zur Testserie des Pre-, Post- und Retention-Tests.* In allen Tests gleiche Kernaufgaben: 657 – 224 = ____ , 426 – 387 = ____ , 763 – 498 = ____
02.03.	01	Kino1	*Einstieg in den Kino-Kontext mit Hilfe von Bildern.* Im Kino sitzen 526 Leute, 389 davon gehen zur Pause.
03.03.	01	Kino2	Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da.
09.03. 10.03.	01 01	Kino3 (D) Kino4 (D)	Aufgabenpool: In einem Kino sind noch Plätze frei. 293 Leute sind schon da. Wähle verschiedene Kinosäle aus.

Tag	Block	Stunde	Aufgabenstellung/ *Kommentar*
			In einem Kino sind alle Plätze besetzt. 137 Leute gehen zur Pause. Wähle verschiedene Kinosäle aus. Sitzplätze in den Sälen: 624, 598, 567, 465, 381, 359, 315, 303, 298, 271, 143, 120
15.03.	02	Strat1	*Ein Plakat als Übersicht über sechs Strategiekategorien wird ausgehängt: Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe, Vereinfachen, Ergänzen(+), Ergänzen(-), letztere als Reaktion der Lehrerin darauf, dass in den Vorstunden bereits das Subtraktionsformat originär aus dem Denken der Kinder auftritt.* Kombinatorischer Aufgabenpool für die kommenden 5 Stunden mit den Minuenden 624, 598, 567, 465, 381, 315 und den Subtrahenden 297, 256, 108. *Täglich werden daraus Pflicht- und Küraufgaben vorgegeben, Pflichtaufgaben der Folgestunden sind anfangs gesperrt.* Pflichtaufgabe: 465-256. Die Kinder dürfen daran die Strategie Schrittweise versuchen.
16.03.	02	Strat2	Pflichtaufgaben: 381-297 und 315-256. Die Kinder dürfen daran wahlweise Ergänzen(+) oder Ergänzen(-) probieren.
17.03.	02	Strat3	Pflichtaufgabe: 598-297. Die Kinder dürfen daran eine Hilfsaufgabe probieren. Bei den Küraufgaben sollen sie die Auswahl einer Strategie überdenken.
21.03.	02	Strat4	Pflichtaufgabe: 465-108. Die Kinder dürfen daran das Vereinfachen probieren. Küraufgaben: Weitere Aufgaben, die sich für das Vereinfachen eignen.
22.03.	02	Strat5	Pflichtaufgaben: Wahlweise 567-256 (als leicht gekennzeichnet) oder 624-256 (als schwieriger gekennzeichnet), die Kinder dürfen Stellenweise probieren.
23.03.	02	Strat6 Foe	*Förderstunde mit 5 Kindern, Ergänzen(+) wird wiederholt.* Aufgaben: 381-297, 315-256, 598-297.
23.03. 24.03. 25.03.	03 03 03	Strat2-1 Strat2-2 Strat2-3	*Päckchen mit Aufgaben, die verschiedene Strategien anregen sollen, die Ergebnisse (344, 322, 455, 122, 233, 211) haben Muster.* Überlege, bevor du rechnest, welche Strategie passt. Begründe! 876 – 532 = 957 – 635 = 722 – 267 = 981 – 859 = 612 – 379 = 609 – 398 = Vergleiche alle Ergebnisse. Was fällt dir auf? *In der 2. und 3. Stunde des Blocks:* Welche Aufgabe ist besonders geeignet für die Rechenstrategie Vereinfachen/ Hilfsaufgabe? Begründe.
29.03. 30.03. 31.03. 01.04.	04	Ueb1 Ueb2 Ueb4 (D) Ueb5 (D)	*Plakat mit BVB-Zahlen und der Rechenvorschrift, für B und V je eine Ziffer von 0-9 zu wählen und BVB-VBV zu rechnen. Forscherprojekt in Gruppenarbeit.* BVB-Zahlen Forscherauftrag 1. Finde Aufgaben mit möglichst großem Ergebnis!

Tag	Block	Stunde	Aufgabenstellung/ *Kommentar*
			2. Finde Aufgaben mit möglichst kleinem Ergebnis! 3. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse hast du gefunden? 4. Wie viele Aufgaben hast du zu den unterschiedlichen Ergebnissen gefunden? 5. Versuche die Ergebnisse zu sortieren. 6. Hast du alle Aufgaben gefunden? Gibt es noch andere? Beschreibe, was dir auffällt!
04.04.	05	Posttest	*Siehe 00-Pretest*
	06	Addition	*08.04. bis 15.04.: Vier Stunden Einführung und Übung der schriftlichen Addition; 18.04. bis 30.04.: Osterferien, 07.05.: Eine Stunde Wiederholung der schriftlichen Addition.*
04.05. 05.05.	07 07	Wdhstrat1 Wdhstrat2	*Wiederholung des subtraktiven Rechnens mit halbschriftlichen Strategien am Beispiel von Rechenketten (558 →____→____→____→54, Fortgesetztes Subtrahieren der Subtraktionszahl).* Startzahl 558, Subtraktionszahl 126, Triffst du die Zielzahl 54? Startzahl 988, Subtraktionszahl 246, Triffst du die Zielzahl 4? Startzahl 869, Subtraktionszahl 217, Triffst du die Zielzahl 1? Startzahl 796, Zielzahl 200, Findest du die Subtraktionszahl? Startzahl 538, Zielzahl 50, Findest du die Subtraktionszahl? *Es soll beim Rechnen immer eine geschickte Strategie gewählt werden.*
06.05.	07	Wdhstrat3	*Päckchen mit „Störung“ (412 statt 410), die es zu finden gilt:* Schönes Päckchen? Rechne jede Aufgabe zweimal. Einmal mit der Strategie Ergänzen(+) und einmal mit einer Strategie deiner Wahl. 306-286= 20 332-281= 51 358-276= 82 384-271=113 412-266=146 436-261=175 *In der Stunde Wdhstrat4 wird Ergänzen stellengerecht angeregt.*
13.05.	08	Schrsub1	*An zwei Dokumenten aus 01-Kino2 und 01-Kino4 wird Ergänzen(+) in der Variante Ergänzen stellengerecht angeregt.* Rechne wie Prisci (Ergänzen +) 405 - 281 = 420 - 276 = 435 - 271 = 450 - 266 = ___ - ___ = ___ - ___ = Setze fort! Finde die nächsten zwei Aufgaben!

Tag	Block	Stunde	Aufgabenstellung/ *Kommentar*
16.05.	08	Schrsub2	*An der Tafel wird zunächst kommentiert parallel die Aufgabe 420-276 mit halbschriftlichem, stellengerechtem Ergänzen und im schriftlichen Algorithmus gerechnet.* Rechne zuerst wie Robin (Ergänzen stellengerecht)! Versuche dann, die gleiche Aufgabe wie Frau […] zu rechnen! 529-276 = Rechne folgende Aufgaben mit beiden Rechenwegen: 758-283, 426-387, 763-265, 657-224
17.05.	08	Schrsub3	*An der Tafel wird zunächst kommentiert parallel die Aufgabe 538-346 mit halbschriftlichem, stellengerechtem Ergänzen und im schriftlichen Algorithmus gerechnet.* Rechne folgende Aufgaben mit beiden Rechenwegen: 683-377, 743-264 Vergleiche die beiden Rechenwege: Gleich ist… Unterschiedlich ist… *Weitere Aufgaben, nur schriftlich zu rechnen:* 756-232, 904-309
18.05.	08	Schrsub4	*Es wird ein mit Hilfe des Tausenderbuches konstruiertes schönes Päckchen vorgestellt: Der Minuend stellt eine Spalte auf der 9. Seite (801-900) dar, dort sind die Zahlen der Spalte 805, 815, ..., 885, 895 entnommen. Der Subtrahend ist mit der 7. Seite (601-700) konstruiert, beginnend unten links mit 691 wird diagonal 1 Kästchen nach rechts und oben zur 682 weitergegangen, dann 673, ..., bis 619, 610.* *Die Kinder haben die Wahl, halbschriftlich und schriftlich oder nur schriftlich zu rechnen.*
26.05. 27.05. 30.05. 31.05.	09 09 09 09	Schrsbueb1 Schrsbueb2 Schrsbueb3 Schrsbueb4	*Übung der schriftlichen Subtraktion – Substanzielle Aufgaben mit Ziffernkarten, hier nur ein Beispiel: 6 Ziffernkarten wählen, schriftliche Subtraktionsaufgaben bilden und rechnen, Fragestellungen: Finde das größtmögliche Ergebnis. Finde das kleinstmögliche Ergebnis. Erkläre.*
09.06. 10.06.	10 10	Algvgl1 Algvgl2(D)	*Es stehen 4 Arbeitsblätter zur Auswahl,* Aufgaben 628-283, 835-418*:* *Vergleich Ergänzen stellengerecht halbschriftlich ↔ Algorithmus* *Vergleich Ergänzen stellengerecht am Rechenstrich ↔ Algorithmus* *Vergleich schriftlich inverses Verfahren ↔ Algorithmus* *Computersubtraktion*
28.06.	11	Zzstart1(D)	*Arbeitsteilige Gruppenarbeit zur Aufgabe* 726-347*, die mit den 6 bekannten halbschriftlichen Strategien gerechnet werden soll.* *Die Lehrerin führt die Klammernotation der Zwischenergebnisse des Kopfrechenweges zu jeder halbschriftlichen Rechnung ein.* *Die Kinder sollen* 624-492 *im Kopf mit Klammernotation rechnen.* *Die Kinder probieren die Klammernotation bei 5 weiteren Rechenwegen.*
01.07.	11	Zzstart2	*Die ICE-Aufgabe (Aufgabenpool) wird präsentiert. Die Kinder sollen bei jeder Aufgabe vorher überlegen und geschickt rechnen (halbschriftlich, schriftlich, oder im Kopf mit Klammernotation):* Der ICE hat (724, 698, 667, 565, 481, 415) Sitzplätze. (397, 356, 208) Fahrgäste (sind schon an Bord, steigen aus). Wähle Aufgaben und rechne halbschriftlich, schriftlich oder im Kopf. Schreibe bei den ersten drei Aufgaben dazu, warum du wie gerechnet hast: Ich habe ___ gerechnet, weil ___.
04.07.	12	Retention	*Siehe 00-Posttest*

3.4 Dokumentation und Auswertungsmethodik

In diesem Kapitel wird zunächst die Dokumentationsmethodik der Studie in Kap. 3.4.1 dargelegt, bevor anschließend die Auswertungsmethodik in Kap. 3.4.2 erläutert wird, die mit der Komplexität der Datenmenge und der daraus reduzierenden Problematik der Datenreduktion zu kämpfen hatte, die mit einer eigens dazu erstellten Software bewältigt wurde.

3.4.1 Dokumentation

Zur Dokumentation der im Kapitel zuvor beschriebenen 35 Unterrichtsstunden wurde die schriftliche Zustimmung der Erziehungsberechtigten eingeholt. Es wurde vereinbart, dass nur der Vorname des Kindes genannt wird, bei mehrfach in der Klasse auftretenden Vornamen zusätzlich Anfangsbuchstaben des Nachnamens, darüber hinaus wurde zugesichert, lediglich den Ort der Schule mit „eine Grundschule in Dortmund“ anzugeben, und auch auf die Nennung des Namens der Klassenlehrerin zu verzichten.

Alle 35 Stunden wurden komplett und vollständig mit einer hochauflösenden Digitalvideokamera aufgezeichnet, die in einer Ecke des Klassenraums aufgestellt wurde, und ggf. manuell auf ausgewählte Unterrichtsaktivitäten eingestellt wurde (z.B. Gespräche an der Tafel, Gruppenarbeitssituationen), wenn sie nicht die Totale der Klasse im Blick hatte. Die Lehrerin bekam ein Ansteck-Funkmikrofon, um selbst leise gesprochene Interaktionen während individueller Beratung in Arbeitsphasen dokumentieren zu können. Zusätzlich wurde ein empfindliches Kondensatormikrofon mit Kugelcharakteristik im Klassenraum installiert, das monaural die Gesamtsphäre einfing. Der Empfänger des Funkmikrofones und das Kondensatormikrofon wurden mit einem Y-Kabel an die Videokamera angeschlossen, und je eines der Tonsignale auf einer der beiden Stereospuren aufgezeichnet.

Zusätzlich zur Technik zur Videographie befand sich in der Klasse ein Laptop mit Scanner, mit dem am Ende jeder Unterrichtsstunde der Klassensatz der bearbeiteten Dokumente (es wurde zumeist auf blanko Karopapier gearbeitet) schnell hochauflösend eingescannt und stundenweise in Ordnern abgespeichert werden konnte; die Originale bekam dann die Lehrerin zur Durchsicht, am folgenden Tag hefteten die Schüler diese in ihrem Lerntagebuch ab. Darüber hinaus lag ein Digitalfotoapparat bereit, um z.B. Tafelbilder sichern zu können, zusätzlich lag eine Schreibunterlage bereit, um bereits während des Unterrichts Notizen machen zu können. Wurden Fotos und Notizen gemacht, wurden diese ebenfalls digital in den Stundenordnern mit gespeichert.

Im Verlauf des Schulhalbjahres wurden folgende Urdaten erhoben:

- 35 voll (bis auf einzelne durch technische Aussetzer verlorengegangene Abschnitte) videographierte Stunden in 93 Videodateien von 117 Gigabyte Gesamtdateigröße.

- 1410 Scans (eine Din-A4-Seite pro Scan) und Fotos mit 3,94 Gigabyte Gesamtdateigröße, die direkt auf 1248 Dateien reduziert wurden, da Doppelaufzeichnungen durch Belichtungsstörungen der Kamera oder durch fehlerhaft im Scanner eingelegte Arbeitsblätter aussortiert wurden.
- Die verbliebenen 1248 Dateien teilen sich auf in
  - 856 Scans von Schülerdokumenten,
  - 45 Scans von Notizen,
  - 347 Fotos.

3.4.2 Auswertungsmethodik

Im Folgenden wird zunächst auf die Art der softwaregestützten Dokumentation und Auswertung eingegangen, bevor das zur Datenreduktion benutzte Kategoriensystem sowie die qualitative Interpretation der Unterrichtsinhalte vorgestellt werden.

Softwaregestützte Dokumentation und Auswertung

Bereits während der Dokumentation des Unterrichts zeigte sich, dass diese umfangreiche Datenmenge schnell nicht mehr strukturierbar war, zum Beispiel, als gegen Ende der Unterrichtseinheiten Dokumente aus den Stunden des Beginns der Arbeit gesucht wurden, die an der Tafel präsentiert und wieder aufgegriffen werden sollten. Darum wurde noch während der Dokumentation des Unterrichts mit der Programmierung einer Software begonnen, mit deren Hilfe zunächst die Dokumentation strukturiert, und anschließend die Daten reduziert und analysiert werden sollten. Dabei wuchs die Software in ihren Funktionen parallel mit den an sie gestellten Anforderungen. Eine vollständige Darstellung der Grundideen und der technischen Realisierung der Software, die sich prinzipiell auch zur Dokumentation und Auswertung anderer Langzeitstudien eignet, kann an dieser Stelle aus Platzgründen nicht gegeben werden, und bleibt einer eigenen Publikation vorbehalten (Schwätzer, 2014). An dieser Stelle werden nun kurz zentrale Funktionen und ihre auswertungsmethodologische Implikation vorgestellt:

- Die Software *5-Z Viewer* wurde auf einem Webserver programmiert, um verteiltes Arbeiten via Internet möglich zu machen (Screenshot in Abbildung 3.4 auf S. 99).
- Grundidee ist eine Matrixdarstellung der Dokumente in tabellarischer Form, in der sich zeilenweise die Dokumente eines Kindes aller Stunden und spaltenweise die Dokumente einer Stunde aller Kinder befinden, um eine übersichtliche Darstellung der vollständigen Unterrichtssituation zu ermöglichen.

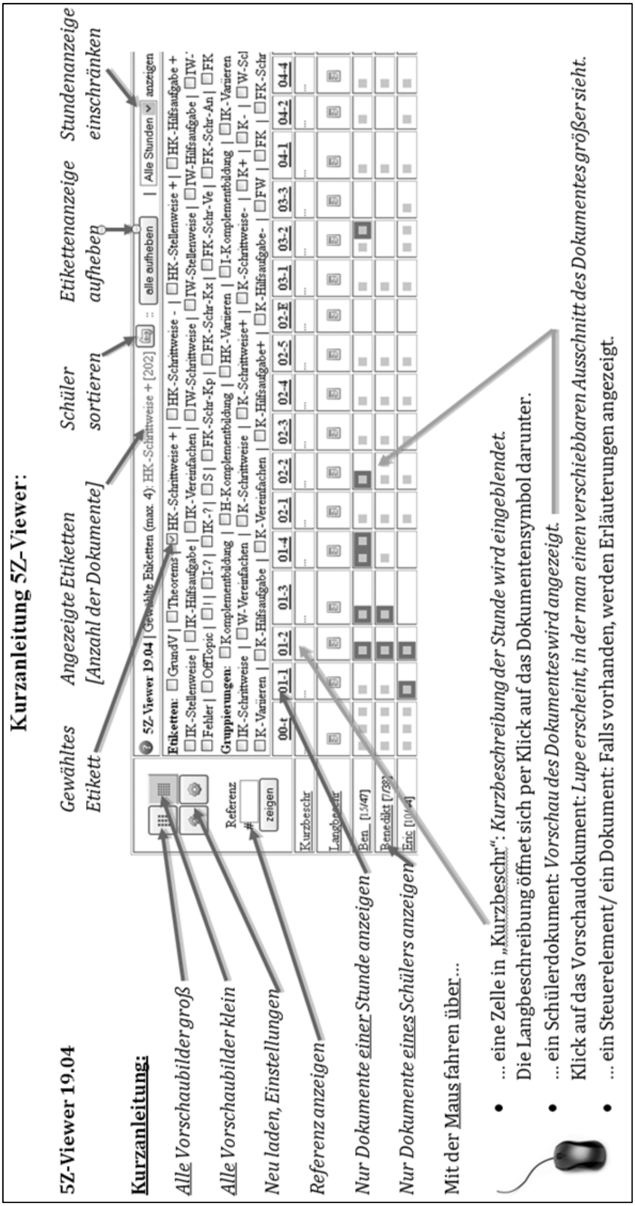


Abbildung 3.4: Screenshot der Software *5Z-Viewer* in der bei Drucklegung aktuellen Version 19.04 inklusive der dort verfügbaren Kurzanleitung

- Der Import neuer Dokumente wurde einfach gestaltet und erfolgte direkt im Anschluss an das Scannen nach den Unterrichtsstunden, so dass ein Rückgriff auf Dokumente (vgl. *daily microcycles* nach Gravemeijer in Kap. 3.2.1) sofort (nach Erstellung dieser Funktion) möglich war.
- Zum schnellen Auffinden von Dokumenten lässt sich eine Gesamtdarstellung aller Dokumente darstellen, die per *mouseover* Funktion eine Vorschau und per *mouseclick* eine Vergrößerung des Dokumentes erzeugt. Zusätzlich lassen sich einzelne Zeilen – also Dokumente eines Schülers – und einzelne Spalten – also Dokumente einer Stunde – mit einer vergrößerten Ansicht auswählen.
- Auf der Grundlage der Notizen wurde zu jeder Unterrichtsstunde direkt nach der Durchführung eine Kurzbeschreibung (mit den basalen Fakten, wie Datum, Schulstunde, Thema, Aufgabenstellung, und als erste grobe Reduktion die skizzierten Inhalte der Einführungs-, Erarbeitungs- und Reflexionsphasen) dieser angelegt, die ebenfalls in der Matrixdarstellung integriert ist, und einfach abgerufen werden kann. Damit ist ein schneller Überblick über Unterrichtsinhalte möglich.
- Zusätzlich wurden Langbeschreibungen der Stunden angelegt, für die eigens ein Editor programmiert wurde:
  - Eine solche Langbeschreibung enthält Datum, Schulstunde und Thema der Unterrichtsstunde, sowie einen Hinweis auf die zuzuordnenden Videodateien.
  - Im Kopf der Langbeschreibungen sind jeweils die lokalen Instruktionstheorien (vgl. Kap. 3.2.1) der Stunden beschrieben, also didaktische Hintergründe der Aufgabenstellungen, Implikationen aus Vorstunden, antizipierte Lernziele, etc. Diese lokalen Instruktionstheorien entstanden in den *daily microcycles* gemeinschaftlich durch die Lehrerin und dem Autor dieser Studie nach jeder Unterrichtsstunde, und werden somit dokumentiert und auswertbar gemacht.
  - Dann erfolgt eine Darstellung der einzelnen Lernsituationen, in der Regel als qualitatives Transkript, das aus den einzelnen Videodateien gewonnen wurde. Qualitatives Transkript bedeutet, dass Sender und Empfänger und deren verständliche Sprache, (Beobachtung und Vermutungen) [und Auslassungen] und … Unterbrechungen… notiert werden, eine Interaktionszeile pro Interaktionszug. Auf die Feinkodierung von Betonungen, Sprachpausen etc. wurde verzichtet. Aus der Software lassen sich Transkriptteile direkt in die Textverarbeitung einfügen. Mit der Transkribierung wird der Unterricht auch ohne die Veröffentlichung von Videos nachvollziehbar. Ein fiktives Beispiel für die Elemente der Transkriptkodierung und der

in dieser Arbeit gewählten Druckform, L steht für Lehrerin, ist folgendes Beispiel:

Transkript Nr., Stundennr., Partnr., Zeit, Phase, verknüpfte Abbildung	
001	(L hängt den Rechenweg von Eric an die Tafel)
002	Lasse → L: Darf ich bitte den [unverständlich], wenn wir …
003	L → Lasse: Nein (winkt ab), da sprechen wir später drüber.

- Einige Stunden wurden voll transkribiert, einige in Ausschnitten, die im weitesten Sinne für die Themenstellung dieser Arbeit von Interesse sein konnten. Nicht transkribierte Teile wurden kommentiert. Die einzelnen Transkriptteile beziehen sich auf einzelne Interaktionsabschnitte, jeweilige Medien wie zum Beispiel das gerade von Lehrerin und Schüler besprochenen Arbeitsblatt sind direkt mit den Zeilen verknüpft und darstellbar.

- In der Software wurde ein System zur Kodierung von Dokumenten implementiert, Dokumente können dazu mit einem oder mehreren Etiketten versehen werden, Etiketten können beliebig erstellt werden. Beispiel: Ein Dokument enthält eine Rechnung am Rechenstrich, und eine Rechnung, in der ein Fehler erkennbar ist, dann bekommt es diese beiden Etiketten. Die Etikettkategorien dieser Studie und ihre auswertungsmethodologische Implikation werden weiter unten noch detailliert dargestellt.
- Zusätzlich wurde in der Software ein Tool zur Auswertung der Etikettierung implementiert, das sowohl einzelne Etiketten (z.B. alle Dokumente, auf denen mindestens eine Rechnung am Rechenstrich ausgeführt ist) oder Etikettengruppen (z.B. alle Dokumente mit einem oder mehreren Etiketten, die zur Gruppe Kopfrechnen zusammengefasst wurden) darstellen kann, davon bis zu vier Auswahlen parallel. Die Software gibt dabei auch die Anzahl der etikettierten Dokumente und kinderbezogen deren relative Häufigkeit (Anzahl der Dokumente mit diesem Etikett bezogen auf die Anzahl der Dokumente, die das entsprechende Kind insgesamt produziert hat). Die Kinderzeilen, die standardmäßig alphabetisch sortiert sind, können nach dieser relativen Häufigkeit angeordnet werden. Zum einen bietet die Anzeige etikettierter Dokumente die Möglichkeit, schnell Schülerdokumente mit bestimmten Inhalten ausfindig zu machen; zum anderen lassen sich an der Verteilung der Etikettierung und der relativen wie absoluten Häufigkeit qualitative Aussagen über deren Stellenwert im Unterricht der Studie machen.
- Bei der Auswertung der Daten wurde es wichtig, die Anzeige der Etikettierung auf ausgewählte Stunden einschränken zu können. Darum erhielt die Software eine Zusatzfunktion, mit der sich nur ausgewählte Stunden

darstellen lassen, zum Beispiel nur die drei Lernstanderhebungen, die Zuordnung der Stunden ist im Anhang dokumentiert.

- Das letzte Feature der Software, das hier vorgestellt wird, ist die Möglichkeit, aus der Matrixdarstellung von Etikettierungen direkt eine schwarz-weiß Variante zu erzeugen, die es ermöglicht, diese direkt in eine Textverarbeitung zu importieren.

Weitere, bereits implementierte, oder angedachte Funktionen der Software, sowie weitere Verwendungssituationen können hier aus Platzgründen nicht dargestellt werden.

→ Eine Grundidee der Software ist es, mit ihr die nach Gravemeijer erforderliche *thick description* zu erzeugen, diese bei Bedarf einsehbar zu machen, und somit auch den Forschungsprozess revidierbar zu gestalten. Unter einer (um die Persönlichkeitsrechte aller Beteiligten zu wahren) passwortgeschützten Internetadresse ist dieses System zugänglich, die Zugangsdaten werden auf Anfrage vom Verfasser dieser Studie bereitgestellt.

Strukturbäume für mentale Arithmetik

In Kap. 2.2.2 wurde beschrieben, dass Kategorien für Strategien der halbschriftlichen Subtraktion durchaus unterschiedlich festgelegt werden können. Um eine Einordnung der Dokumente in Strategiekategorien und deren Auswertung vornehmen zu können, musste eine entsprechende Etikettierungsstruktur für die Software erstellt werden. Dazu wurden zunächst Strukturbäume für mentale Arithmetik (Klammerbegriff für aufgeschriebenes oder internalisiertes strategisches Rechnen, vgl. Kap. 2.2.1) entwickelt.

Begonnen wurde dabei mit den ebenfalls in Kap. 2.2.2 dargestellten derzeit in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik üblichen fünf Strategiekategorien der Subtraktion. Diese lassen sich in einem Strukturbaum abbilden, wenn die Wahl der Rechenart noch hinzugezogen wird, der in Abbildung 3.5 (S. 103, *Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ I*) dargestellt ist. Wollte man einen Rechenweg etikettieren, könnte man zunächst fünffach unterscheiden, welcher Strategiekategorie dieser zuzuordnen wäre, anschließend zweifach entscheiden, welche Rechenart vorliegt. Nach diesem Strategiekategoriensystem gäbe es hier 5·2=10 Entscheidungsmöglichkeiten (5 Strategien, 2 Rechenarten), die als Auswahlmöglichkeiten in der Baumstruktur dargestellt sind. Die Reihenfolge der Entscheidung, dass zunächst eine Zuordnung der Strategiekategorie, dann der Rechenart erfolgt, spielt dabei eigentlich keine Rolle, ist an dieser Stelle willkürlich, aber antizipierend, dass möglicherweise auch bei Kindern in dieser Reihenfolge entschieden werden könnte.

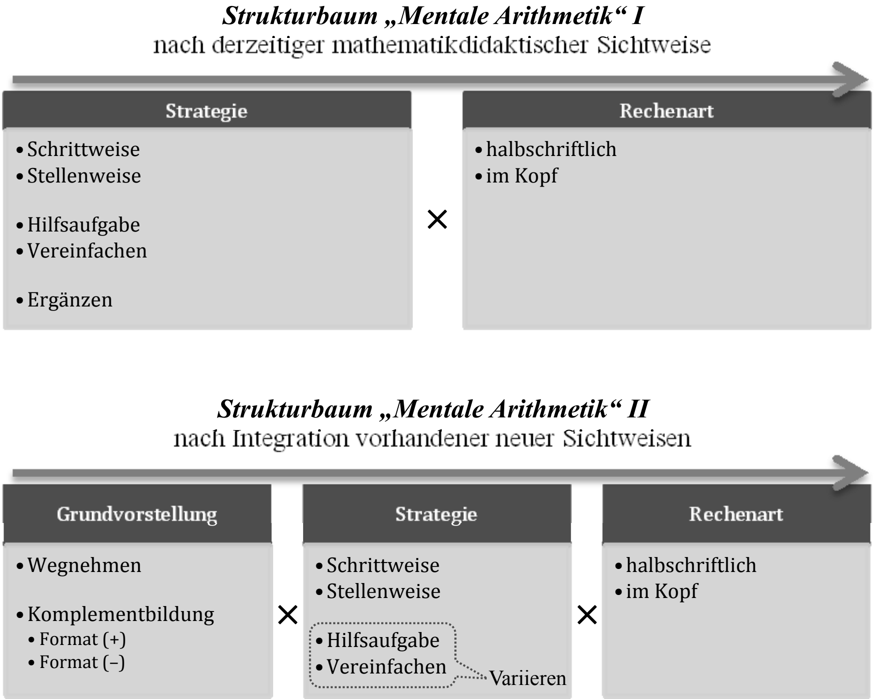


Abbildung 3.5: Strukturbäume „Mentale Arithmetik“ I und II

Allerdings wurde für diese Studie ein anderes Kategoriensystem erarbeitet: Aus dem in Kap. 2.2.2 (vgl. Tabelle 2.4, S. 43) neu aufgestellten zweidimensionalen Kategoriensystem für subtraktive Strategien wurde aus der vorbeschriebenen Struktur der *Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II* (ebenfalls Abbildung 3.5, oben) entwickelt. Hier wurde die Zweidimensionalität der Strategiekategorisierung berücksichtig, indem die Strategie Ergänzen gestrichen und stattdessen als zusätzlicher Entscheidungsblock die Einordnung in die Grundvorstellungen vorangestellt wurde. Die Grundvorstellung Komplementbildung ist hier zusätzlich in die beiden möglichen Formate differenziert. Demnach ergäben sich hier 3·4·2=24 Entscheidungsmöglichkeiten, eine Rechnung oder ein Dokument in diesen Strukturbaum einzuordnen (2 Grundvorstellungen, eine davon in 2 Varianten, 4 Strategievariante, und 2 Rechenarten). Für sich betrachtet ergeben die ersten beiden Blöcke die 12 Varianten aus Tabelle 2.4 (S. 43). Auch hier wäre die Reihenfolge der Entscheidungsfindung, also die Reihenfolge der drei Kriterienblöcke, theoretisch beliebig, die vorliegende Abfolge damit willkürlich, sie erfolgt aber ebenfalls eine mögliche Entscheidungsreihenfolge von Kindern antizipierend.

Mit dem *Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II* ist somit das in Kap. 2.2.2 definierte zweidimensionale Strategiekategoriensystem um die Rechenarten erweitert und in eine kompakte, strukturierte Darstellung übertragen worden. Die Struktur der mentalen Arithmetik wäre demnach eigentlich dreidimensional, über die 12 Varianten aus Tabelle 2.4 (S. 43) könnte man sich eine zweite „Schicht“ 12 ebensolcher Rechenwege vorstellen, die internalisiert ausgeführt werden.

Eine weitere Differenzierung innerhalb dieses Strukturbaumes wäre möglich gewesen, etwa eine Subunterscheidung der halbschriftlichen Notationsformen (informell, standardnotiert, oder am Rechenstrich), der Zerlegungen von Minuend, Subtrahend oder Komplement (Stichworte „zu glatten Zahlen gehen“ oder „mit glatten Zahlen rechnen“), oder weiterer Details. Da diese für die Forschungsinteressen dann doch von untergeordneter Bedeutung waren, wurde zu Gunsten der Komplexitätsveringerung im Strukturbaum hierauf verzichtet.

Etikettierungssystem der Software

Die konkrete Kodierung der Dokumente erfolgte mit dem Etikettierungssystem der Software, dargestellt in Tabelle 3.3 (S. 105). Sobald mindestens eine Rechnung auf einem Dokument in die Kategorie des Etiketts passte, wurde dieses Etikett markiert. Die Etiketten teilen sich dabei auf in Zuordnungen zu Rechenarten, Strategiekategorien, Fehlerkategorien, und zusätzliche Aspekte.

Halbschriftliche Strategiekategorien wurden direkt nach dem *Strukturbaum für mentale Arithmetik II* (s.o.) vorgenommen, um hier das tatsächliche Auftreten von den theoretisch 24 möglichen Strategieformen evaluieren zu können. Schriftliche Rechnungen wurden unterschieden in Standard- und Alternativ-Algorithmen.

Um auch Aussagen zur Effizienz des komplementbildenden Rechnens nachspüren zu können, wurden auch Dokumente mit mindestens einer Rechnung, die einen Fehler enthielt, zunächst allgemein mit *Fehler* etikettiert. Später wurde das Fehlerkategoriensystem nach einer Revision der Fehlermuster emergent aus der Studie heraus erweitert, um qualitative Aussagen über die Art der Fehler machen zu können (s.u.). Schließlich wurden noch zur Analyse weiterer Aspekte die Etiketten *stellengerecht* und *Rechenstrich* ergänzt.

Generell dürfen bei der Auswertung dann aber Etikettenarten nicht logisch verknüpft werden, wenn etwa ein Dokument das Etikett *Rechenstrich* und das Etikett *HK-Schrittweise +* enthält, bedeutet dies nicht, dass es genau eine Rechnung in HK-Schrittweise + am Rechenstrich gibt.

Tabelle 3.3: Etikettensystem zur Kategoriekodierung von Rechenwegen.

Etiketten	Bedeutungen
HK-Schrittweise + *HK-Schrittweise -* *HK-Stellenweise +* *HK-Hilfsaufgabe +* *HK-Hilfsaufgabe -* *HK-Vereinfachen +* *HW-Schrittweise* *HW-Stellenweise* *HW-Hilfsaufgabe* *HW-Vereinfachen* *IK-Schrittweise +* *IK-Schrittweise -* *IK-Stellenweise* *IK-Hilfsaufgabe* *IK-Vereinfachen* *IW-Schrittweise* *IW-Stellenweise* *IW-Hilfsaufgabe* *IW-Vereinfachen* *I-?* *IK-?*	*H*: Halbschriftliche strategische Rechnung *I*: internalisierte strategische Rechnung *K*: Grundvorstellung Komplementbildung *W*: Grundvorstellung Wegnehmen + und -: im Additions- bzw. Subtraktionsformat Von den 24 theoretisch möglichen Strategievarianten wurden nur jene 19 kodiert, die auch in den Dokumenten auftraten. Fehlt bei K-Etiketten das + oder das -, dann handelt es sich um additive Komplementbildung. Als halbschriftlich wurde eine Rechnung kodiert, wenn sie erkennbar im Format halbschriftlicher Rechnungen stand, also wenn durch einen Strich eine Nebenrechnung vom Ansatz getrennt wurde. Als internalisiert wurde eine Rechnung gekennzeichnet, wenn eben keine Rechenschritte in halbschriftlicher Form erkennbar waren, sondern ggf. nur ein Ergebnis notiert wurde (dann mit dem Etikett *I-?*). Eine Rechnung wurde als Komplementbildung kodiert, wenn dies im Ansatz entweder der Nebenrechnung oder direkt der Rechnung erkennbar war (Notationsformen mit Lücke, wie 624-___=234). Wenn hier keine weiteren Nebenrechnungsschritte erfolgten, wurde vermutet, dass die Rechnung internalisiert erfolgte, und diese mit *IK-?* kodiert. Zum Teil erschließen sich einige Kodierungen nicht direkt aus dem Dokument, sondern aus der begleitenden Interaktionen, wenn etwa internalisiert gerechnet, aber der Lehrerin die Schritte mitgeteilt wurden. Des Weiteren ließen sich internalisierte Rechnungen dann Strategievarianten zuordnen, wenn diese mit der eigens dazu eingeführten Klammernotation ausgeführt wurden.
Rechenstrich *Stellengerecht*	Weitere Aspekte: Lag auf einem Dokument mindestens eine *Rechnung* am Rechenstrich vor, so wurde Rechenstrich kodiert, unabhängig von der Grundvorstellung oder der Strategie. *Stellengerecht* wurde kodiert, wenn mindestens eine Rechnung des Dokuments in der Variante HK-Schrittweise + mit stellengerechter Erzeugung des Minuenden (vgl. Tabelle 2.8, S. 65) vorlag, auch in Teil- oder Vorformen hieraus (z.B. bei abweichender Reihenfolge oder nur Teilstellenherstellung).
Std-A *Alt-A*	Wenn erkennbar der Algorithmus der additiven Komplementbildung mit Überschreitung (vgl. Tabelle 2.7, S. 63) vorlag, wurde *Std-A* kodiert, alle weiteren algorithmischen Formen mit *Alt-A*.

Etiketten	**Bedeutungen**
Fehler *FK-Schr-Kp* *FK-Schr-Kx* *FK-Schr-Ve* *FK-Schr-An* *FK-Hi-R* *FK-Hi-Kp* *FK-Hi-Ve* *FK-Ver-Kp* *FW-Hi-R* *FW-Ver-R* *FW-Hi-An* *FW-Ver-An* *FW-An-An* *FK-Hi-An* *FS*	Kodierung der Fehler in den einzelnen Rechnungen. Zunächst wurde nur allgemein *Fehler* kodiert, später umkodiert in eine differenziertere Fehleranalyse. Dabei bedeuten F=Fehler… S: … beim schriftlichen Rechnen (nicht weiter differenziert), K: …in der Grundvorstellung Komplementbildung… W: …in der Grundvorstellung Wegnehmen… Schr: …bei einer schrittweisen Strategie, … Hi: …bei einer Hilfsaufgaben-Strategie, … Ver: …bei einer Vereinfachen-Strategie, … Kp: Kopfrechen-Fehler (beim Rechnen im Kopf trat ein Rechenfehler auf, z.B. wenn mehrere Stellenwerte verarbeitet werden müssen, ein Stellenwert aber ausgelassen wird) Kx: Komplexitäts-Fehler: Aufgrund langer Rechenprozesse wurden einzelne Teilschritte beim Rechnen (oder in der Abschlussbilanz) vergessen, sonst wird aber richtig gerechnet. Ve: Verwechslungs-Fehler: Ziffern oder Rechenzeichen werden beim Schreiben oder Lesen vertauscht, oder bei unsauberer eigener Schrift wird sich verlesen und falsche Ziffern werden übertragen, oder es werden andere Zahlen aufgeschrieben als die nötigen – z.B. die letzte Rechenzahl an Stelle des Ergebnisses) R: Rechengesetz-Fehler: Gesetz der Konstanz der Differenz wird nicht beachtet, zumeist falsche Bilanzierung der einzelnen Rechenschritte. An: Anderer Fehler: Passt nicht in die vorgenannten Kategorien oder ist nicht rational erklärbar (könnte z.B. beim fehlerhaften Abschreiben vom Nachbarn entstanden sein).

Um zusammenfassende Analysen zu ermöglichen, wurden später einzelne Etiketten zu Etikettengruppen (Verknüpfung: inklusives Oder) zusammengefasst. An dieser Stelle können aus Platzgründen nicht alle Etikettengruppen in ihren Bestandteilen dargestellt werden, stattdessen wird an einzelnen Gruppen das Prinzip erläutert (die vollständige Gruppenzuordnung ist über den *5Z-Viewer*, s.o., einsehbar). In der Gruppe *Komplementbildung* befinden sich z.B. dann alle 12 Etiketten aus Tabelle 3.3 (S. 105) zur Strategiekodierung, die ein *K* enthalten, die Gruppe *K-Schrittweise* + enthält die 2 dieser *K*-Etiketten, die *Schrittweise* + enthalten (*HK-Schrittweise* + und *IK-Schrittweise* +) – und so weiter.

Qualitative Interpretation der Unterrichtsinhalte

Wie bereits in der Softwarebeschreibung und dem Etikettensystem deutlich wurde, erfolgt die Auswertung der Unterrichtsergebnisse zunächst dokumentbezogen. Der Begriff *Dokument* und das Etikettierungssystem der Software beziehen sich immer auf eine vollständig eingescannte Seite eines Schülerdokumentes. Technisch wäre auch eine aufgabenbezogene Auswertung der Dokumente möglich, faktisch aber im Alleingang nicht zu bewältigen gewesen – die bereits jetzt immense Datenmenge von 856 Dokumenten hätte sich auf geschätzt annähernd 10.000 Aufgaben erhöht. Da die Stichprobe von 18 Schülern einer einzigen Klasse ohnehin keine repräsentativen Daten erzeugen kann, sollen auch mit Hilfe der Software erzeugte quantitative Auszählungen nur qualitativ interpretiert werden, so dass eine Auswertung auf Dokumentebene als hinreichend erscheint.

Diese qualitative Deutung quantitativer Auszählungen auf Dokumentebene ist dabei mit einigen Einschränkungen versehen, die für die in Kap. 4 dargestellten Befunde beachtet werden müssen: Eine Etikettierung eines Dokumentes sagt nichts über die Verteilung der Strategien auf dieser Einzelseite des Arbeitsblattes aus. Ein Dokument mit dem Etikett *Rechenstrich* enthält mindestens eine ebensolche Rechnung – dabei kann dies die einzige Rechnung sein, oder es kann sich um eine, zwei oder mehrere Rechenstrich-Rechnungen neben weiteren Rechnungen in anderen Notationsformen auf dem Dokument handeln. Darüber hinaus produzierten die Kinder in den Unterrichtsstunden unterschiedliche viele Rechnungen, die ggf. auf der Rückseite oder auf weiteren Arbeitsblättern fortgeführt wurden, und somit durchaus mehrere Dokumente pro Stunde mit unterschiedlicher Rechnungsanzahl vorliegen können. Quantitative Auszählungen und Verteilungen vermitteln also eher einen qualitativen Eindruck ohne Anspruch auf Präzision.

Zur qualitativen Auswertung quantitativer Befunde gesellt sich dann vor allem die Interpretation der Schülerdokumente im Rahmen des theoretischen Bezugssystems aus Kap. 2, sowie der begleitenden Interaktion, sofern diese vorhanden ist (vgl. hierzu z.B. Jungwirth, Voigt, Steinbring, & Wollring, 2001). Dabei geht es nicht um eine Interaktionsanalyse als solche, sondern diese wird zur ergänzenden Klärung von Dokumentinhalten oder zur Indikation von längerfristigen Lernprozessen interpretiert. Die Dokumentanalyse erfolgt bekennend subjektiv, jedoch theoriegeleitet in der Übernahme möglichst vieler in Kap. 2 angerissener Perspektiven. Darüber hinaus können beide auch theorieemergent sein, wenn sich wiederkehrende Muster abzeichnen, die auf Grund der Theorielage noch nicht vorhersehbar waren.

4 Ergebnisse

Das zentrale Leitinteresse dieser Arbeit wurde in Kap. 3.1 aus den theoretischen Vorüberlegungen herausgearbeitet und in verschiedene Forschungsinteressen gegliedert. Analog zur Struktur der Forschungsinteressen werden im Folgenden Befunde aus der in Kap. 3.3 und Kap. 3.4 eingehend beschriebenen Studie dargestellt, so dass jedem Forschungsinteresse aus Kap. 3.1. hier ein Befunde-Kapitel gegenübersteht.

4.1 Verwendung der Komplementbildung

In Kap. 2.2.3 wurde dargelegt, dass verschiedene Studien ambivalente Aussagen über die Häufigkeit der Nutzung komplementbildender Strategien machen. Einige Studien stellen fest, dass die basalen Strategien des Wegnehmens wesentlich häufiger als die der Komplementbildung zu beobachten seien (unter anderem Blöte u. a., 2000; Klein u. a., 1998; Selter, 2001), andere wiederum berichten von häufiger bzw. häufigerer Komplementbildung (etwa Peltenburg u. a., 2011; Hengartner & Studer, 1999), vor allem, wenn Kontextaufgaben benutzt wurden. Zudem wird berichtet, nach Einführung der schriftlichen Verfahren sänke die Häufigkeit mentaler Arithmetik drastisch (und somit auch indirekt der komplementbildenden Strategien, Rathgeb-Schnierer, 2010; Selter, 2000). Auch die allgemeinen Aussichten auf Erfolg beim Anwenden komplementbildender Strategien werden divergent beschrieben, beispielsweise in den Studien der Leuven-Gruppe (z.B. in Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009; Torbeyns, Ghesquière, u. a., 2009). Auch scheinen nicht alle Kinder gleich häufig und erfolgreich das Komplementbilden anzuwenden: Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel (2008) beispielsweise berichten, wenn überhaupt Komplementbildung angewandt wird, dann eher von den leistungsstarken Kindern. Zudem stellen andere Autoren bei einigen Kindern den erfolgreichen Umgang mit komplementbildendem Rechnen in Frage, etwa bei „Kindern, die Schwierigkeiten haben, operative Beziehungen zu sehen und daher wenig sinnvolle Lösungswege »entdecken«“ (Anf. im Original, Padberg & Benz, 2011, S. 174), denen man besser „frühzeitig“ den Algorithmus beibringe könnte (Radatz u. a., 1999, S. 86).

Um den Stellenwert des komplementbildenden Rechnens im Rahmen des nach fortschreitender Mathematisierung organisierten Unterrichts ergründen zu können, kann also als einer von mehreren Aspekten die Verwendungshäufigkeit der Komplementbildung angesehen werden. Dazu ist es notwendig, diese in Bezug zu den Unterrichtsblöcken zu sehen, und diese nicht nur absolut, sondern auch chronographisch zu ermitteln. Darüber hinaus kann allein die Häufigkeit

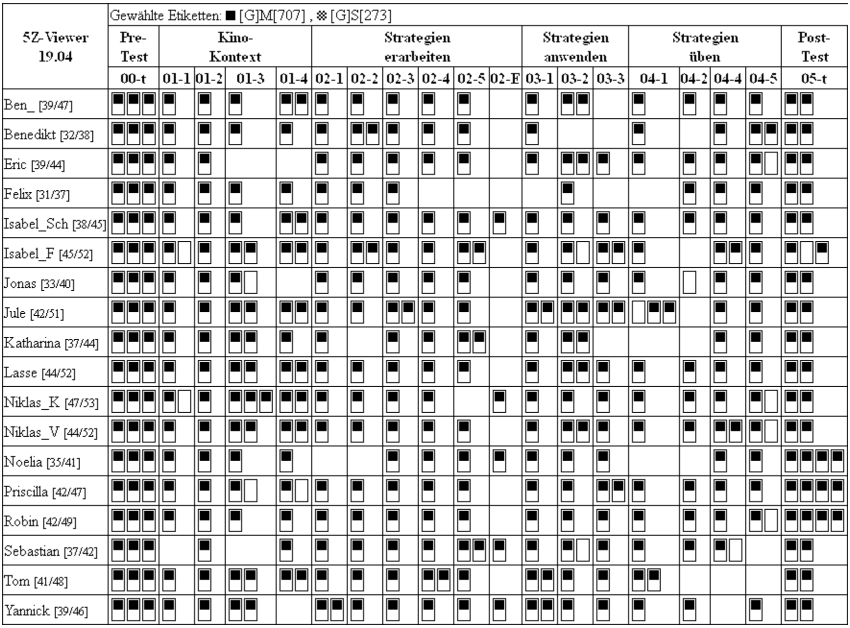
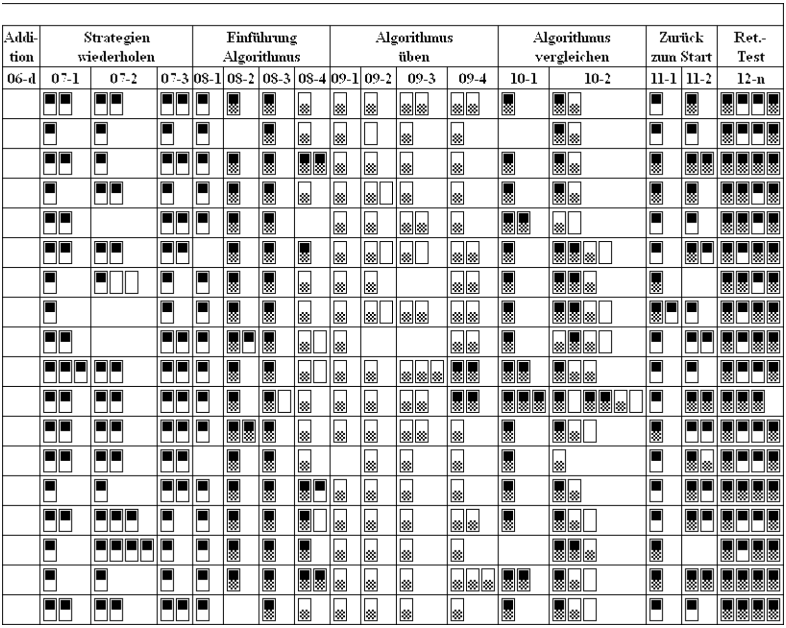


Abbildung 4.1 (beide Seiten): Verteilung Mentale Arithmetik und schriftliches Rechnen

noch von geringer Aussagekraft sein, wenn etwa diese Strategien nicht auch ähnlich erfolgreich wie die des Wegnehmens angewendet werden. Demzufolge werden in diesem Kapitel Befunde zu folgendem Forschungsinteresse vorgestellt:

FI1:
1. *Inwieweit verwenden die Kinder Komplementbildung (zu unterschiedlichen Zeitpunkten) im Unterricht?*
2. *Wenn die Kinder Komplementbildung verwenden: Wie erfolgreich sind sie dabei?*
3. *Gibt es Kinder, die der Komplementbildung eher zusprechen, und solche, die sie eher vermeiden?*

Als Hilfsmittel zur Ergebnisfindung werden schwerpunktmäßig Verteilungsdarstellungen mit Hilfe der in Kap. 3.4.2. vorgestellten Software *5Z-Viewer* herangezogen, ggf. ergänzt durch ausgewählte exemplifizierende Schülerdokumente. Zunächst wird die absolute und chronographische Verwendungshäufigkeit in



Legende: □ = ein Dokument; [G]M, Etikett ■ = Etikettengruppe *Mentale Arithmetik*, enthält mindestens eine solche Rechnung; [G]S, Etikett ▩ = Etikettengruppe *Schriftlich*, enthält mindestens eine Rechnung in algorithmischer Form.

Kap. 4.1.1 eruiert, dann der Nutzungserfolg mit einer Fehlerverteilungsanalyse in Kap. 4.1.2 hinterfragt, und schließlich in Kap. 4.1.3 die schülerbezogenen Häufigkeit komplementbildender Strategien betrachtet. Abschließend erfolgt in Kap. 4.1.4 eine Diskussion der Befunde der vorangehenden Teilkapitel unter Bezugnahme auf den in Kap. 2.2.3 dargelegten Theoriestand.

4.1.1 Verwendungshäufigkeit komplementbildender Strategien

Mit Hilfe der Software *5Z-Viewer* wurden die im Unterrichtsversuch entstandenen Schülerdokumente auf der Grundlage der in Kap. 3.4 manifestierten theoretischen Struktur etikettiert, also Rechnungen auf den Arbeitsblättern Strategiekategorien zugeordnet, die sich nun einzeln oder in Gruppen als Verteilungsdarstellung abrufen lassen. Die Inhalte der Unterrichtsblöcke und -stunden sind in Kap. 3.2.2 und Kap. 3.3 näher beschrieben.

Für eine Eruierung der Verwendungshäufigkeit komplementbildender Strategien ist es zunächst interessant, generell festzustellen, wann und wie häufig die Kinder überhaupt mentale Arithmetik (als Klammerbegriff von allem, was nicht algorithmisch ist, also halbschriftliches und internalisiertes heuristisches

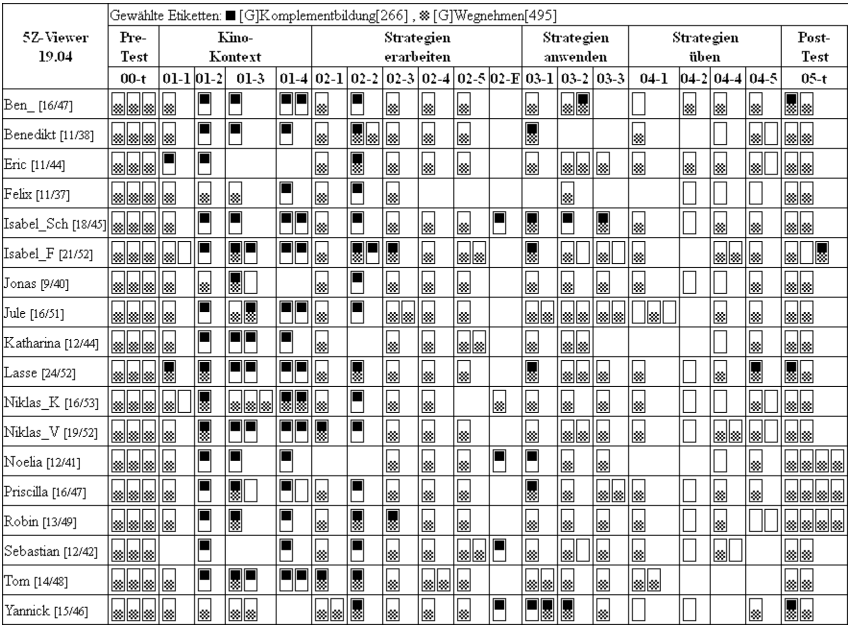
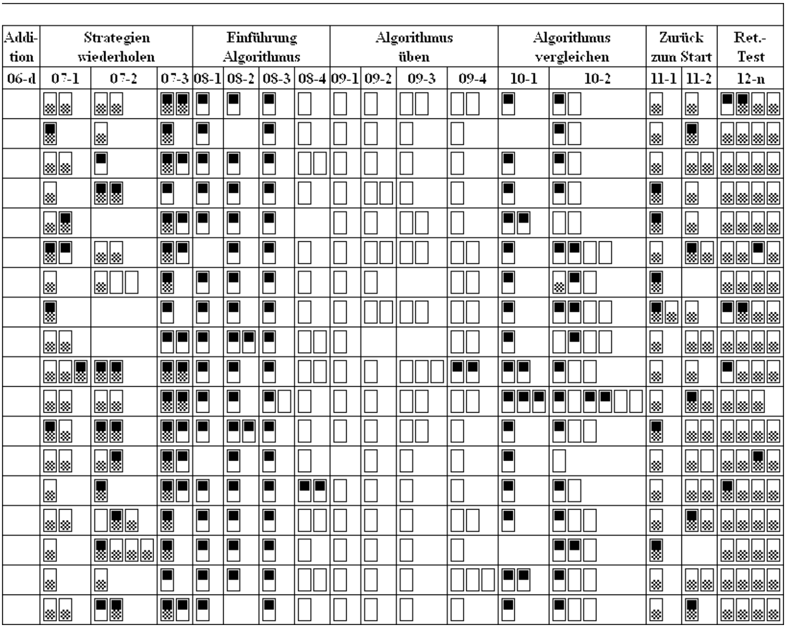


Abbildung 4.2 (beide Seiten): Verteilung Komplementbildung und Wegnehmen

Rechnen zusammenfasst; vgl. Selter u. a. 2012, S. 391) betreiben, und wann sie schriftliche Rechenverfahren nutzen. In Abbildung 4.1 (S. 110) sind dazu alle Dokumente markiert und ausgezählt, die mindestens eine Rechnung in mentaler Arithmetik enthalten, dazu jene, die mindestens eine algorithmische Rechnung enthalten.

Die Abbildung 4.2 (oben) zeigt dann differenzierter, wie sich innerhalb der Dokumente mit mindestens einer Rechnung in mentaler Arithmetik das Auftreten von Strategien in der Grundvorstellung Komplementbildung und in der Grundvorstellung Wegnehmen manifestiert. Dabei zu beobachtende Cluster werden zunächst chronographisch in das Unterrichtsgeschehen eingeordnet, anschließend mit vier Dokumenten bzw. Dokumentausschnitten aus diesen Blöcken unterfüttert, die exemplarisch für die entsprechenden Unterrichtssegmente sind.



Legende: □ = ein Dokument; [G]Komplementbildung, Etikett ■ = Etikettengruppe *Komplementbildung*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellung; [G]Wegnehmen, Etikett ▩ = Etikettengruppe *Wegnehmen*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellung.

Befunde der Verteilung in Abbildung 4.1

In Abbildung 4.1 (S. 110) sind jeweils die Dokumente der Studie markiert, die mindestens eine Rechnung in mentaler Arithmetik oder in schriftlich algorithmischer Form enthalten. Etwa 5/6 der Dokumente (707 von insgesamt 856) enthalten strategisches Rechnen, weniger als 1/3 (273) schriftliche Rechnungen. Zunächst findet subtraktives Rechnen nur in der Form mentaler Arithmetik statt, in gut 2/3 der Stunden (von der 1. bis einschließlich der 23. der 35 Stunden) taucht keine schriftliche Rechnung auf; der Zeitpunkt der Einführung des Algorithmus liegt weit hinten. Nach einer Zeit rein schriftlichen Rechnens tauchen aber im letzten Drittel der Stunden die Rechnungen in mentaler Arithmetik wieder stark auf. Die Unterbrechung durch die schriftlichen Addition und die Osterferien (Spalte 06-d) spielt hier keine Rolle.

Befunde der Verteilung in Abbildung 4.2

In Abbildung 4.2 (S. 112) sind nun Dokumente markiert, die mindestens eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung enthalten (sowohl in der halbschriftlichen Rechenart als auch im Kopf), und jene Dokumente, in denen die Subtraktion wegnehmend erfolgte, also eine Aufschlüsselung der in Abbildung 4.1 dargestellten 707 Dokumente mit mentaler Arithmetik.

Von diesen Dokumenten enthalten 266 Dokumente mindestens eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung, das Wegnehmen tritt mindestens einmal in 495 der Dokumente auf. Es existieren dabei auch Dokumente, in denen Aufgaben in beiden Grundvorstellungen gerechnet werden, die dann zwei Etiketten haben.

Im Pretest (00-t, der „Erstkontakt“ mit der Subtraktion im Tausenderraum) rechnen noch alle Kinder in der Grundvorstellung Wegnehmen, im Einführungsblock 01 (Kino-Kontext) blühen dann aber K-Strategien (im Folgenden: K für Komplementbildung, W für Wegnehmen, S für schriftliches Rechnen) auf. Im Block 02 werden einzelne Standard-Strategien im Sinne von Kategorienbildung thematisiert, in der Regel ist hier die Erprobung einer ausgewählten Strategie in mindestens einer der Rechnungen erbeten, so dass hier komplementbildendes Rechnen fast ausschließlich in der Stunde 02-2 erfolgt, in der Ergänzen (im Unterricht als Begriff summativ für alle K-Strategien gebraucht, lediglich differenziert in die Formate plus und minus) als Strategie thematisiert wird.

In den Blöcken 03 (Strategien anwenden) und 04 (strukturiertes Üben) ist die Wahl der Strategien wieder freigestellt, jedoch können K-Strategien hier nicht mehr die Stärke wie im Einführungsblock erreichen, tauchen aber dennoch immer wieder auf.

Im Block 07 (nach schriftlicher Addition und Osterferien) werden alle Strategien wiederholt, dabei das komplementbildende Rechnen forciert. K-Strategien nehmen nun wieder deutlich zu, bis hin zur reinen Nutzung einer Subform der K-Strategien (im Unterricht „Ergänzen stellengerecht“ genannt), die zur Einführung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus (Block 08) und zur Algorithmusexploration (Block 10) verwendet wird.

Nach einer Phase rein algorithmischen Rechnens (Blöcke 08 und 09, hier daher ohne Etikettierungen) ist ab Block 11 die Wahl zwischen Wegnehmen und Komplementbildung wieder möglich; hier zeigt sich, dass Strategien des Wegnehmens dominieren, aber die Komplementbildung präsent ist und ihren Anteil an den Rechnungen mentaler Arithmetik behält.

Deutung der Befunde zur Häufigkeit komplementbildender Strategien

Diese Befunde sind zunächst unterrichtskonstruktionsbedingt zu interpretieren: Dass dem strategischen Rechnen ein großer Stellenwert zugestanden wird, der Algorithmus erst spät eingeführt wird, liegt der Globalplanung des Unterrichts in dieser Studie bereits zu Grunde. Ebenso gibt es für einige Cluster (Block 02, Block 07 im Übergang zu Block 08, Block 11) Erklärungsansätze, da Strategien hier nur zum Teil frei gewählt werden können, die Lehrerin im Unterricht dagegen die Exploration oder die Exploitation von „Ergänzen“ bei den Kindern erbittet.

Bemerkenswert ist, dass in den Stunden nach Einführung und Übung des Algorithmus, in denen die Rechenart wieder freigestellt wird, das schriftliche Rechnen in dieser Lerngruppe nicht das strategische Rechnen verdrängt, wie es in anderen Studien beobachtet wurde, sondern strategisches Rechnen einen hohen Rang zu behalten scheint.

An der globalen Verteilung auf K-Strategien und W-Strategien kann man erkennen, dass dem Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung im Unterricht ein großer Stellenwert gegeben wird: Von 707 Dokumenten mit mentaler Arithmetik enthalten 266 Dokumente mindestens eine K-Rechnung, 495 mindestens eine W-Rechnung, was einem Dokument-Verhältnis von ca. 1:2 entspricht; hier muss allerdings die im Methodenteil (vgl. Kap. 3.4.2) gemachte Einschränkung der Interpretation nicht rechnungs- sondern dokumentbezogener quantitativer Befunde beachtet werden.

Komplementebildung – differenziert in die Formatvariante Addition und Subtraktion (im Unterricht Ergänzen(+) und Ergänzen(-) genannt) – konkurriert nach der Thematisierung der Standardstrategien mit vier Strategieformen des Wegnehmens (Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe, Vereinfachen), tritt aber in etwa 1/3 der Dokumente mit mentaler Arithmetik auf, alle W-Strategien zusammen gerade etwa doppelt so oft. Allerdings ist diese Verteilung durch nicht immer frei wählbare Strategien gekennzeichnet, so dass hier (siehe Kap. 4.1.3) noch eine genauere Differenzierung erfolgen muss.

Zunächst ist an der Entwicklung der Verteilung interessant, dass zu Beginn (00-Pretest) alle Kinder in der Grundvorstellung Wegnehmen rechnen. Im Block 01 (Kinokontext) kommt es zu einer plötzlichen, aber relativ kurzen Blüte der K-Strategien, deren Auslöser in Kap. 4.1.3 nachgegangen wird. Da nach der Thematisierung der Standardstrategien in Block 02 in den Blöcken 03 und 04 K-Strategien nur spärlich auftreten, müssen neben der Einschränkung durch erbetene Strategien hier auch noch andere Faktoren die Strategiewahl beeinflussen. Dieser Frage wird ebenfalls noch in Kap. 4.1.3 nachgegangen.

Wenn in den letzten Blöcken des Unterrichts den Kindern zur Wahl gestellt wird, schriftlich, halbschriftlich oder im Kopf zu rechnen, und dabei die „passende“ Rechenart und Strategie auszuwählen, ist hier zu konstatieren, dass nicht nur mentale Arithmetik dort, wie bereits angemerkt, ihren Stellenwert behält, sondern darin enthalten auch die K-Strategien nicht aussterben, sondern weiterhin präsent sind.

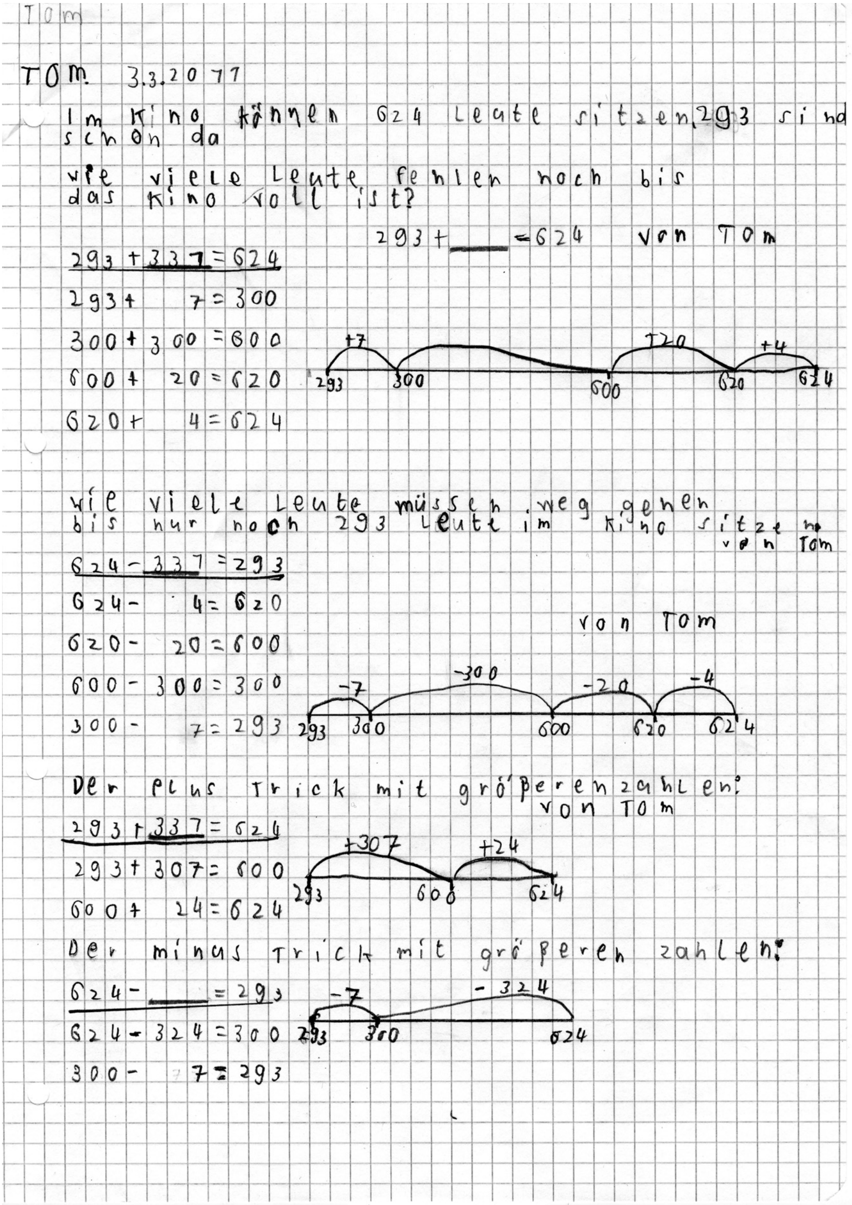
Beispieldokumente aus den Clustern komplementbildender Strategien

Wie vorangehend erläutert, finden sich Cluster komplementbildenden Rechnens vor allem im explorativen Kinoblock 01, in Block 07 (Strategien wiederholen), der in Block 08 (Einführung des schriftlichen Subtraktionsalgorithmus) übergeht, und in Block 11 („Zurück zum Start“). An je einem für dieses Segment exemplarischen Schülerdokument soll nun näher dargestellt werden, wie sich Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung hier realisiert.

Tom (Abbildung 4.3, S. 117, Stunde 01-2) widmet sich auf diesem Dokument – passend zur Aufgabe die Aufgabe „Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da“, die komplementbildendes Rechnen intendieren soll (vgl. Kap. 3.2.2) – ganz dieser Grundvorstellung, und produziert vier Variationen, alle halbschriftlich und von einer Rechenstrichnotation begleitet. Zunächst löst er sie komplementbildend schrittweise im Additionsformat in der Subform „zu glatten Zwischenzahlen kommen“ (ein in dieser Phase häufig zu beobachtendes Vorgehen), um dann die gleiche Aufgabe mit invertierten Schritten in das Subtraktionsformat zu transformieren. Mit den beiden Kommentaren „Wie viele fehlen noch bis das Kino voll ist“ und „Wie viele Leute müssen weg gehen bis nur noch 293 Leute im Kino sitzen“ gibt er dabei je eine passende auffüllende und entleerende Deutung der Komplementbildung im Sinne des Kontextes. Anschließend repetiert er beide Rechnungen in beiden Formaten mit Variationen in der Schritterzeugung (es werden einzelne Teilschritte zu größeren zusammengefasst, was er mit „Der Plus (Minus) Trick mit größeren Zahlen“ umschreibt).

Toms Rechnungen haben dabei erkennbar explorativen Charakter: Noch ist er bemüht, Rechenwege in der Grundvorstellung Komplementbildung zu finden, und ist dabei experimentierfreudig, was Varianten der Schritterzeugung und des Formates angeht. Tom zeigt hier – stellvertretend für viele Dokumente aus dieser Phase – große Kreativität (erfinden oder verändern können von Strategien) im Sinne einer sich entwickelnden adaptiven Expertise, speziell im Bereich der Komplementbildung.

Die Abbildung 4.4 (S. 118) von Benedikt aus dem Block 07, nach den Osterferien wird hier halbschriftliches strategisches Subtrahieren wiederholt, zeigt die Anwendung mehrerer Strategien bei der Lösung der Rechenketten-Aufgabe: W-Stellenweise, W-Schrittweise in der Subform „HZE“, W-Vereinfachen, und zu guter Letzt auch eine Rechnung in K-Schrittweise im Additionsformat, bei Zahlenwerten, die recht nahe beieinander liegen. Benedikt notiert diese Aufgabe mustergültig in der im Unterricht vereinbarten Form: Er schreibt zunächst die Subtraktionsaufgabe auf, dann unter einem die halbschriftliche Nebenrechnung abgrenzenden Strich die Inversion der Aufgabe im Additionsformat, und löst die halbschriftliche Rechnung in 2 Schritten („zu glatten Zwischenzahlen), notiert unter einem weiteren Strich die so benannte Neben-Nebenrechnung, das Aufsummieren der Komplementbildungsschritte, um so die Spanne zwischen Minuend und Subtrahend ermitteln zu können, unterstreicht dort das Ergebnis, und


Tom

TOM 3.3.2011

Im Kino können 624 Leute sitzen 293 sind schon da

wie viele Leute fehlen noch bis das Kino voll ist?

293 + ___ = 624 von Tom

293 + 337 = 624

293 + 7 = 300

300 + 300 = 600

600 + 20 = 620

620 + 4 = 624

+7 +20 +4

293 300 600 620 624

wie viele Leute müssen weg gehen bis nur noch 293 Leute im Kino sitzen von Tom

624 − 337 = 293

624 − 4 = 620

620 − 20 = 600

600 − 300 = 300

300 − 7 = 293

von Tom

−7 −300 −20 −4

293 300 600 620 624

Der plus Trick mit größeren Zahlen: von Tom

293 + 337 = 624

293 + 307 = 600

600 + 24 = 624

+307 +24

293 600 624

Der minus Trick mit größeren Zahlen:

624 − ___ = 293

624 − 324 = 300

300 − 7 = 293

−7 −324

293 300 624

Abbildung 4.3: Tom, Stunde 01-2, Arbeitsphase

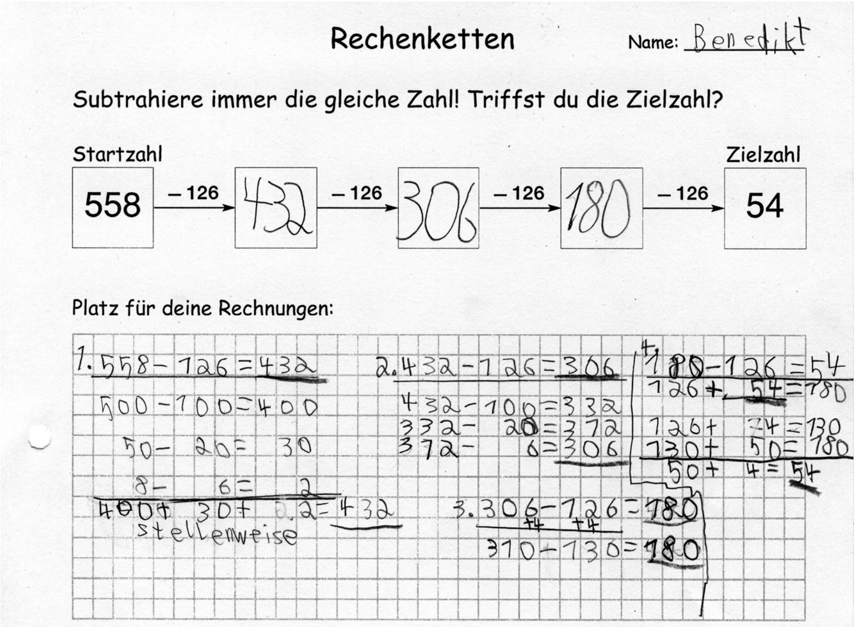


Abbildung 4.4: Benedikt, Stunde 07-1, Arbeitsphase, Ausschnitt

trägt diese zuletzt zweimal oben ein. Benedikts Rechnungen haben nun deutlich konsolidierenden Charakter: er wechselt souverän – wie viele andere Kinder in dieser Phase auch – zwischen verschiedenen der zuvor neu erlernten Strategien, was im Sinne einer sich entwickelnden adaptiven Expertise als Flexibilität angesehen werden könnte.

Katharina (Abbildung 4.5, S. 119) rechnet in Block 08 parallel sowohl halbschriftlich komplementbildend als mit dem schriftlichen Algorithmus, so wie es Inhalt dieser Stunde war, und nutzt die erbetene Strategie „Ergänzen(+) stellengerecht", also eine schrittweise Komplementbildung im Additionsformat in der Variante, zunächst mit der kleinstmöglichen Einer-Addition die Einerziffer des Minuenden herzustellen, dann (eigentlich die Zehnerstelle, die aber hier schon gleich ist) die Hunderterstelle mit der passenden Hunderter-Addition (vgl. hierzu auch Kap. 4.3, dass sich der Idee des Stelle Herstellens widmet), ein Vorgehen, dass dem traditionell *Auffüllen mit Ergänzen* genannten Algorithmus (vgl. Kap. 2.3) , der in der Klasse der Studie eingeführt wurde, sehr nahe kommt – was Katharina auch mit der Pfeilverbindung (die Einer-Addition führt zum Stellenwertübergang (links) bzw. zum Übertrag (rechts) in der Zehnerstelle) kennzeichnet. Katharinas Dokument steht stellvertretend für das in dieser Phase typische Bemühen, Erkenntnisse aus dem halbschriftlichen Komplementbilden

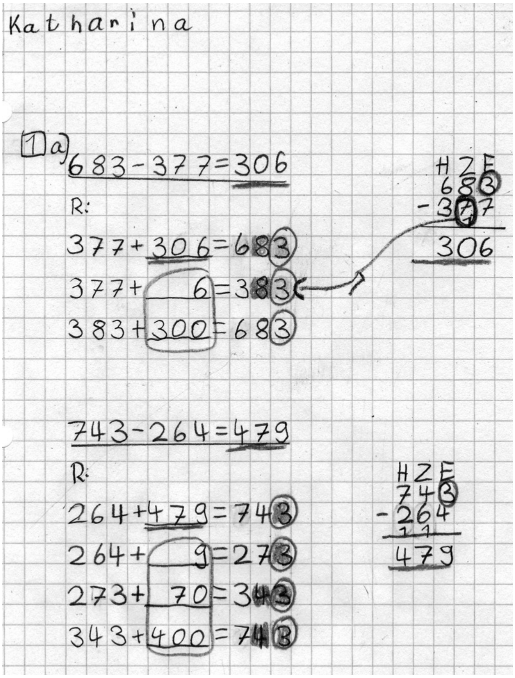
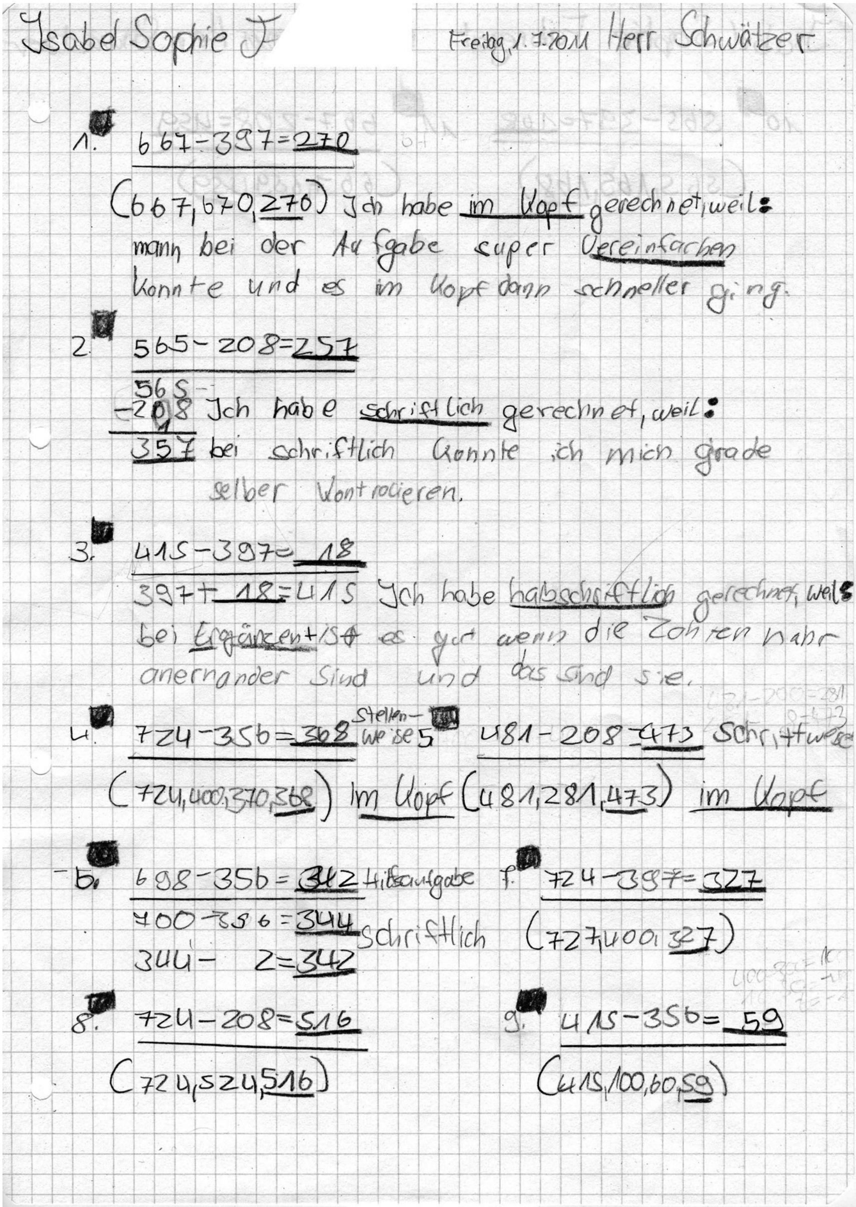


Abbildung 4.5: Katharina, Stunde 08-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

auf das schriftliche Rechnen zu übertragen, hier hat das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung Werkzeugcharakter, dem ebenfalls dieser Grundvorstellung entspringendem Algorithmus Verständnis einzuverleiben

Isabel_F (Abbildung 4.6, S. 120) rechnet am Ende des Unterrichts der Studie im Block 11 (Aufgaben aus dem Aufgabenpool des ICE-Kontexts, vgl. Kap. 3.3) in diversen Varianten subtraktiv, wechselt zwischen schriftlichem (2.), halbschriftlichem (3. und 6.) und internalisiertem strategischem Rechnen (der Rest, auch auf der Rückseite befinden sich noch zwei weitere solche Aufgaben), und innerhalb der mentalen Arithmetik in diversen Strategien: W-Schrittweise (5., 8., 11. auf der Rückseite, wobei 5. einen sogenannten hier als weich etikettierten Perseverationsfehler enthält, vgl. Kap. 3.4.2), W-Stellenweise (2., 4. & 9.), W-Vereinfachen (1. & 7.), W-Hilfsaufgabe (10. auf der Rückseite). Anzumerken ist hier, dass Isabel bei der einzigen K-Rechnung (3.) explizit anmerkt, die kleine Differenz sei der Auslöser des komplementbildenden Rechnens gewesen, aber die ebenfalls noch als kleine Differenz gelten könnenden Spanne in Aufgabe 9 nicht als solche berücksichtigt. Isabels Dokument steht hier stellvertretend für die Virtuosität, mit der die Kinder am Ende des Unterrichts nicht nur flexibel zwischen den Strategien (und darin enthalten auch Strategien der Grundvorstellung Komplementbildung) wechseln, sondern dies bewusst in Passung auf die Aufgabenstellung tun, also Adaptivität im Sinne einer sich entwickelnden adaptiven Expertise zeigen – erweitert auf die Wahl der Rechenart (halbschriftlich oder internalisiert), und auf die Rechenform (mentale Arithmetik versus schriftlicher Algorithmus).



Isabel Sophie F

Freitag, 1.7.2011 Herr Schwätzer

1. 667-397=270

(667,670,270) Ich habe im Kopf gerechnet, weil: mann bei der Aufgabe super Vereinfachen konnte und es im Kopf dann schneller ging.

2. 565-208=257

565-

-208

357 Ich habe schriftlich gerechnet, weil: bei schriftlich konnte ich mich grade selber kontrolieren.

3. 415-397= 18

397+ 18=415 Ich habe halbschriftlich gerechnet, weil: bei Ergänzen ist es gut wenn die Zahlen nahr anernander sind und das sind sie.

4. 724-356=368 Stellenweise

(724,400,370,368) im Kopf

5. 481-208=473 Schrittweise

(481,281,473) im Kopf

6. 698-356=342 Hilfsaufgabe

700-356=344 schriftlich

344- 2=342

7. 724-397=327

(727,400,327)

8. 724-208=516

(724,524,516)

9. 415-356= 59

(415,100,60,59)

Abbildung 4.6: Isabel_F, Stunde 11-2, Arbeitsphase

4.1.2 Erfolgreiche Anwendung komplementbildender Strategien

Um der Frage nach dem relativen Erfolg komplementbildenden Rechnens nachgehen zu können, wurden die Rechnungen auf den Dokumenten nicht nur Strategiekategorien zugeordnet, sondern auch mit einem Fehler-Kategorie-System etikettiert (vgl. Kap. 3.4.2). Diese Etikettierung kann nun dazu dienen, zu ergründen, wie sich der Erfolg der Kinder beim strategischen Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung darstellt, der sich nur dann relativ bewerten lässt, wenn er mit dem in der Grundvorstellung Wegnehmen verglichen wird. Zusätzlich wird auch der Erfolg beim schriftlichen Rechnen mit einbezogen, da (wie weiter oben dargestellt, vgl. Kap. 4.1) einige Autoren vorschlagen, schwachen Kindern frühzeitig den schriftlichen Algorithmus beizubringen. Um über die Qualität der Fehler Aussagen machen zu können, wird im Fehler-Kategorie-System zwischen harten (auf Fehlvorstellungen oder Verständnisproblemen beruhend, vgl. Kap. 3.4.2) und weichen Fehlern (Kopfrechen-, Komplexitäts-, Verwechslungs-Fehler oder nicht erklärbar, vgl. ebd.) unterschieden.

Die Abbildung 4.7 (S. 122) zeigt daher die Gesamtverteilung aller Dokumente mit mindestens einer fehlerhaften Darstellung, zusätzlich (inkludierende Darstellung) aufgefächert in Dokumente mit mindestens einem K-, W- und S-Fehler.

In Abbildung 4.8 (S. 124) sind alle Dokumente, auf denen mindestens ein harter Fehler in mentaler Arithmetik auftritt, aufgeschlüsselt in die drei Strategien, bei denen diese harten Fehler überhaupt auftreten: bei K-Hilfsaufgaben, bei W-Hilfsaufgaben, und beim W-Vereinfachen.

Um den Stellenwert dieser harten Fehler einschätzbar zu machen, wird an Abbildung 4.9 und Abbildung 4.10 (S. 126 und 127, Vorder- und Rückseite des Dokumentes von Isabel_F aus der Stunde 01-4, also gegen Ende des Kino-Blockes) ein solcher Fehler exemplarisch vorgestellt.

Befunde der Verteilung in Abbildung 4.7

In Abbildung 4.7 (S. 122) sind alle Dokumente der Studie markiert, die mindestens eine fehlerhafte Rechnung enthalten, aufgeschlüsselt in jene, in denen mindestens eine fehlerhafte Rechnung bei mentalarithmetischer Komplementbildung, bei mentalarithmetischem Wegnehmen, oder beim schriftlichen Rechnen auftreten.

Insgesamt sind 141 von 856 Dokumenten in Abbildung 4.3 mit dem Etikett Fehler versehen. 34 Dokumente enthalten dabei (mindestens) einen Fehler bei einer Rechnung in mentaler Arithmetik in der Grundvorstellung Komplementbildung, 73 einen Fehler analog in der Grundvorstellung Wegnehmen, und 43 enthalten einen Fehler bei einer schriftlichen Rechnung.

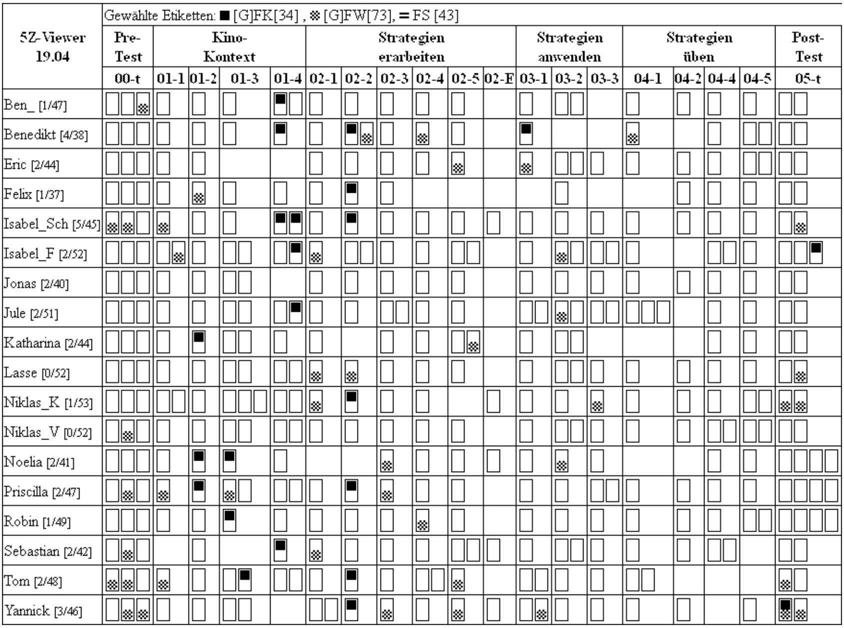
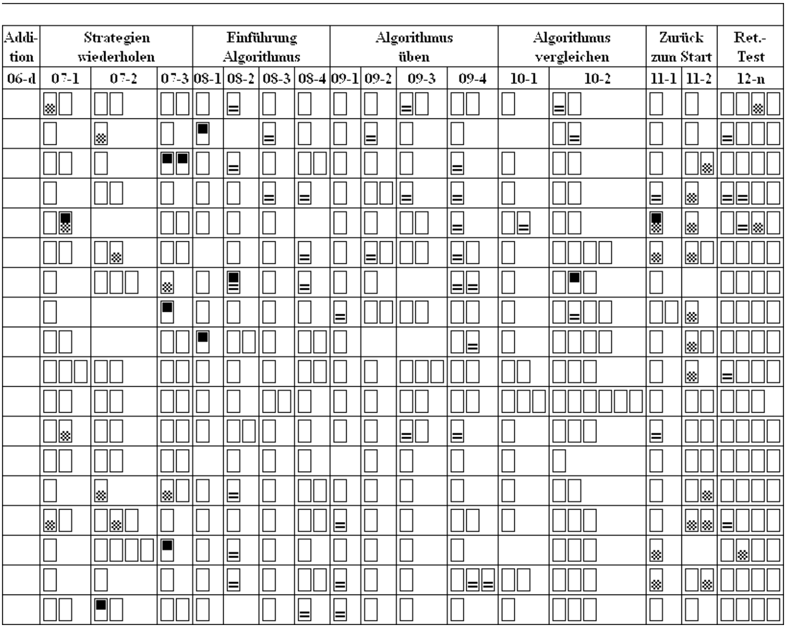


Abbildung 4.7 (beide Seiten, oben): Verteilung K-, W- und S-Fehler

Die Fehler in schriftlichen Rechnungen und mentaler Arithmetik verteilen sich dabei auf die Blöcke analog zur Verteilung der Rechenarten (vgl. Kap. 4.1.1), es fällt jedoch auf, dass hier keine Clusterbildung zu erkennen ist, sondern die Fehler relativ gleich gestreut in der Matrix auftreten (einmal abgesehen von Block 04, Strategien üben – hier enthält nur ein einziges Dokument einen Fehler).

Befunde der Verteilung in Abbildung 4.8

Abbildung 4.8 (S. 124) zeigt nur die mit einem harten Fehler etikettierten Dokumente, es tritt also hier mindestens ein Fehler dieser Kategorie auf. Nur 18 Dokumente der 141 Fehlerdokumente aus Abbildung 4.3 enthalten solche Fehler, bei denen fehlerhaft im Sinne der Grundvorstellung Komplementbildung bzw. des Gesetzes der Konstanz der Differenz gerechnet wurde. Hier ist eine Häufung in den Blöcken explorativen Charakters erkennbar (01 Kinokontext und 02 Strategien erarbeiten), sowie kleine Sprenkel in den Blöcken 07 (Strategien wiederholen) und 11 (zurück zum Start). Der Vollständigkeit halber sei



Legende: □ = ein Dokument; [G]FK, Etikett ■ = Etikettengruppe *Fehler Komplementbildung*, enthält mindestens eine Rechnung, bei der ein Fehler in dieser Grundvorstellung auftritt; analoge Bedeutungen bei [G]FW, Etikett ▩ = Etikettengruppe *Fehler Wegnehmen*; und FS, Etikett 〓 = Etikett *Fehler Schriftlich.*

darauf hingewiesen, dass in Teilen der Blöcke 08 und 10, im gesamten Block 09 hauptsächlich schriftlich gerechnet wird, und somit dort keine harten mentalarithmetischen Fehler auftreten können, im Rest der Blöcke theoretisch aber sehr wohl.

Die 18 Dokumente mit harten Fehlern teilen sich weiter auf in 7 Dokumente mit einem Fehler bei einer K-Hilfsaufgabe, 8 bei einer W-Hilfsaufgabe und 3 beim W-Vereinfachen. Der Zeitpunkt ihres Auftretens stimmt mit dem des Auftretens der Strategien (vgl. hierzu Kap. 4.2) überein.

Zusammenfassung und Erweiterung der Befunde aus Abbildung 4.7 und Abbildung 4.8

In der Tabelle 4.1 werden weitere Zahlen im Zusammenhang mit der Fehleranalyse dargestellt. Aus dieser wird zusätzlich ersichtlich, dass die 7 Dokumente mit harten Fehlern bei K-Hilfsaufgaben in nur 10 Dokumenten inkludiert sind, die allgemein Fehler bei K-Hilfsaufgabe aufweisen. Zur Erläuterung, was sich neben den 7 harten Fehlern hinter den 34 K-Fehler-Dokumenten verbirgt, wurde

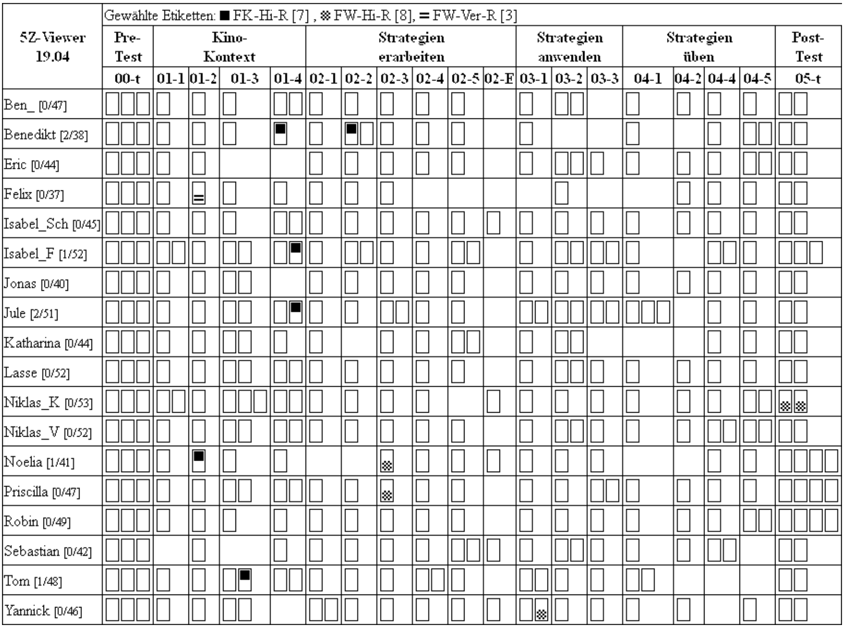


Abbildung 4.8 (beide Seiten): Verteilung harte Fehler

die Zeile „Weiche Fehler“ (vgl. Kap. 3.4.2) hinzugefügt, aus welcher die Verteilung in Kopfrechenfehler (14), Komplexitätsfehler (5), Verwechslungsfehler (9) sowie andere Fehler (4) hervorgeht.

Beispieldokument von Isabel_F, Stunde 01-4

Die bisherigen Befunde erweiternd soll nun an einem für diese 7 harten K-Hilfsaufgaben-Fehler exemplarischen Dokument dieses Fehlermuster qualitativ beschrieben und in Lernprozesse eingeordnet werden. Isabel_F rechnet auf dem Doppeldokument (Abbildung 4.9, S. 126, Vorderseite, Abbildung 4.10, S. 127, Rückseite) zwölf Aufgaben aus dem Kino-Aufgabenpool (dargestellt in Kap. 3.3), wählt dabei den Komplementbildung intendierenden Kontext („… 293 sind schon da…“) und rechnet auch in dieser Grundvorstellung.

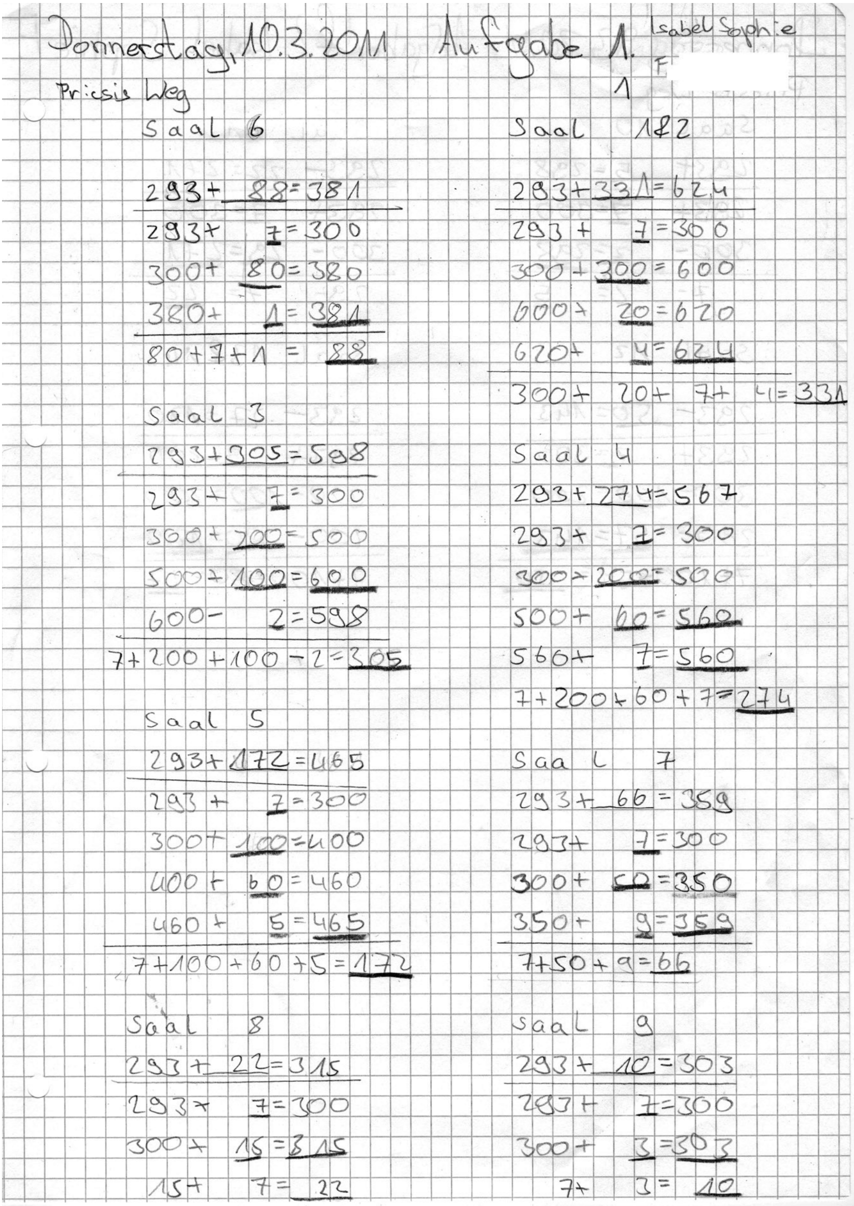
Für die ersten neun Aufgaben wählt sie das Additionsformat, für die letzten drei das Subtraktionsformat: Am Ende der Vorstunde (01-3) wurde anhand zweier Schülerlösungen über die Möglichkeit, „Ergänzen“ als „Plus-Ergänzung“

Addition	Strategien wiederholen			Einführung Algorithmus				Algorithmus üben				Algorithmus vergleichen		Zurück zum Start		Ret.-Test
06-d	07-1	07-2	07-3	08-1	08-2	08-3	08-4	09-1	09-2	09-3	09-4	10-1	10-2	11-1	11-2	12-n
	□□	□□	□□	□	□	□	□	□	□	□□	□□	□	□□	□	□	□□□□
	□	□	□	□		□	□	□	□	□	□		□□	□	□	□□□□
	□□	□	□□	□	□	□	□□	□	□	□	□	□	□□	□	□□	□□□□
	□	□□	□	□	□	□	□	□	□□	□	□	□	□□	□	□	□□□□
	□▩		□□	□	□	□		□	□	□□	□	□□	□□	▩	□	□□□□
	□□	□▩	□□		□	□	□	□	□□	□□	□□	□	□□□□	□	□□	□□□□
	□	□□□	⊟	□	□	□	□	□	□		□□	□	□□□	□		□□□□
	□		■	□	□	□	□	□	□□	□□	□□	□	□□□□	□□	⊟	□□□□
	□□		□□	□	□□	□	□□	□			□□	□	□□□□	□	□□	□□□□
	□□□	□□	□□	□	□	□	□□	□	□	□□□	□□	□□	□□□	□	□	□□□□
	□□	□□	□□	□	□	□□	□	□	□	□□	□□	□□□	□□□□□□	□	□□	□□□
	□□	□□	□□	□	□□	□	□	□	□	□□	□	□	□□□	□	□□	□□□□
	□□	□□	□□		□	□	□		□	□	□	□	□	□	□□	□□□□
	□	□	□□	□	□	□	□□	□	□	□	□	□	□□	□	□□	□□□□
	□□	□□□	□	□	□	□	□□	□	□	□	□□	□	□□□	□	□□	□□□□
	□	□□□□	□	□	□	□	□	□	□	□	□		□□□	□		□□□□
	□	□	□	□	□	□	□□	□	□	□	□□□	□□	□□□	□	□□	□□□□
	□□	□□	□□	□		□	□	□	□	□	□	□	□□□	□	□	□□□□

Legende: □ = ein Dokument; FK-Hi-R, Etikett ■ = Etikett *Fehler komplementbildende Hilfsaufgabe Rechengesetz*, enthält mindestens eine Rechnung, bei der ein Fehler dieser Art (vgl. Tabelle 3.3, S. 105) auftritt; analoge Bedeutungen bei FW-Hi-R, Etikett ▩ = Etikett *Fehler wegnehmende Hilfsaufgabe Rechengesetz*; und FW-Ver-R, Etikett ⊟ = Etikett *Fehler wegnehmendes Vereinfachen Rechengesetz.*

und als „Minus-Ergänzung" durchzuführen, gemeinsam reflektiert (dargestellt in Kap. 4.2.1). Mit „Priscis Weg" kennzeichnet Isabel hier, zunächst die Variante des Plus-Ergänzens gewählt zu haben (Strategien tragen zu diesem Zeitpunkt noch die Namen der Kinder, die sie vorgestellt haben). Ihre halbschriftlichen Rechnungen sind in die Kategorie Schrittweise einzuordnen, mit der Variante der Schritterzeugung „zu glatten Zwischenzahlen kommen" (vgl. Kap. 4.2.2), die strukturgleich im Rechenweg der „Plus-Ergänzung" von Priscilla aus der Reflexionsphase der Vorstunde enthalten sind.

Bei der dritten Aufgabe (Saal 3, 293+___=598) baut Isabel einen Schritt ein, der über das Ziel 598 hinausschießt (500+100=600, für die Strategie Schrittweise wären eher + 90 und +8 als Schritte zu erwarten). Diesen als Hilfsaufgabe zu kategorisierenden Schritt (und damit diese Rechnung als K-Hilfsaufgabe) kompensiert sie mit -2 in Gegenrichtung, um zum Ziel 598 zu gelangen, und bilanziert auch in der Neben-Nebenrechnung zur Ermittlung des Ergebnisses diese -2 richtig als Verkürzung der zu groß gewordenen Spanne zwischen Subtrahend und Minuend. Diese Möglichkeit, auch beim Rechnen in der Grundvorstellung



Donnerstag, 10.3.2011 Aufgabe 1.

Isabel Sophie F

Priscis Weg

1

Saal 6

293 + 88 = 381

293 + 7 = 300

300 + 80 = 380

380 + 1 = 381

80 + 7 + 1 = 88

Saal 3

293 + 305 = 598

293 + 7 = 300

300 + 200 = 500

500 + 100 = 600

600 − 2 = 598

7 + 200 + 100 − 2 = 305

Saal 5

293 + 172 = 465

293 + 7 = 300

300 + 100 = 400

400 + 60 = 460

460 + 5 = 465

7 + 100 + 60 + 5 = 172

Saal 8

293 + 22 = 315

293 + 7 = 300

300 + 15 = 315

15 + 7 = 22

Saal 1&2

293 + 331 = 624

293 + 7 = 300

300 + 300 = 600

600 + 20 = 620

620 + 4 = 624

300 + 20 + 7 + 4 = 331

Saal 4

293 + 274 = 567

293 + 7 = 300

300 + 200 = 500

500 + 60 = 560

566 + 7 = 560

7 + 200 + 60 + 7 = 274

Saal 7

293 + 66 = 359

293 + 7 = 300

300 + 50 = 350

350 + 9 = 359

7 + 50 + 9 = 66

Saal 9

293 + 10 = 303

293 + 7 = 300

300 + 3 = 303

7 + 3 = 10

Abbildung 4.9: Isabel_F, Stunde 01-4, Arbeitsphase, Vorderseite

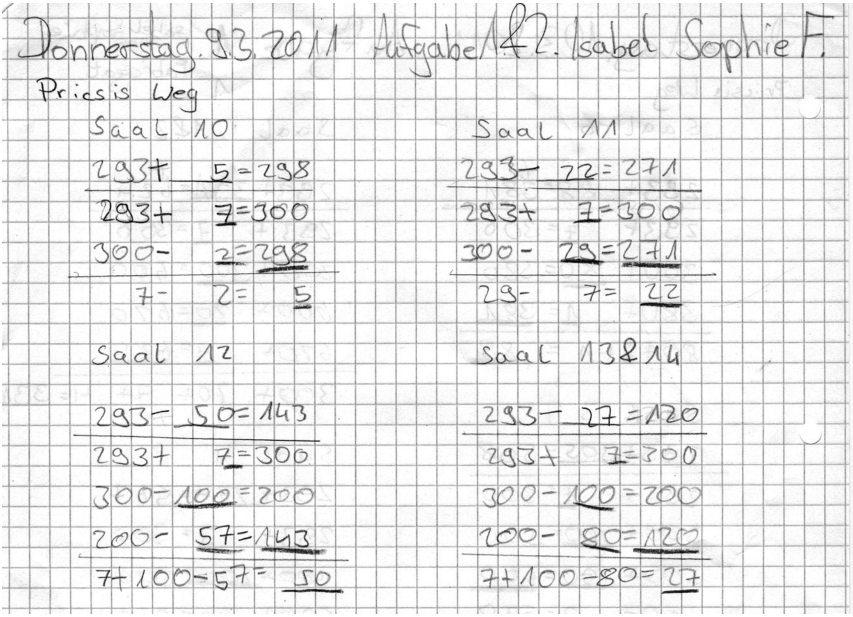


Abbildung 4.10: Isabel_F, Stunde 01-4, Arbeitsphase, Rückseite

Tabelle 4.1: Fehlerverteilungen

<table>
<tr><th>Verteilung</th><th colspan="10">Anzahlen</th></tr>
<tr><td>Alle</td><td colspan="10">856</td></tr>
<tr><td>Rechenart</td><td colspan="9">M
707</td><td>S
273</td></tr>
<tr><td>Grundvorstellung</td><td colspan="7">K
266</td><td colspan="2">W
495</td><td></td></tr>
<tr><td>Fehler</td><td colspan="7">K
34</td><td colspan="2">W
73</td><td>S
43</td></tr>
<tr><td>Fehler/Strategie</td><td colspan="2">Schr
26</td><td colspan="2">Hi
10</td><td colspan="2">Ver
1</td><td>Ste
0</td><td colspan="3">-</td></tr>
<tr><td>Harte Fehler</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Hi
7</td><td colspan="3"></td><td>Hi
8</td><td>Ver
3</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Weiche Fehler</td><td>Kopf
14</td><td colspan="2">Kmplx
5</td><td colspan="2">Verw
9</td><td colspan="2">An
4</td><td colspan="3">-</td></tr>
</table>

Legende: Abkürzungen vgl. Tabelle 3.3, S. 105; „-“ = nicht erhoben

Komplementbildung die Idee der Hilfsaufgabe einzubauen, also über das eigentlich Ziel hinauszurechnen, mit einem Rechenrichtungswechsel in Gegenrichtung zu kompensieren, und anschließend die Rechenschritte richtig zu bilanzieren, ist in einer Reflexion über eine Schülerlösung zu Beginn der Vorstunde mit allen Kindern gesprochen worden.

Nach weiteren schrittweisen Rechnungen produziert Isabel in der neunten und zehnten Aufgabe auf der Rückseite des Dokumentes (Abbildung 4.10, S. 127) weitere Aufgaben mit Rechenrichtungswechseln, einmal im Additionsformat (Saal 10), einmal im Subtraktionsformat (Saal 11). Bei diesen zweizeiligen halbschriftlichen Lösungen gelingt ihr wieder – wie auf der Vorderseite – die Bilanzierung der Rechenrichtungswechsel. Anzumerken bleibt, dass bei diesen beiden Aufgaben eigentlich eine direkte schrittweise Lösung naheliegender wäre, Isabel hier also vermutlich bewusst die Idee der Hilfsaufgabe noch einmal aufgreift.

Zu guter Letzt produziert Isabel noch zwei weitere K-Hilfsaufgaben im Subtraktionsformat (Saal 12, Saal 13&14), die nun aber zwei in Gegenrichtung kompensierende Schritte enthalten. Hier gelingt ihr die Bilanzierung dieser Schritte zur Ermittlung der Komplementspanne nicht, der Hunderterschritt wird in beiden Rechnungen vom Vorzeichen her falsch einberechnet, so dass diese beiden Aufgaben ein falsches Ergebnis erhalten.

Deutung der Befunde zum Erfolg der Anwendung von Komplementbildung.

Zunächst lässt sich aus den Befunden zur Abbildung 4.3 ableiten, dass die Häufigkeit der Dokumente mit allgemeinen K-Fehlern im Vergleich zu allgemeinen W-Fehlern etwa 1:2 beträgt und damit in etwa gleich der Verteilung aller Dokumente mit mentalen Rechnungen in den beiden Grundvorstellungen ist, die auch etwa 1:2 beträgt (vgl. 4.1.1). Somit kann als erster Eindruck festgehalten werden, dass keine der beiden Grundvorstellungen in dieser Lerngruppe anfälliger für Fehler wäre. Der Vergleich mentaler Arithmetik mit schriftlichem Rechnen weist ein fast gleiches Verhältnis auf (707 zu 273 Dokumente, 98 zu 41 mit Fehlern). Auch das schriftliche Rechnen scheint hier also nicht mehr oder weniger anfällig für Fehler zu sein als die mentale Arithmetik.

Die weichen Fehler sorgen für eine Gleichverteilung der allgemeinen Fehlerhäufigkeit, auch erscheinen sie für sich betrachtet relativ gleichverteilt (vgl. Tabelle 4.1, S. 127). Hier gibt es keinen Grund zur Annahme, dass zum Beispiel Kopfrechenfehler, die für falsche Zwischenergebnisse in einzelnen Zeilen der halbschriftlichen Rechnungen sorgen, oder Ziffernverwechslungsfehler, wenn die Kinder etwa in einer Zeile in einer der Zahlen eine 7 notieren, dann aber darunter mit der Ziffer 1 weiterrechnen, in einer Konnotation zur verwendeten Rechenart oder der Grundvorstellung stehen könnten. Somit kann aus der Verteilung der weichen Fehler für die K-Rechnungen diese auch auf die W- und S-Rechnungen antizipiert und die Gleichverteilung damit begründet werden.

Die Anzahl der Dokumente mit harten Fehlern, die auf (noch) nicht vorhandenem Verständnis beruhen, sind äußerst gering in ihrer Gesamtzahl. Nur 18 von 856 Dokumenten enthalten einen solchen Fehler, das sind gerade einmal 2 Prozent. Auch verteilen sie sich erneut (7 zu 11) ähnlich wie die Anzahl der Dokumente der Grundvorstellungen (266 zu 495), auch hier kann dem komplementbildenden Rechnen im Unterricht der Studie keine größere Erfolgshürde als dem wegnehmenden konstatiert werden. Antizipiert man dazu noch (vgl. hierzu die Interpretation des Beispiels von Isabel weiter unten), dass es nur einzelne fehlerhafte Rechnungen auf den Dokumenten sind, diese aber – vor allem im weiteren Verlauf des Lernprozesses – mit zunehmender Aufgabenzahl, zunehmenden Verständnis und zunehmender Routine zum großen Teil aus richtigen Rechnungen bestehen, dürfte der (nicht erhobene) rechnungsbezogene Fehlerquotient noch weit unter 2% liegen. Hieraus lässt sich ableiten, dass komplementbildendes Rechnen, ebenso wie der Rest mentaler Arithmetik, den Kindern dieser Klasse grundsätzlich keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, und die Kinder mit großem Erfolg auch komplementbildende Strategien anwenden. Dass nur ein harter Fehler bei K-Vereinfachen und K-Stellenweise auftritt, liegt zweifellos daran, dass auch diese Strategien (vgl. Kap. 4.2) äußert selten auftreten – bemerkenswert scheint jedoch, dass sich kein solcher Fehler in Rechnungen mit K-Schrittweise findet, hier also alle Kinder absolut erfolgreich das Rechnen in dieser Grundvorstellung meistern.

Es bleibt das Cluster der 7 harten Fehler bei den K-Hilfsaufgaben in den explorativen Blöcken zu erklären. Dazu wurde bereits weiter oben das Dokument von Isabel_F vorgestellt. An diesem Dokument wird nachvollziehbar, dass sich die Kinder in den explorativen Blöcken noch in einer Phase der Konsolidierung neuen Wissens befinden. Isabel vollzieht zunächst äußerst erfolgreich „Priscis Weg“ nach, wählt also bewusst die Komplementbildung, das Additionsformat, und schrittweises Rechnen in der Subform „zu glatten Zahlen“, und testet ihre Fähigkeiten an einer Vielzahl von Aufgaben. Darin integriert sie ihre Versuche, auch die Idee der Hilfsaufgabe anzuwenden, die ebenfalls kurz zuvor an Schülerbeispielen mit allen Kindern gemeinsam thematisiert wurde. Auch dies gelingt Isabel in weniger komplexen Fällen (wenn nur ein kompensierender Schritt in Gegenrichtung erfolgt) erfolgreich, lediglich bei den letzten beiden komplexeren Rechnungen mit zwei kompensierenden Schritten in Gegenrichtung verliert sie die Bedeutung der einzelnen Zahlen für das Ermitteln der Spanne zwischen Minuend und Subtrahend aus den Augen.

Ergründen lässt sich nicht wirklich, ob dies tatsächlich noch zu gering entwickeltes Verständnis in diesem Teilbereich komplementbildenden Rechnens ist, oder ob auch noch andere Faktoren, wie die größere Komplexität der Aufgabe, die erhöhte Schwierigkeit der Bilanzierung der Komplementspannenermittlung im Subtraktionsformat (da hier die Beträge der subtraktiven Schritte zur Ermittlung der Spanne zwischen Minuend und Subtrahend berücksichtigt werden müssen, vgl. 4.2), oder auf einer ganz anderen Ebene eine Rolle spielen (es sind die letzten beiden von 12 Aufgaben – am Ende der Arbeitsphase lässt die Konzentration nach, es herrschte ggf. schon Zeitdruck, etc.), aber es bleibt festzuhalten, dass hier einige Teilprozesse schon funktionieren (ein kompensierender Schritt), andere (zwei Schritte) noch nicht, die entstehenden Fehler also weniger als „nicht erfolgreich", sondern eher als „noch nicht abgeschlossene Entwicklung" anzusehen sind: Die Kinder befinden sich in dieser explorativen Phase noch generell in der Konsolidierungsphase erster subtraktiver Strategien im Tausenderraum, meistern problemlos basale schrittweise Rechnungen in beiden Grundvorstellungen, sind aber noch mitten im Adaptionsprozess bei den nicht umsonst als „elaborierter" geltenden variierenden Strategien, die durch Anwenden des Gesetzes der Konstanz der Differenz auf diese basalen Strategien aufsetzen (auch bei den W-Strategien treten die harten Fehler bei variierenden Strategien und der Anwendung dieses Rechengesetzes auf) und in der Grundvorstellung Komplementbildung zusätzlich die Hürde der Abschlussbilanzierung der einzelnen Rechenschritte aufweisen. Es bleibt offen, ob die Kinder am Ende die Hilfsaufgabenidee auch in der K-Grundvorstellung hätten adaptieren können, denn K-Hilfsaufgaben sterben aus (vgl. Kap. 4.2), sie werden nur in der Grundvorstellung Wegnehmen kultiviert, komplementbildendes Rechnen konzentriert sich auf schrittweise Strategien.

4.1.3 Schülerbezogene Häufigkeit komplementbildender Strategien

In diesem Teilkapitel soll nun der Frage nachgegangen werden, ob es – wie in den Forschungsinteressen formuliert – Kinder gibt, die der Komplementbildung eher zusprechen, und solche, die sie eher vermeiden, also ob sich die Verwendungshäufigkeit (vgl. 4.1.1) und der Erfolg (vgl. 4.1.2) auf die Population dieser Studie gleich verteilt, oder ob hier Klassifizierungen von Schülergruppen vorgenommen werden können.

Dazu wird in Abbildung 4.11 (S. 132) die bereits in Kap. 4.1.1 und dort an Abbildung 4.2 eingesehene Verteilung schülerbezogen dargestellt, in dem die Kindern nicht wie in den vorhergehende Abbildungen alphabetisch, sondern nach der relativen Häufigkeit (vgl. Kap. 3.4.2) des Auftretens von Dokumenten mit komplementbildendem Rechnen sortiert werden. Die daraus gewonnenen schülerbezogenen Häufigkeiten werden in Abbildung 4.14 (S. 135) graphisch dargestellt.

In einigen Stunden der Studie ist die Wahl von Strategien komplett freigestellt, in anderen Stunden ist die Wahl einer bestimmten Strategie für Teile der Aufgaben, oder für alle Aufgaben erbeten (vgl. 3.4.2 und die Auflistung im Anhang). Zur Verfeinerung der Befunde wird daher untersucht, wie sich die schülerbezogenen Häufigkeiten in den Stunden mit freier Strategiewahl entfalten, da die Gesamtverteilung ja auch erbetene Strategiewahlen enthält, also die Kinder hier keine oder nur geringe Chancen hatten, komplementbildendes

Rechnen zu vermeiden oder anzuwenden. Dazu wird in Abbildung 4.12 (S. 134) die schülerbezogene, sortierte Häufigkeitsdarstellung auf die Stunden mit freier Strategiewahl eingeschränkt, Befunde hieraus werden ebenfalls in Abbildung 4.15 (S. 135) graphisch aufbereitet. Ein exemplifizierendes Schülerdokument (Abbildung 4.13, S. 134) rundet diese Darstellung ab. Abschließend wird noch einmal Rückschau auf die Abbildung 4.7 (S. 122) und Abbildung 4.8 (S. 124) aus Kap. 4.1.2 (Fehlerverteilung) gehalten, und hinterfragt, ob hier sinnvolle schülerbezogenen Aussagen gemacht werden können.

Befunde der Verteilung in Abbildung 4.11 bis Abbildung 4.15

Die Darstellung der Abbildung 4.11 (S. 132) entspricht der Abbildung 4.2 (S. 112). in Kap. 4.1.1, jedoch sind nun die Schüler nicht mehr alphabetisch, sondern nach der relativen schülerbezogenen Häufigkeit (vgl. 3.4.2) von K-Dokumenten aufsteigend sortiert dargestellt. Abbildung 4.12 (S. 134) entspricht wiederum Abbildung 4.11, aber die Stundenanzeige ist eingeschränkt auf Stunden mit freier Strategiewahl und „reeller Chance“ auf komplementbildendes Rechnen, dem Gedanken folgend, dass bestimmte Zahlenwerte (etwa die „kleine Differenz“ nach Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009; vgl. Kap. 2.2.3) in den Aufgabenstellungen zur Komplementbildung einladen, im Umkehrschluss also andere eher nicht, zum Beispiel die Aufgaben des Formates „BVB-Zahlen“ (Block 04, Strategien strukturiert üben). Die Einschränkungsvarianten wurden in Kap. 3.4.2 erwähnt, ergänzend sei hier angemerkt, dass die Auswahlvariante 1 (siehe Anhang) keine weiteren Befunde emergiert, sondern nur Interjekte zwischen den beiden Darstellungen Abbildung 4.14 (S. 135) und Abbildung 4.15 (S. 135) liefert, welche die relativen schülerbezogenen Häufigkeiten (Werte hinter den Schülernamen in Abbildung 4.11 und Abbildung 4.12, vgl. Kap 3.4.2). graphisch aufbereitet darstellen.

In Abbildung 4.11 (S. 132) – aufsteigend sortiert, d.h. oben befinden sich Kinder mit geringerer relativer K-Dokumentzahl, nach unten hin steigt diese – ist zu erkennen, in welchen Phasen des Unterrichts die Kinder Komplementbildung nutzen bzw. verlassen. Während im Kino-Block noch alle Kinder mehr oder weniger in der Grundvorstellung Komplementbildung rechnen, sinkt diese Rate im Block Strategien anwenden (03) ab, hier finden sich hauptsächlich K-Dokumente bei den Schülern mit höherer relativer Häufigkeit, also weiter unten in der Matrix, ebenso im Post-Test (Block 05). Im Block 07 (Strategien wiederholen) finden sich auch wieder zunehmend im oberen Teil der Matrix Dokumente, im Retention-Test jedoch wiederholt sich das Bild der Blöcke 03 und 05.

Noch deutlicher wird dieses Bild in der Abbildung 4.12 (S. 134), in der nur die Stunden mit freier Strategiewahl berücksichtigt sind: Je weiter der Unterricht fortschreitet, umso weiter unten in der Matrix finden sich K-Dokumente, was sich jedoch hinter dem Post-Test wieder umkehrt. Auch ändert sich nun das Verhältnis K zu W: Es finden sich 83 Dokumente mit (mindestens einer)

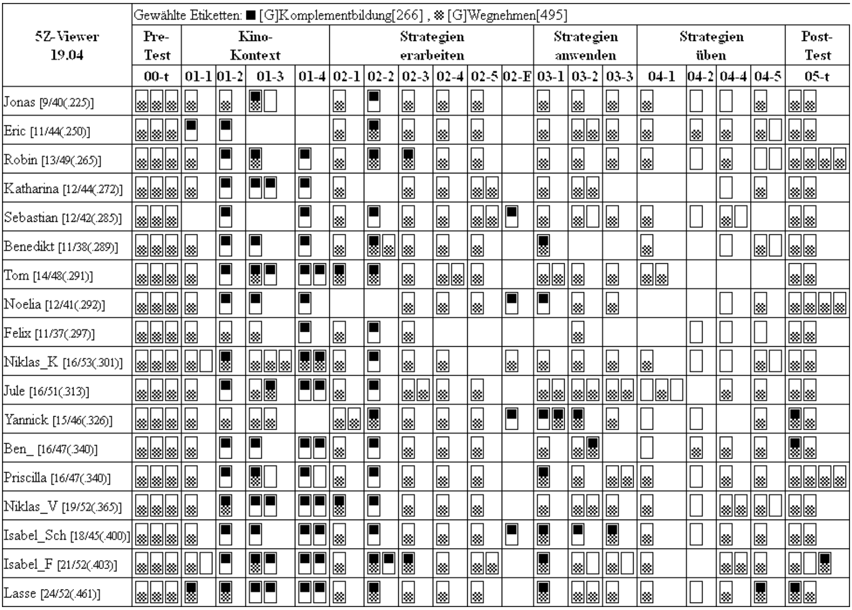
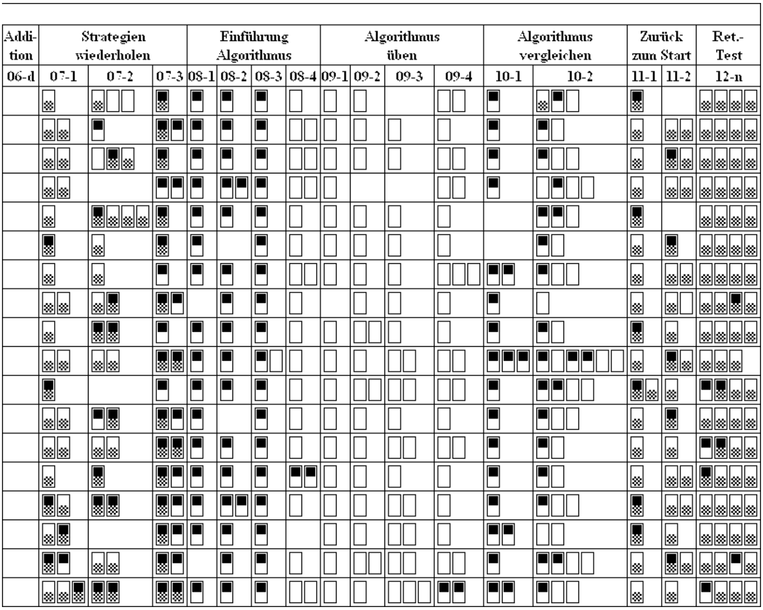


Abbildung 4.11 (beide Seiten): Verteilung K- und W-Dokumente, nach K_{rel} sortiert

K-Strategie zu 316 mit (mindestens einer) Rechnung in der W-Grundvorstellung), das Verhältnis sinkt auf etwa 1:4, im gesamten Unterricht (vgl. Kap. 4.1.1) hatte es noch etwa 1:2 betragen.

Die Spannbreite der relativen Häufigkeit des Auftretens von K-Strategien, dargestellt in Abbildung 4.14 (S. 135), hat mehrere Aspekte: Sind es bei Jonas zunächst ein Viertel der Dokumente (09/40 = 22,5%), die mindestens eine K-Strategie enthalten, erreicht Lasse fast die Hälfte (24/52 = 46,1%) der Dokumentenzahl, also etwa das Doppelte. Zudem wächst die Anzahl stetig, es gibt keine Ausreißer oder Gruppen von Kindern, die sich stark von anderen unterscheiden. Bei allen Kindern taucht mindestens auf einem Viertel der Dokumente eine K-Strategie auf.

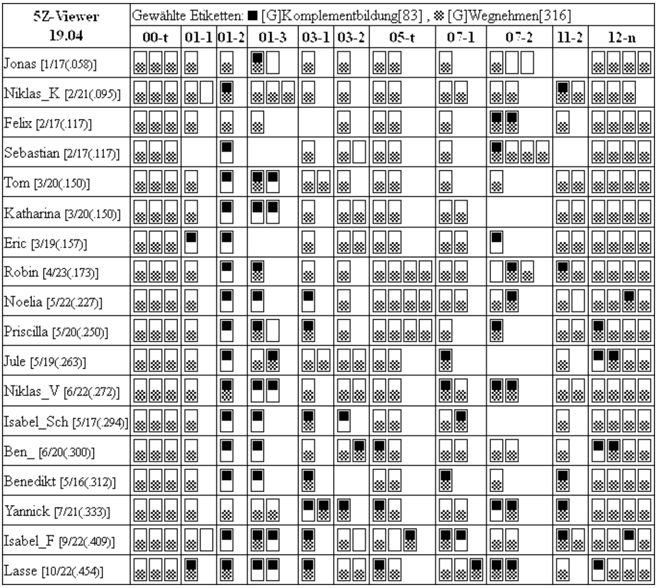
In den Stunden mit offener Strategiewahl (Abbildung 4.15, S. 135) stellen die Werte immer noch eine stetige Reihe dar, jetzt jedoch mit einer deutlicheren Spreizung. Während sich die Zahlen der Kinder mit häufigen K-Strategie-Dokumenten nur unwesentlich zu denen der Gesamtverteilung ändern (bei Lasse ist es immer noch etwa jedes zweite Dokument, 10/22 = 45,4%, das eine K-Strategie enthält), sinkt die Akzeptanz bei denen mit geringem K-Strategie-



Legende: □ = ein Dokument; [G]Komplementbildung, Etikett ■ = Etikettengruppe *Komplementbildung*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellung; [G]Wegnehmen, Etikett ▩ = Etikettengruppe *Wegnehmen*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellung.

Anteil jedoch deutlich – während in der Gesamtverteilung die Dokumente von Jonas noch zu einem Viertel (9/40) mindestens eine Rechnungen in der Grundvorstellung Komplementbildung enthielten, ist es in der Einschränkung gerade noch ein einziges Dokument (1/17), das eine solche Rechnung beinhaltet.

Dieses eine Dokument (in Abbildung 4.13, S. 134, als Ausschnitt dargestellt) enthält dann auch nur eine einzige Aufgabe in der Grundvorstellung Komplementbildung, es ist die erste (abgebildete) Rechnung der nahezu trivialen Aufgabe 293+__=298. Diese Aufgabe zeichnet sich durch eine sehr kleine Variante der kleinen Differenz (vgl. Kap. 2.2.3) aus. Bei den zwei weiteren Aufgaben 315-293 und 359-293, die Jonas auf diesem Dokument noch rechnet (nicht abgebildet), die ebenfalls eine kleine Differenz beinhalten (59+7 und 15+7 sind gut handhabbar, vgl. ebd.), wechselt er in die Grundvorstellung Wegnehmen und rechnet dort kleinschrittig, umständlich mit der Strategie Schrittweise.



Legende: Siehe Abbildung 4.11 (Vorseite). Die Anzeige ist eingeschränkt auf Stunden mit freier Strategiewahl Variante 2, vgl. Kap. 3.4.2 und die Auflistung im Anhang

Abbildung 4.12: Verteilung K- und W-Dokumente, nach K_{rel} sortiert

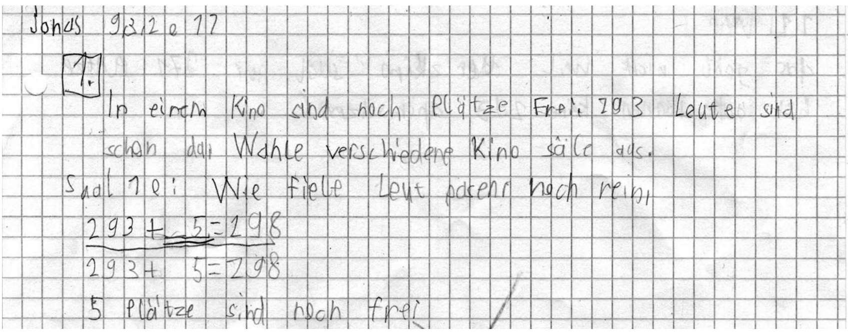
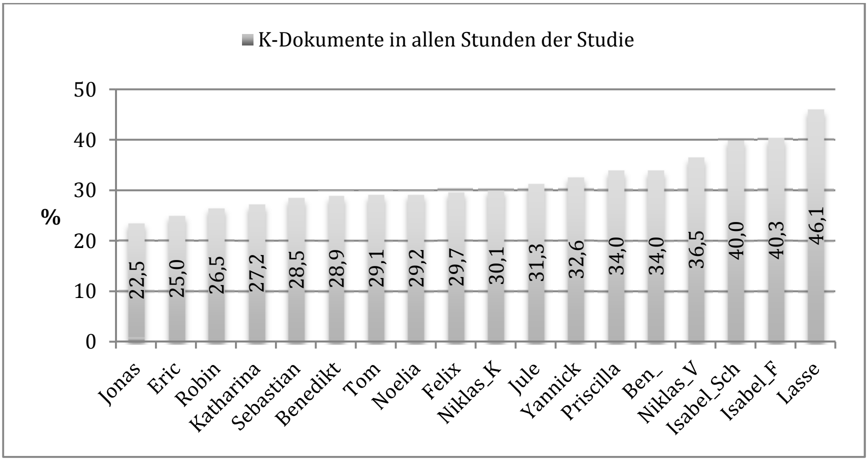
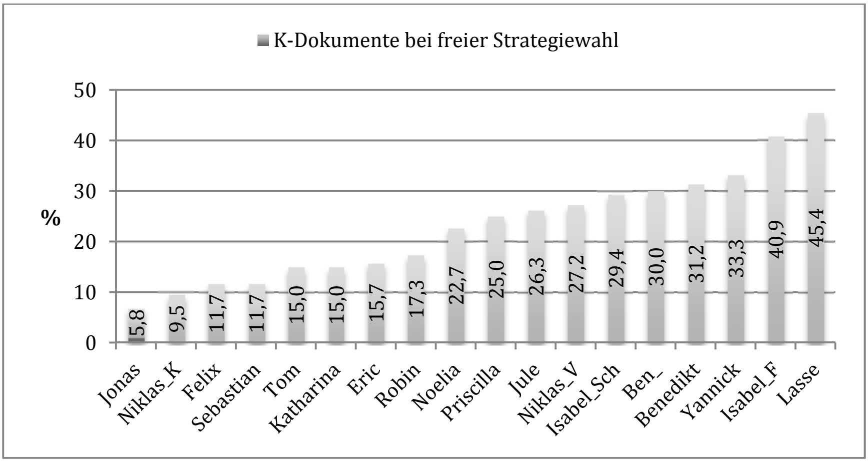


Abbildung 4.13: Jonas, Stunde 01-3, Arbeitsphase, Ausschnitt



Anteil der Dokumente mit K-Strategien an den Gesamtdokumenten eines Schülers in Prozent

Abbildung 4.14: Relative schülerbezogene Häufigkeit aller K-Dokumente



Anteil der Dokumente mit K-Strategien an den Gesamtdokumenten eines Schülers in Prozent, Einschränkungsvariante 2, vgl. Kap. 3.4.2 und die Auflistung im Anhang

Abbildung 4.15: Relative schülerbezogene Häufigkeit von K-Dokumenten in Stunden mit freier Strategiewahl

Deutung der Befunde zum Erfolg der Anwendung von Komplementbildung.

Bei den reinen Zahlen in Tabelle 4.1 (S. 127, vgl. Kap. 4.1.2) (266 K-Rechnungen zu 495 W-Rechnungen) hätte man noch annehmen können, dass die 266 K-Strategien möglicherweise nur von wenigen Kindern mit einer starken Präferenz für komplementbildendes Rechnen erzeugt werden. Jetzt aber zeigen die Zahlen aus Abb. 4.7 und 4.10, dass sich im gesamten Unterricht der Studie alle Kinder mit K-Strategien beschäftigen. Dass es insgesamt keine Verweigerer gibt, legt nahe, dass K-Strategien von allen Kindern akzeptiert werden.

Ein differenzierteres Bild dagegen zeigen die Zahlen aus Abbildung 4.12 (S. 134) und Abbildung 4.15 (S. 135) der Stunden mit freier Strategiewahl. Hier sind es vor allem die Werte der Kinder mit geringen K-Dokument-Zahlen, die deutlich abfallen, während die Werte der Kinder im Mittelfeld und derer mit hoher Anzahl im Vergleich zu den Zahlen der Gesamtstudie geringer abnehmen oder relativ konstant bleiben. Wenn die Spannbreite der Akzeptanz von K-Strategien bei offener Strategiewahl zwischen beinaher Ablehnung (nur 1 von 17 Dokumenten) und deutlicher Präferenz (jedes 2. Dokument) variiert, so legt dies nahe, dass es durchaus „Skeptiker“ geben könnte, also Kinder, die ohne die Forcierung durch die Lehrerin von sich aus nur ungern in der Grundvorstellung Komplementbildung rechnen, und „Befürworter“, also Kinder, die auch ohne Forcierung von außen K-Strategien wählen. Es muss jedoch konstatiert werden, dass auch in den Stunden mit offener Strategiewahl die Werte von Kind zu Kind immer noch stetig steigen. Es gibt also keine Zäsur in den Werten, die es nahe legen würde, die Klasse in „Skeptiker“ und „Befürworter“ zu teilen. Eine Schwelle, ab wann ein Kind aus dem Mittelfeld noch in eine der beiden Gruppen gehört, kann nicht definiert werden. Lediglich der beschriebene Abfall der Werte geringer Dokumentzahl legt nahe, die unteren Kinder „Skeptiker“ zu nennen.

Dass zumindest Jonas ein „Skeptiker“ sein könnte, offenbart sich auch durch die Interpretation seines vorgestellten Dokumentes (Abbildung 4.13, S. 134). Lediglich bei der nahezu trivialen Aufgabe 293+__=298 lässt er sich verlocken, eine Aufgabe in der Grundvorstellung Komplementbildung zu rechnen und halbschriftlich zu notieren; dass Jonas die Aufgaben 315-293 und 359-293 dann lieber kleinschrittig, umständlich mit der Strategie Schrittweise in der Grundvorstellung Wegnehmen rechnet, zeigt deutlich, dass er keine hohe Affinität zur Grundvorstellung Komplementbildung ausprägt. Dieses Dokument von Jonas stammt aus der Stunde 01-3 des Kino-Blocks. Das Dokument von Isabel_F (Abbildung 4.9, S. 126 und Abbildung 4.10, S. 127 in Kap. 4.1.2) aus der Stunde 01-4 kann dagegen als Beispiel für die Befürwortung des K-Rechnens gelten, auch wenn in dieser Stunde „Ergänzen“ in zumindest einer Rechnung erbeten ist, denn Isabel rechnet gleich alle 12 Rechnungen auf ihrem Blatt in dieser Grundvorstellung, zum Teil bereits in elaborierterer Variante. Zumindest macht der exemplarische Vergleich dieser beiden Dokumente deutlich, dass zwischen

Skepsis und Befürwortung zum komplementbildenden Rechnen eine erkennbare Spanne liegen könnte.

Abschließend soll nun noch ein Blick auf eine mögliche Beziehung zum Leistungsspektrum der Kinder geworfen werden. Bereits in der Gesamtverteilung des K-Rechnens (Abbildung 4.11, S. 132 und Abbildung 4.14, S. 135) bilden sich keine Gruppierungen von Schülern ab. Weder kann hier eine besondere Schülergruppe, wie etwa weniger leistungsfähige oder in ihrer mathematischen Lernentwicklung retardierte Kinder, als Gruppe ausgemacht werden, noch treten solche Kinder in einem Teil des Spektrums, etwa bei den Skeptikern, auf. Im Gegenteil: Interessanterweise finden sich von der Lehrerin als mathematisch leistungsstark eingeschätzte Kinder bei den unteren Häufigkeitsquotienten für K-Strategien (z.B. Robin, Eric), aber noch bedeutsamer: Die eher mathematisch weniger leistungsstark eingeschätzten Kinder Noelia und Felix rangieren im Mittelfeld, die ebenfalls zu den mathematisch eher weniger leistungsstarken Kindern zu zählende Isabel_Sch rangiert sogar auf einer Spitzenposition. Auch wenn andere Kinder erwartungsgemäß platziert sind: Eine Beziehung zwischen der mathematischen Leistungsfähigkeit und der Präferenz für das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung erscheint zumindest in dieser Lerngruppe über den Gesamtunterricht der Studie als nicht existent.

Auch in der Einschränkung auf Stunden mit offener Strategiewahl (Abbildung 4.12, S. 134 und Abbildung 4.15, S. 135) lässt sich wieder keine besondere Gruppierung von Kindern finden, die man etwa einem mathematischen Leistungsspektrum oder einem mathematischen Entwicklungsgrad zuordnen könnte. Im Vergleich zur Reihe der relativen Häufigkeit von K-Strategien über die gesamte Studie tauschen zwar einige Kinder die Plätze, es ist aber immer noch keine Beziehung zur von der Lehrerin eingeschätzten mathematischen Leistungsfähigkeit der Kinder feststellbar. Nach wie vor rangieren hier als weniger leistungsstark eingeschätzte Kinder (Isabel_Sch, Benedikt) im oberen Bereich oder im Mittelfeld (Noelia), im unteren Feld finden sich neben durchschnittlichen auch starke Kinder, wie Tom, Eric und Robin.

An dieser Stelle soll nun auch erneut ein Blick auf die Abbildung 4.7 (S. 122) und Abbildung 4.8 (S. 124, Fehlerverteilungen, Kap. 4.2.1) geworfen werden: Hier zeigen sich keine Cluster (Abbildung 4.7), also auch keine leistungsbezogenen Häufungen. Auch bei der absoluten Fehlerdokumentzahl finden sich sowohl starke wie schwache Kinder in beiden Spektren: 4 Dokumente mit mindestens einem Fehlern bei Niklas_V (als sehr leistungsstark eingeschätzter Schüler) und Noelia (als sehr langsam lernend eingeschätzt), 13 solcher Dokumente bei Tom (stark) und Isabel_Sch (sehr zurückhaltend). Weiche und harte Fehlerdokumente zusammen, eingeschränkt auf K-Fehler, lassen sich schülerbezogen nicht weiter quantifizieren, da die geringen Zahlen (0 bis max. 3 solcher Dokumente pro Schüler) keine Aussagekraft besitzen. Dies gilt ebenso für eine Betrachtung der harten K-Fehler-Dokumente (Abbildung 4.8). Diese 7 Fehlerdokumente verteilen sich auf 5 Schüler, die anderen 13 Schüler (darunter schwache wie starke) ließen keine auf mangelndes Grundverständnis zurückzuführende Fehler im Bereich komplementbildenden Rechnens erkennen. Unter den 5 Schüler, bei denen ein solcher Fehler auftritt, finden sich sowohl die als schwach eingeschätzten Kinder Benedikt (2 Dokumente) und Noelia (1 Dokument), als auch die als stark geltenden Kinder Jule (2 Dokumente), Tom (1 Dokument) und Isabel_F (ebenfalls 1 Dokument, vorgestellt in Kap. 4.2.1).

Weder zum Erfolg der Nutzung des komplementbildenden Rechnens noch zur Zu- bzw. Abneigung gegenüber diesem konnte eine Beziehung zum Leistungsspektrum der Kinder in dieser Studie erkannt werden. Lediglich scheint es „Skeptiker" und „Befürworter" unabhängig vom Leistungsspektrum zu geben.

4.1.4 Zusammenfassung

In Kapitel 4.1 wurden Befunde und deren Deutung zu folgendem Forschungsinteresse vorgestellt:

FI1: 1. *Inwieweit verwenden die Kinder Komplementbildung (zu unterschiedlichen Zeitpunkten) im Unterricht?*
2. *Wenn die Kinder Komplementbildung verwenden: Wie erfolgreich sind sie dabei?*
3. *Gibt es Kinder, die der Komplementbildung eher zusprechen, und solche, die sie eher vermeiden?*

Dazu wurden – kapitelweise aufgefächert in die drei Unterinteressen – Verteilungsdarstellungen analysiert und diese durch ausgewählte exemplifizierende Schülerdokumente unterbaut.

Verwendungshäufigkeit

Zunächst wurde offenbar, dass komplementbildendes Rechnen in dieser Studie einen hohen Anteil innehat (etwa 1:2, verglichen mit der Grundvorstellung Wegnehmen). Die in Kap. 2.3 vorgestellten Studien fanden hier kleinere Anteile, wenngleich sie vom Ansatz her, etwa der Form des beobachteten Unterrichts, nicht direkt vergleichbar sind. Peltenburg u. a. (2011) berichten allerdings von häufigerer Komplementbildung bei Kontextaufgaben mit einer der hier vorliegenden Studie ähnlichen Verwendungshäufigkeit, aber dort handelt es sich um eine Interview-Studie mit kleineren Zahlen im Hunderterraum, so dass auch hier die Ergebnisse nicht direkt verglichen werden können. Beschränkt man sich bei der hier vorliegenden Studie auf die Blöcke 02 und 11 (denn nur dort waren Kontextaufgaben gegeben), so liegt in diesem Teil unter der genannten Einschränkung die Verwendungshäufigkeit bei Kontextaufgaben sogar noch über der Studie von Peltenburg u. a. (2011). Auf die Rolle des Kontextes wird daher in Kap. 4.4 noch einmal näher eingegangen.

Ein abweichendes Bild zeichnet diese Studie auch über die Nutzung halbschriftlichen Rechnens, und darin enthalten dann auch des komplementbildenden Rechnens, nach der Einführung der schriftlichen Verfahren. Hier zeigte sich weiterhin eine stabile Nutzung mentaler Arithmetik, die durch die Nutzung schriftlichen Rechnens ergänzt wird, aber letzteres nicht dominant wird. Am Beispiel von Isabel_F (Abbildung 4.6, S. 120) konnte aufgezeigt werden, wie überlegt die Kinder bei der Auswahl der Rechenformen, -arten und Strategien vorgehen können, und dabei der schriftliche Algorithmus nur eine Wahl mehrerer Optionen darstellt, wie insgesamt die Häufigkeiten gegen Ende der Studie zeigen (vgl. Abbildung 4.1, S. 110 und Abbildung 4.2, S. 112).

Die weiteren festgestellten chronographisch beschriebenen Cluster komplementbildenden Rechnens lassen sich an den zugeordneten Unterrichtsinhalten festmachen, wie sie im Unterricht nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung auftreten, aber auch außerhalb dieser Clustern spielt Komplementbildung zusammen mit den weiteren Strategien in der mentalen Arithmetik eine gleichberechtigte Rolle.

Erfolg

In dieser Studie konnte kein divergenter Erfolg in Teilen der Lerngruppe ausgemacht werden, alle Kinder sind – mit der Einschränkung, dass bei elaborierteren Rechnungen in der Explorationsphase noch Teilverständnisfehler gemacht werden dürfen – in der Lage, in der Grundvorstellung Komplementbildung zu rechnen, zumindest, wenn komplementbildendes Rechnen erbeten wird. Bei den wenigen harten Fehlern konnte keine Beziehung zum Leistungsspektrum der Kinder festgestellt werden. Ebenso zeigte sich hier, dass auch das schriftliche Rechnen nicht fehleranfälliger oder fehlerfreier wäre, als die mentale Arithmetik.

Schülerbezogene Häufigkeit und Erfolg

Bei freier Strategiewahl gibt es durchaus Kinder, die das Komplementbilden eher vermeiden, jedoch kann hier keine Segmentierung der Lerngruppe in zwei Lager festgestellt werden, eher ein stetiges Wachstum von Skepsis zu Zuneigung, wie die Abbildungen 4.14 und 4.15 (S. 135) nahelegen.

Auch hier konnte keine Beziehung zum Leistungsspektrum der Kinder erkannt werden, sondern hetherogene Verteilungen, in denen sich langsamer Mathematik lernende Kinder sowohl bei den Skeptikern wie bei den Befürwortern finden lassen. Auch die in ihrer Gesamtzahl gering auftretenden harten K-Fehler können nicht dieser Gruppe zugeordnet werden, sondern verteilen sich auf die gesamte Lerngruppe, ebenso die Fehler beim schriftlichen Rechnen.

4.2 Varianten der Komplementbildung

Wie in Kap. 2.2 beschrieben, wird in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik der Begriff *Ergänzen* in der Regel als Bezeichnung für die 5. Rechenstrategie der halbschriftlichen Subtraktion verwendet, und dabei als schrittweises additives Auffüllen vom Subtrahenden zum Minuenden beschrieben. In dieser Arbeit wird aber an Stelle der Strategie *Ergänzen* das komplementbildende Rechnen als Wechsel der Grundvorstellung angesehen, in der die vier Strategievarianten Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen denkbar sind, analog zu diesen in der Grundvorstellung Wegnehmen.

Zusätzlich können in der Grundvorstellung Komplementbildung Operationen sowohl im Additionsformat als auch im Subtraktionsformat notiert werden, so dass damit grundsätzlich acht komplementbildende Strategievarianten denkbar sind, wie sie in Tabelle 2.4 (S. 43) dargestellt wurden.

Darüber hinaus werden die Strategiekategorien in der didaktischen Literatur oft in idealtypischer Ausführung an Musteraufgaben beschrieben, etwa das schrittweise wegnehmende Rechnen in der Zerlegung des Subtrahenden in die Stellenwertbestandteile, beim auffüllenden additiv- schrittweisen Komplementbilden dann aber häufig in der Variante „zu glatten Zwischenzahlen“ (vgl. Kap. 2.2.2), im Unterricht finden sich aber (vgl. ebd.) durchaus variantenreicherer Subformen, die sich in der Zerlegungsanzahl und Rechenschrittreihenfolge von den idealtypischen Musteraufgaben unterscheiden können.

Als weiterer Aspekt zur Ergründung des Stellenwertes des komplementbildenden Rechnens kann daher der Variantenreichtum innerhalb der Komplementbildung angesehen werden. Wie im vorangegangenen Kapitel, in dem ebenso mit der Verwendungshäufigkeit verfahren wurde, soll nun in diesem Kapitel das Auftreten verschiedener Varianten des komplementbildenden Rechnens im Unterricht absolut und chronographisch analysiert werden. Daher werden in diesem Kapitel Befunde zu folgendem Forschungsinteresse dargestellt:

FI2: Welche Varianten von Komplementbildung lassen sich im Unterricht wann beobachten, wie …
1. *Rechnungen im Additions- oder im Subtraktionsformat,*
2. *Rechnungen in der Strategiekategorie Schrittweise,*
3. *Stellenweise,*
4. *Hilfsaufgabe und*
5. *Vereinfachen, sowie*
6. *Varianten der Rechenarten und Notationsformen?*

Dazu werden – analog zum vorangegangenen Kapitel – Verteilungsdarstellungen herangezogen, verdeutlichende Schülerdokumente analysiert, und – als in diesem Kapitel neues Hilfsmittel – Unterrichtsinteraktionen herangezogen, um das in den Dokumenten vorhandene bzw. nicht immer sichtbare Vorgehen der Kinder präzisieren und die darin enthaltene Erkenntnis interpretieren zu können.

Im Einzelnen folgen die Unterkapitel dabei den Blöcken des Strukturbaums für mentale Arithmetik II (vorgestellt in Kap. 3.4.2). Das Kap. 4.2.1 widmet sich dabei dem Auftreten der Campbellschen Formate (Additionsformat, Subtraktionsformat) in der Grundvorstellung Komplementbildung, anschließend wird in den Kap. 4.2.2 bis 4.2.5 komplementbildendes Rechnen in jeweils einer der vier denkbaren Strategiekategorien Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen näher betrachtet. In Kap. 4.2.6 wird dann die Wahl der Rechenart (halbschriftlich oder internalisiert) und der Notationsform (informell, in der Notationskonvention für halbschriftliches Rechnen, bzw. die Nutzung des Rechenstrichs) dargelegt. Das Kap. 4.2 schließt mit einer Zusammenfassung der Befunde der vorangehenden Teilkapitel (Kap. 4.2.7).

4.2.1 Formate

Wie in Kap. 2.1.1 beschrieben, können Rechnungen in der Grundvorstellung Komplementbildung sowohl im Additionsformat als auch im Subtraktionsformat durchgeführt werden. Dem Strukturbaum für mentale Arithmetik weiter folgend, wäre nach der Zuordnung einer Rechnung zur Grundvorstellung Komplementbildung diese Unterscheidung das erste Kategorisierungsmerkmal innerhalb dieser Grundvorstellung (vgl. Abbildung 4.16).

Abbildung 4.16: Strukturbaum „Mentale Arithmetik" II, Fokus auf Formate der Komplementbildung

Darstellung der Verteilung der Formatwahl

In Abbildung 4.17 (S. 142) sind diejenigen Dokumente markiert und ausgezählt, die mindestens eine Rechnung erkennbar im Additionsformat der Grundvorstellung Komplementbildung enthalten, und ebensolche, die erkennbar im Subtrak-

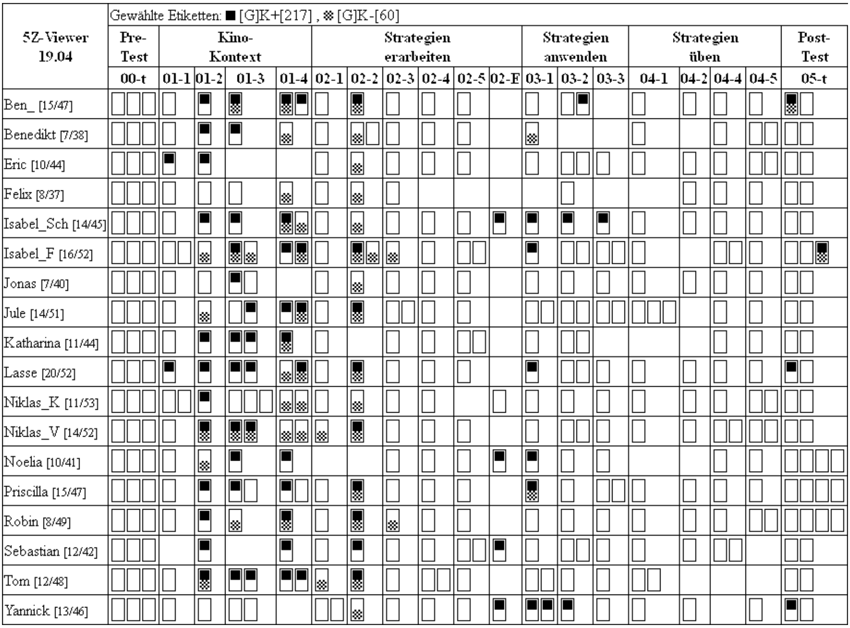
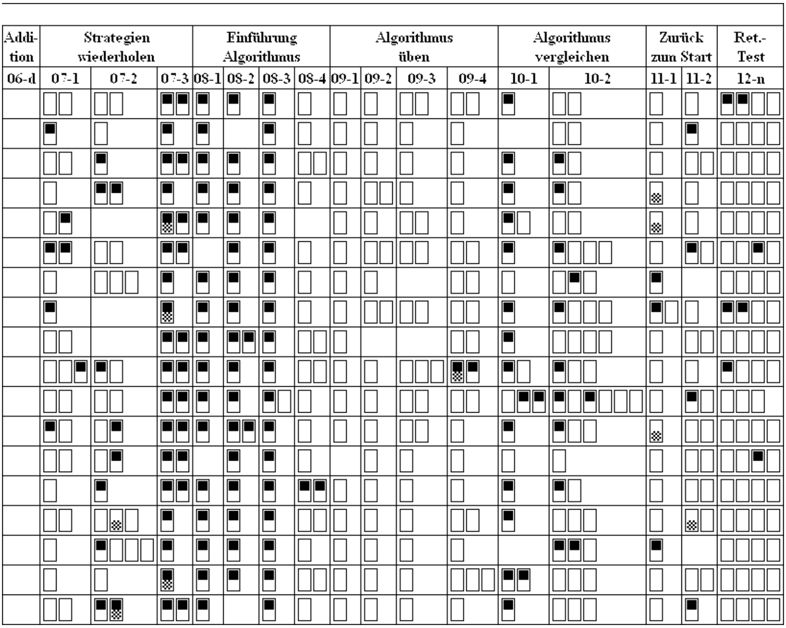


Abbildung 4.17 (beide Seiten): Verteilung K-Dokumente auf Additions-/ Subtraktionsformat

tionsformat ausgeführt sind, sowohl in der halbschriftlichen Rechenart als auch im Kopf, in jeglicher Strategievariante. Nicht markiert sind Dokumente, die zwar in der Grundvorstellung Komplementbildung gerechnet werden, bei denen aber das Format nicht eindeutig erkennbar ist – dies kann zum Beispiel der Fall sein, wenn ein Kind „Ich habe ergänzt" neben eine im Kopf gerechnete Minusaufgabe schreibt, die dann nur das Ergebnis ohne weitere Angaben zum Rechenweg oder eine Umwandlung in den Komplementbildungsansatz beinhaltet, an dem man das Format ablesen könnte.

In Kap. 4.1.1. wurde dargestellt (vgl. Abbildung 4.2, S. 112), dass auf 266 Dokumenten mindestens eine Rechnungen in der Grundvorstellung Komplementbildung auftritt. Abbildung 4.17 (oben) schlüsselt diese in die Formate auf: Es sind 217 Dokumente markiert, die mindestens eine solche Rechnung im Additionsformat enthalten, und 60 Dokumente, die eine Komplementbildung im Subtraktionsformat enthalten. Dabei treten in einigen Dokumenten beide Formate auf. Nicht markiert sind 17 Dokumente der 266 Dokumente aus Abbildung



Legende: ☐ = ein Dokument; [G]K+, Etikett ■ = Etikettengruppe *Komplementbildung im Additionsformat*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellungsvariante; [G]K-, Etikett ▩ = Etikettengruppe *Komplementbildung im Subtraktionsformat*, enthält mindestens eine solche mentalarithmetische Rechnung in dieser Grundvorstellung.

4.2 (S. 112), die sich nicht eindeutig einem Format zuordnen lassen, diese treten schwerpunktmäßig in den Blöcken 07 (Strategien wiederholen) und 10 (Algorithmus vergleichen) auf.

In der Summe scheinen zunächst Rechnungen im Additionsformat gegenüber denen im Subtraktionsformat häufiger aufzutreten (Verhältnis etwa 4:1). Die chronographischen Häufigkeiten für das Additionsformat unterscheiden sich dabei nicht von denen der gesamten K-Strategien, hier treten die gleichen Cluster auf. Dagegen ist in Abbildung 4.17 (S. 142) deutlich erkennbar, dass sich ein starkes Cluster für das Subtraktionsformat in den explorativen Blöcken 01 (Kino-Kontext) und 02 (Strategien erarbeiten) bildet, dagegen in den folgenden Blöcken das Subtraktionsformat nur noch in einzelnen Sprenkeln auftaucht, aber auch nie längerfristig ganz verschwindet, sondern über den gesamten Unterrichtsversuch beobachtbar bleibt.

Eine Auszählung der Verteilung beschränkt auf die explorativen Blöcke 01 und 02 (ohne Förderstunde 02-e, da hier keine freie Formatwahl gegeben war) ergibt ein differenzierteres Bild. Hier sind es 54 Dokument mit mindestens einer additiven K-Rechnung, während 46 Dokumente mindestens eine solche im Subtraktionsformat enthalten, also eine annähernde Gleichverteilung. Die Auszählung des Restes, also aller Stunden mit Ausnahme der Blöcke 01 und 02, ergibt dann eine deutliche Verteilung von 163 K(+) Dokumenten zu 14 K(-) Dokumenten. Schränkt man die Auszählung auf Stunden mit offener Strategiewahl ein, so ergibt die Auszählung 72 K(+) und 18 K(-) Dokumente, ein Verhältnis von 4:1, was dann wiederum der Gesamtverteilung entspricht (alle drei Subverteilungen werden hier aus Platzgründen nicht abgedruckt, sie sind grundsätzlich auch in der Abbildung 4.17, S. 142, enthalten).

Eine Auswertung der schülerbezogenen relativen Häufigkeiten (die Verteilung ist hier ebenfalls aus Platzgründen nicht abgedruckt) ergibt, dass sich die 60 K(-) Dokumente in allen Stunden auf 17 Kinder mit Häufigkeiten zwischen 1 und 8 Dokumente verteilen, 1 Kind nutzt nie das Subtraktionsformat. Eingeschränkt auf Stunden mit offener Strategiewahl verteilen sich die dort auftretenden 18 K(-) Dokumente auf 10 Kinder mit Häufigkeiten zwischen 1 und 4 Dokumenten, 8 Kinder nutzen das Subtraktionsformat in diesen Stunden nicht.

Darstellung des Auftretens des Additionsformates

Die ersten zwei in der Grundvorstellung Komplementbildung ausgeführten Rechnungen im Unterricht der Studie (Stunde 01-1, Kino-Kontext) sind im Additionsformat ausgeführt, von denen Erics Rechnung hier exemplarisch vorgestellt wird (Abbildung 4.18, S. 145).

Sein Vorgehen zur Lösung der Kontextaufgabe „Im Kino sitzen 526 Leute, 389 davon gehen zur Pause“, die eigentlich wegnehmen intendieren soll, ist dabei der Strategie K-Schrittweise im Format Addition zuzuordnen: Er bildet das Komplement der leeren Stühle als Teilmenge der Gesamtsitzplätze, in dem er die Lücke zwischen der Anzahl der leeren Stühle (389) und der Gesamtsitzplatzzahl (526) durch Auffüllen mit sitzenden Personen bestimmt, wie aus seinem Kommentar „Es sind 137 Leute die noch sitzen“ hervorgeht. Die Einteilung der Schritte wählt Eric dabei so, dass er zweimal mit glatten Hunderterzahlen rechnen kann: Zunächst ergänzt er die 389 zur 400, um sich dann mit einem Hunderterschritt dem Ergebnis 526 anzunähern, um schließlich den Rest der Lücke zwischen 500 und 526 zu bestimmen. Nachdem er diese Rechnung in halbschriftlicher Notation erzeugt hat, transformiert er diese in eine Darstellung am Rechenstrich.

Nach einer Intervention der Lehrerin (sie fragt danach, wie man am Rechenstrich das Ergebnis ablesen kann) notiert Eric einen Kommentar zu Rechnung, indem er seine Schritterzeugung expliziert, sowie ein Hinweis, dass das Ergebnis bei der Veranschaulichung des Rechenwegs am Rechenstrich nicht direkt ablesbar ist, sondern erst die Summe der Bogenzahlen das Ergebnis darstellt.

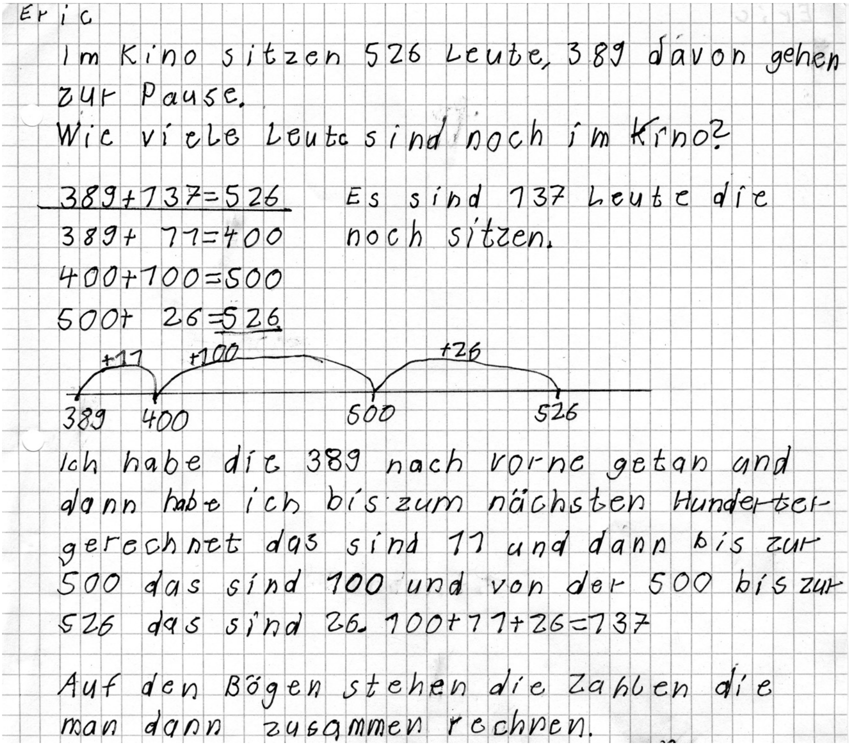


Abbildung 4.18: Eric, Stunde 01-1, Arbeitsphase, Ausschnitt

Zu Beginn der Folgestunde findet eine gemeinsame Reflexion der Ergebnisse der Stunde 01-1 statt. Insgesamt sieben Schülerdokumente werden ausschnittsweise an der Tafel vorgestellt und von den Kindern interpretiert, zunächst schrittweise Rechnungen in der Grundvorstellung Wegnehmen, dann aber unter anderem auch den gerade vorgestellten Rechenweg von Eric, den die Lehrerin als „prinzipiell anders“ kennzeichnet: Ein Ausschnitt (begrenzt auf den Teil der halbschriftlichen Rechnung und dem Rechenstrich sowie der Kontext-Antwort) aus Erics Dokument der Vorstunde wird groß an der Tafel präsentiert und gemeinsam thematisiert (vgl. Transkript 1, S. 264). Niklas_V kennzeichnet das Format von Erics Rechnung als abweichend gegenüber den zuvor besprochenen Rechnungen des Wegnehmens („Der hat addiert und nicht subtrahiert“, Z. 006), beschreibt die Ermittlung des Komplements durch Auffüllen des Minuenden zum Subtrahenden („der hat, ähm, nämlich, 389 plus (betont) gerechnet, bis er bei der 526 war“, ebd.), weist auf die unterschiedliche Bedeutung der Zahlen hin, speziell darauf, dass das Ergebnis erst durch Addition der Teilschritte bzw. der Bogenzahlen am Rechenschritt ermittelt werden muss („und dann hat er glaube ich die Zahlen zusammengerechnet“, ebd.), um schließlich eine Interpretation der Bedeutung des Ergebnisses im Sinne des Kontextes zu geben („und dann kam er auf die Zahl der Leute, die noch sitzen.“, ebd.). Den von der Lehrerin (Z. 007) geforderten „Fachausdruck“ für dieses Vorgehen bezeichnet Lasse (Z. 008) als „Ergänzungsaufgabe“.

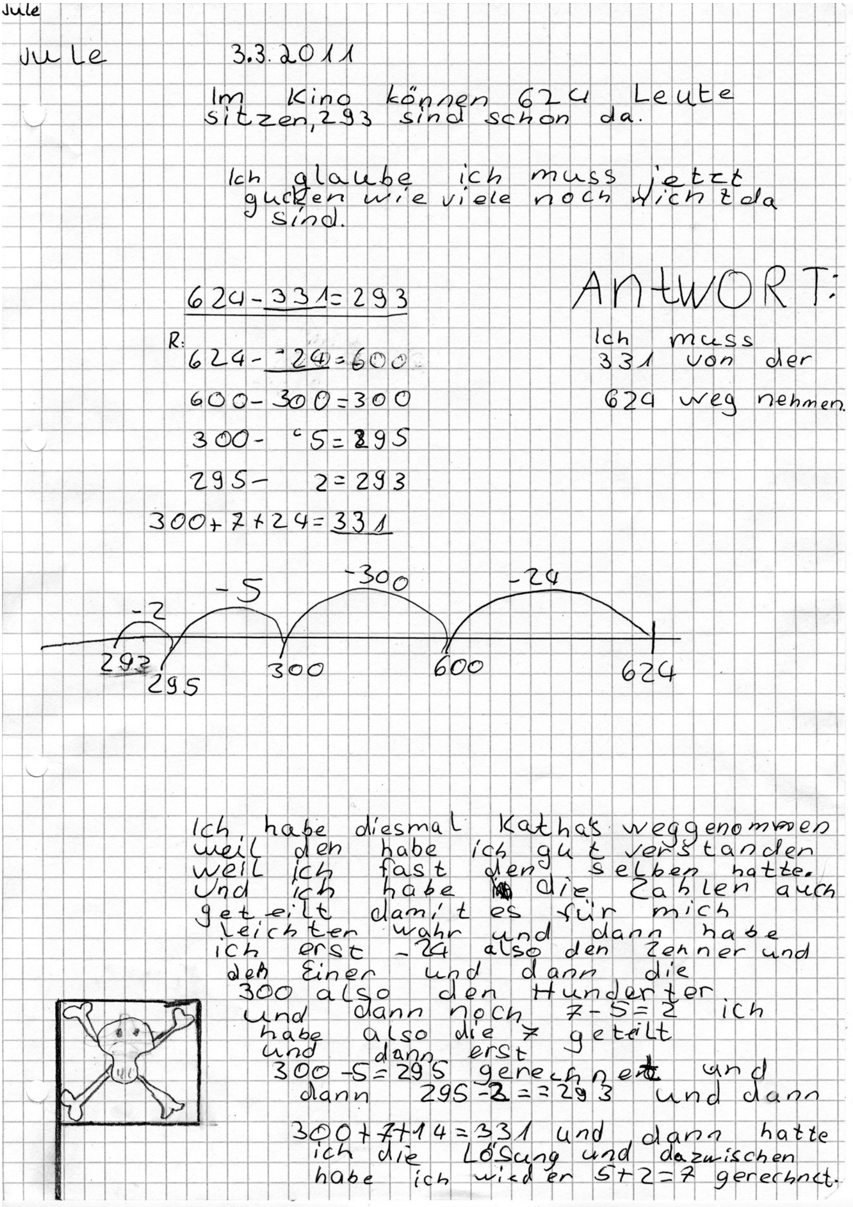
Darstellung des Auftretens des Subtraktionsformates

In der zweiten Stunde des Kino-Blocks (Stunde 01-2) entstehen dann die ersten Rechnungen im Subtraktionsformat, originär aus dem Denken der Kinder, ohne dass die Lehrerin (oder der Kontext) das Entleeren von Minuend zu Subtrahend anregt. Gleich 5 Kinder wählen in dieser Stunde das Subtraktionsformat zur Komplementbildung, exemplarisch wird hier das Dokument von Jule vorgestellt (Abbildung 4.19, S. 147).

Jule wechselt bei der Bearbeitung der Kontextaufgabe „Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da“, die eigentlich additives Auffüllen intendiert, auch in die Grundvorstellung Komplementbildung. Sie löst aber die Aufgabe halbschriftlich und zusätzlich veranschaulichend am Rechenstrich strukturell sehr ähnlich dem zu Stundenbeginn vorgestellten Rechenweg von Eric, ebenfalls mit einer Schritterzeugung, die zu „glatten“ Zwischenlandungen führt (s.o.), jedoch im Subtraktionsformat, also entleerend, rückwärtsschreitend vom Minuenden 624 zum Subtrahenden 293.

Jule gibt mit dem Kommentar „Ich glaube ich muss jetzt gucken wie viele noch nicht da sind“ ein Indiz dafür, dass auch hier der Kontext zumindest einen Teil der Rolle gespielt haben könnte, warum sie in die Grundvorstellung Komplementbildung wechselt. Ihre Antwort „Ich muss 331 von der 624 wegnehmen“ passt zu den zur Komplementbildung durchgeführten Rechenhandlungen, aber im Weiteren gibt sie auf ihrem Dokument zu Protokoll: „Ich habe diesmal Kathas weg genommen weil den habe ich gut verstanden.“ Katharinas eingangs der Stunde thematisierter Rechenweg, auf den sie hier rekurriert, ist aber eine schrittweise Strategie in der Grundvorstellung Wegnehmen, Jule aber rechnet schrittweise in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Zu Beginn der Folgestunde (01-3) darf u. a. Jule ihren Rechenweg (als Ausschnitt, begrenzt auf halbschriftliche Rechnung und Rechenstrichnotation) an der Tafel vorstellen, die anderen Kinder reflektieren darüber (vgl. Transkript 2, S. 264). Jule beschreibt dabei zunächst (Z. 001) die einzelnen Rechenschritte, und dann die Ermittlung des Ergebnisses: „Die ich hier weggenommen habe (zeigt auf 24, 300, 5, 2), die habe ich dann noch einmal zusammengerechnet“ (ebd.). Als die Lehrerin eine Begründung dafür hören möchte (Z. 002), bringt Jule als Argument: „Ähm, damit ich auf das Ergebnis komme, weil, ich habe die ja weggenommen (betont weggenommen), weil, wenn ich das (zeigt auf 24,



Jule

Jule 3.3.2011

Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da.

Ich glaube ich muss jetzt gucken wie viele noch nicht da sind.

624-331=293

R:
624-24=600
600-300=300
300-5=295
295-2=293
300+7+24=331

ANTWORT:
Ich muss 331 von der 624 weg nehmen.

Ich habe diesmal Kathas weggenommen weil den habe ich gut verstanden weil ich fast den selben hatte. Und ich habe die Zahlen auch geteilt damit es für mich leichter wahr und dann habe ich erst -24 also den Zehner und den Einer und dann die 300 also den Hunderter und dann noch 7-5=2 ich habe also die 7 geteilt und dann erst 300-5=295 gerechnet und dann 295-2==293 und dann 300+7+14=331 und dann hatte ich die Lösung und dazwischen habe ich wieder 5+2=7 gerechnet.

Abbildung 4.19: Jule, Stunde 01-2, Arbeitsphase

300, 5, 2) minus gerechnet hätte, käme da ja viel weniger raus, und deswegen musste ich das plus rechnen“ (Z. 003).

Im nächsten Interaktionsabschnitt (vgl. Transkript 3, S. 264) benennt Priscilla die Strategie von Jule zwar als „Ergänzen“ (Z. 002), die Lehrerin aber überhört diese Bezeichnung, und redet mit den Kindern vornehmlich über Notationskonventionen (Z. 005-012, Abgrenzung der Nebenrechnung durch einen Strich, Kennzeichnung der Komplementlücke im Aufgabenansatz durch einen Unterstrich, Unterstreichen des Ergebnisses).

Im letzten Jules Dokument zuzuordnenden Interaktionsabschnitt (vgl. Transkript 4, S. 265) redet die Lehrerin mit den Kindern über Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem halbschriftlichen Rechenweg und der Darstellung am Rechenstrich, vor allem darüber, dass am Rechenstrich das Ergebnis durch Addition der Bogenzahlen ermittelt werden muss (Z. 011-018). Abschließend definiert die Lehrerin Jules Strategie: „Also, Jule hat jetzt eine Minus (betont Minus, zeigt auf 624-331=293) Ergänzungsaufgabe gemacht. Ganz schön schwer. Fand ich das“ (Z. 022).

Darstellung der Benennung beider Formate

Im weiteren Verlauf der gemeinsamen Interaktion über Rechenwege der Vorstunde wird auch ein Ausschnitt aus dem Dokument von Niklas_V (zweite Rechnung, 293+___=624, Abbildung 4.21, S. 151) gemeinsam thematisiert (vgl. Transkript 5, S. 266). Diese Rechnung entspricht der Strategie K-Schrittweise im Additionsformat, die Niklas mit „Eric“ gekennzeichnet hat, was zunächst in der Interaktion von der Lehrerin auch als Strategiekennzeichnung (Z. 001) interpretiert wird. Nach Hinweisen zu Notationskonventionen (Nebenrechnung von der Ursprungsaufgabe durch Strich abgrenzen) kennzeichnet sie diesen Weg als Besonderheit: „aber, der hat ja noch was ganz anderes gemacht, der hat ja eine Plusaufgabe gemacht“ (Z. 001), worauf dieser von Isabel_F als „Ergänzungsaufgabe … mit plus“ (Z. 006) benannt wird.

Darstellung der Kultivierung der Formatwahl

Wie bereits weiter oben beschrieben, tritt vor allem in den explorativen Blöcken das Subtraktionsformat häufig auf. Bis zum Ende von Block 02 sind es 46 Dokumente mit mindestens einer Rechnung im Subtraktionsformat gegenüber 54 Dokumenten mit mindestens einer Rechnung im Additionsformat. Diese Zahlen sind stundenweise aufgeschlüsselt in Tabelle 4.2 (S. 149) dargestellt, zusätzlich sind dort für die Thematisierung der Formatwahl wichtige Ereignisse dargestellt.

Bereits in der Stunde 01-2, in der zu Beginn lediglich das Ergänzen generell an Erics Rechenweg thematisiert wurde, ohne die Möglichkeit des Formatwechsels zu erwähnen, wechseln 5 Kinder in das Subtraktionsformat, und lösen die Kontextaufgabe „Im Kino sitzen 624 Leute, 293 sind schon da“ entleerend.

Tabelle 4.2: K(+) und K(-) in den explorativen Blöcken 00 bis 02

Stunde	**Inhalt** *& für die Thematisierung der Formatwahl wichtiges Ereignis*	**K+**	**K-**
00-t	Pretest	0	0
01-1	„Im Kino sitzen 526 Leute, 389 davon gehen zur Pause.“	2	0
01-2	*Zu Beginn der Stunde wird u.a. Erics Rechnung in K(+) vorgestellt (Transkript 1, S. 264)* „Im Kino sitzen 624 Leute, 293 sind schon da.“	12	5
01-3	*Zu Beginn der Stunde wird u.a. Jules Rechnung in K(-) vorgestellt (Transkript 2 bis Transkript 4, S. 264-265)* Doppelstunde, Kino-Aufgabenpool, 12 Säle mit 120 bis 624 Plätzen, wahlweise „..293 sind schon da“ oder „…137 gehen…“ *Am Ende der Stunde werden Priscillas Rechnung in K(+) und Robins Rechnung in K(-) gegenübergestellt, die Formatwahl kultiviert (in diesem Kapitel weiter unten, Transkript 6, S. 266)*	16	6
01-4	Doppelstunde, Weiterarbeit am Kino-Aufgabenpool *Am Ende der Stunde werden Katharinas Rechnung in K(-), kleinschrittig Schrittweise, und Robins Rechnung in K(-),Schrittweise mit der Idee des Stelle Herstellens und Rechenrichtungswechsel, gegenübergestellt.*	15	15
02-1	Pflicht*: 1 Aufgabe in W-Schrittweise	0	2
02-2	*Zu Beginn der Stunde wird „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ an zwei Beispielen in K-Schrittweise aus den vorangegangenen Stunden als Strategie-Kategorisierung angeregt.* Pflicht*: 2 Aufgaben in „Ergänzen(+)“ oder „Ergänzen (-)“	9	16
02-3	Pflicht*: 1 Aufgabe als W-Hilfsaufgabe	0	2
02-4	Pflicht*: 1 Aufgabe mit W-Vereinfachen	0	0
02-5	Pflicht*: 2 Aufgaben in W-Stellenweise	0	0
	Summen:	**54**	**46**
02-e	Förderstunde für 5 Kindern, von denen 4 „Ergänzen(+)“ wiederholen, keine freie Formatwahl	4	0

* In allen Stunden des Blocks 02 durften die Kinder nach Bearbeitung der Pflichtaufgaben weitere sogenannte „Kür“-Aufgaben mit beliebiger Strategie rechnen.

Mit Beginn der Stunde 01-3 kennen die Kinder dann auch eine Rechnung im Subtraktionsformat, da – aus den 5 Dokumenten mit K(-) der Vorstunde ausgewählt – Jules Rechenweg vorgestellt und als „Minusergänzungsaufgabe“ bezeichnet wird. Auch in dieser Stunde wählen einige Kinder das Subtraktionsformat (es ist auf 6 Dokumenten zu finden), die Mehrheit aber probiert sich noch im additiven Ergänzen (in 16 Dokumenten enthalten).

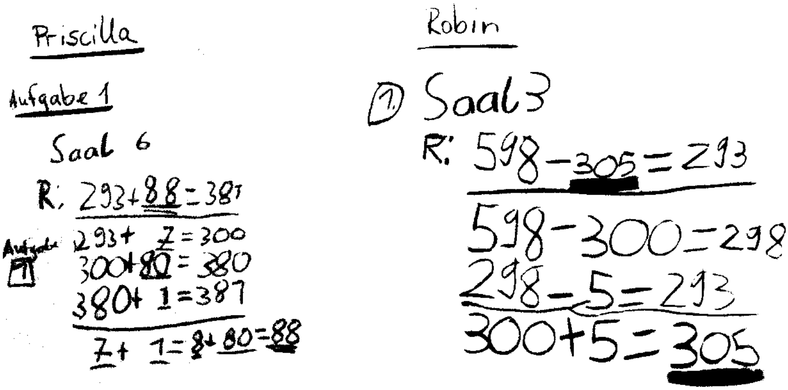


Abbildung 4.20: Tafelanschrieb (invertiert), Stunde 01-3, Reflexionsphase

Am Ende dieser Stunde beschließt die Lehrerin, je einen strukturähnlichen Rechenweg in K(+) und K(-) gegenüberzustellen: Priscillas und Robins Rechenwege (Abbildung 4.20, oben) stellen beide schrittweise Strategien in der Grundvorstellung Komplementbildung dar (zu erkennen an der Komplementlücke im Rechnungsansatz), wenn auch an unterschiedlichen Aufgaben mit unterschiedlicher Idee der Schritterzeugung. Die Lehrerin fokussiert mit „Wer sieht denn den Unterschied bei der Aufgabe. Jetzt nicht mit den Zahlen, sondern nur die Aufgabe“ (Transkript 6, S. 266, Z. 001), auf den Unterschied in der Formatwahl. Sie blendet Äußerungen zum Rechenweg (Z. 002) wie zum Kontext (Z. 005) aus, bis die Kinder (Z. 007-012) zunächst in Teilbeschreibungen, dann aber Lasse deutlich mit „Katharina hat eine Plus-Ergänzung und Robin hat eine Minus-Ergänzung. Das ist genau das Gegenteil, nur dass es beide Ergänzungsaufgaben sind“ (Z. 015) die Formatwahl kennzeichnen als Unterscheidungskriterium beider in der Grundvorstellung Komplementbildung stehenden Aufgaben.

In der folgenden Stunde, der Stunde 01-4, treten nun genau so häufig Dokumente auf, die das Subtraktionsformat enthalten, wie solche mit dem Additionsformat. Einige Kinder kennzeichnen Rechenwege in der Stunde 01-4 explizit mit „Robin“ bzw., „Prisci“ und damit der bewussten Entscheidung, sich für das Subtraktionsformat bzw. das Additionsformat entschieden zu haben (vgl. Abbildung 4.58, S. 233 oder Abbildung 4.10, S. 127).

Noch einmal greift die Lehrerin die Formatwahl im Unterricht auf: Mit der Einführung der Begriffe „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ als Bezeichnungen für Strategiekategorien zu Beginn der Stunde 02-2 weicht die Lehrerin von der eigentlich geplanten Vorgehensweise ab, die fünf in der deutschen Mathematik-

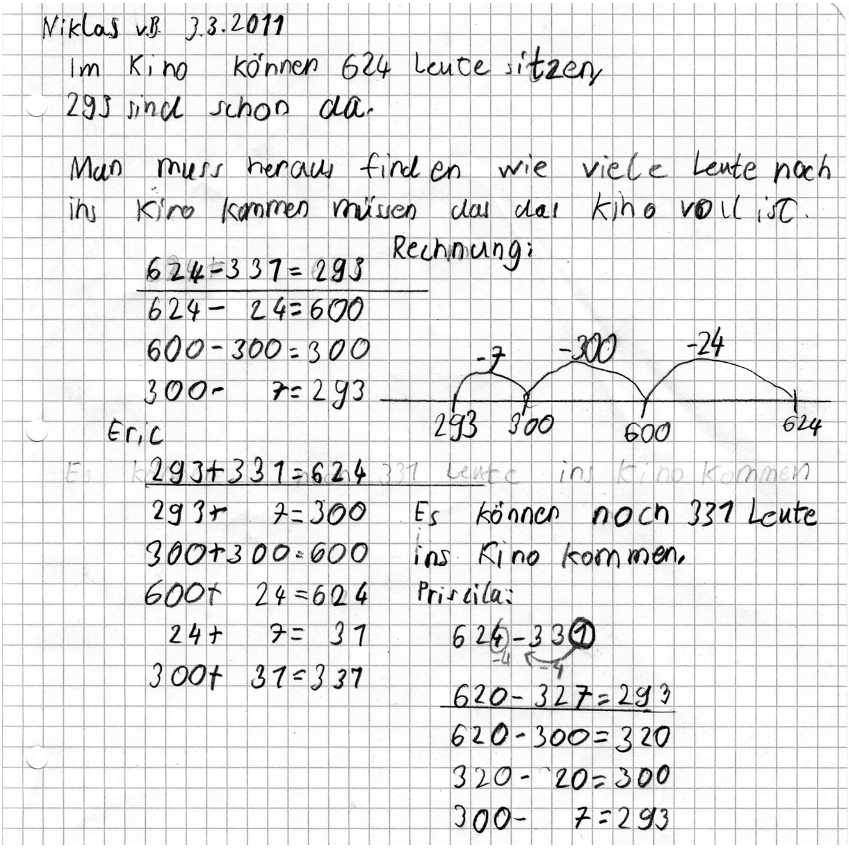


Abbildung 4.21: Niklas_V, Stunde 01-2, Arbeitsphase

didaktik üblichen Strategiekategorien als Kategoriensystem einzuführen, in dem sie „Ergänzen“ in „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ differenziert, also sechs Strategiekategorien im Unterricht herausarbeitet.

Darstellung der Koexistenz beider Formate

Wie in Abbildung 4.17 (S. 142) erkenntlich, treten auf einigen Dokumenten beide Formate parallel nebeneinander auf. So rechnet Niklas_V (Abbildung 4.21, oben) zunächst selbst entleerend im Subtraktionsformat (624-___=293), um dann die Rechenrichtung mit allen Teilschritten umzukehren, und den mit „Eric“ (der zu Stundenbeginn einen ersten Rechenweg in der Grundvorstellung

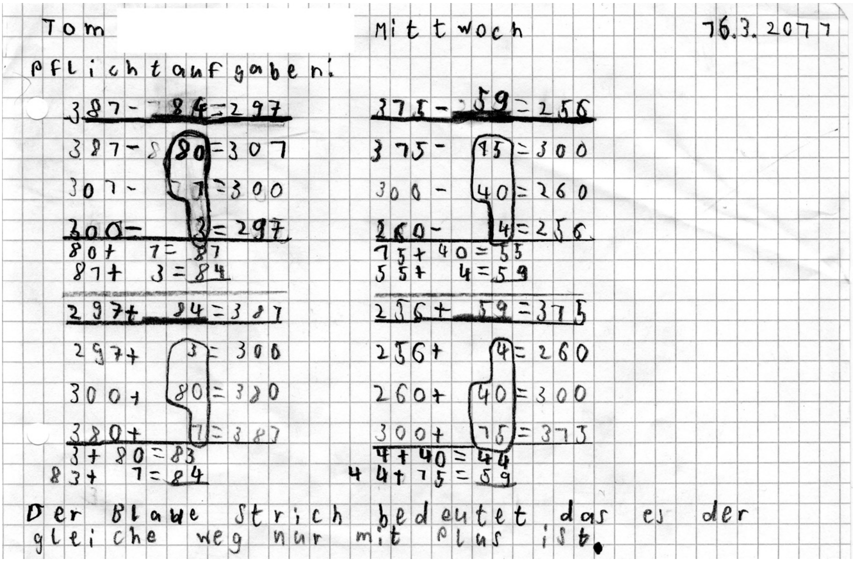


Abbildung 4.22: Tom, Stunde 02-2, Arbeitsphase, Ausschnitt

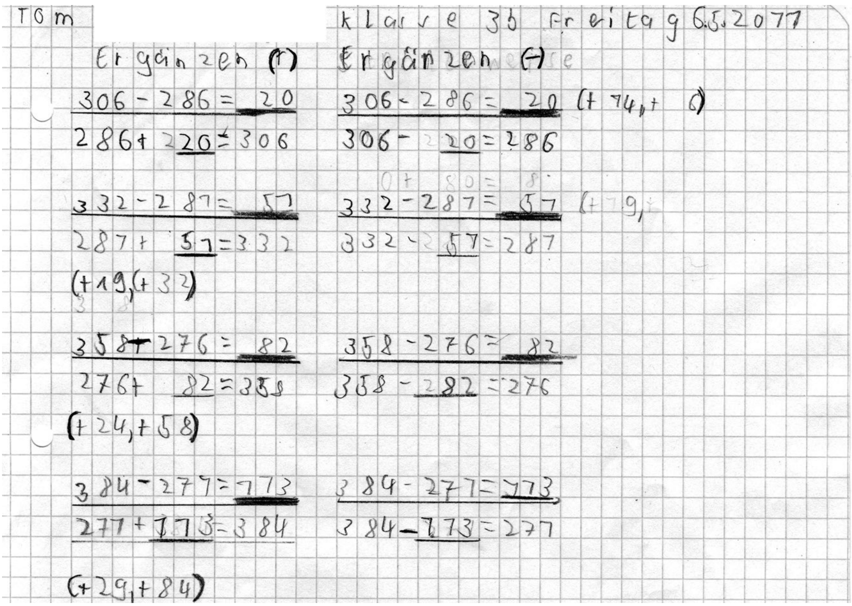


Abbildung 4.23: Tom, Stunde 07-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Komplementbildung im Additionsformat vorgestellt hat) gekennzeichneten zweiten Rechenweg zur selben Aufgabe im Additionsformat zu produzieren.

Tom (Abbildung 4.3, S. 117) produziert direkt vier Rechenwegvarianten in K-Schrittweise zur Kontextaufgabe, zwei davon im Additions-, und zwei im Subtraktionsformat. Dabei stellt der dritte und vierte Weg eine Verkürzung des ersten und zweiten dar, denn hier hat Tom in beiden Fällen zwei Rechenschritte zu einem zusammengefasst (vermutlich eine intuitive Anwendung des Assoziativgesetzes, als *theorem in action*, vgl. Kap. 2.2.1).

Auch in der Stunde 02-2 (es wird „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ als Strategiekategorie thematisiert, s.o.) rechnet Tom die zwei Pflichtaufgabe der Stunde jeweils zunächst im Subtraktionsformat, dann im Additionsformat (Abbildung 4.22, S. 152), und fügt unten als Kommentar zu den zweiten Rechnungen im Additionsformat hinzu, „[…] dass es der gleiche Weg nur mit Plus ist“.

Noch einmal greift Tom in der Stunde 07-3 wieder darauf zurück, jede Rechnung in beiden Formaten zu produzieren (Abbildung 4.23, S. 152). In einer Art tabellarischer Darstellung rechnet Tom die Aufgaben zunächst im Additionsformat im Kopf mit der internalisierten Strategie K-Schrittweise, die man an den Schritten in der Klammernotation (vgl. *shortcuts* in Kap. 2.2.2) erkennen kann, um dann daneben die gleiche Rechnung im Subtraktionsformat zu wiederholen.

Deutung der Verteilung der Formatwahl

Wie in Kap. 2 dargestellt, findet die entleerende Komplementbildung, die *indirect subtraction*, also das Subtraktionsformat, noch wenig Beachtung als Strategiekategorie in den Kategoriensystemen der dort vorgestellten Studien. Wenn das Subtraktionsformat dort als Kategorie Berücksichtigung findet, finden sich nur marginal Rechnungen in diesem Format.

In dieser Studie tritt das Subtraktionsformat dagegen häufig auf, vor allem in den explorativen Blöcken (46 Dokumente im Vergleich zu 54 im Additionsformat). In Block 07 (Strategien wiederholen) und Block 08 (Einführung des Algorithmus) setzt die Lehrerin dann aber stark auf das additiv-auffüllende Komplementbilden, um mit der Subform *Ergänzen stellengerecht* (vgl. Kap. 2.3) einen eleganten Weg zum schriftlichen Algorithmus einzuschlagen. Mit diesem Hintergrund ist erklärbar, warum das Subtraktionsformat am Ende nur noch geringere Fallzahlen aufweist (im Block 08 kommt es gar nicht vor). Dennoch bleibt das Subtraktionsformat bis zum Ende des beobachteten Unterrichts immer präsent, wenn auch in geringeren Fallzahlen.

Eine Auswertung der schülerbezogenen Häufigkeiten der Nutzung des Subtraktionsformates stellt sich wie folgt dar: Ein Schüler (Sebastian) nutzt das Subtraktionsformat nie, bei allen anderen finden sich 1 bis 6, bei zwei Kindern 8 Dokumente (ausgezählt in Abbildung 4.17, S. 142), auf denen mindestens einmal eine Rechnung im Subtraktionsformat auftritt. Auf Grund der geringen

Fallzahlen der insgesmat 60 Dokumente im Subtraktionsformat (in Relation zu 707 Dokumenten, die strategisches Rechnen enthalten, und 266 mit auftretendem komplementbildenden Rechnen) sollen hier keine relativen Häufigkeiten pro Schüler berechnet werden, sondern die 1 bis 6 Dokumente pro Kind eher als Schwankung um den Mittelwert von 3 Dokumenten pro Kind (60 Dokumente/18 Kinder) angesehen werden.

Deutung der Befunde in den Initial-Dokumenten zur Formatwahl

In den weiter oben beschriebenen zwei exemplarischen Dokumenten, in denen das Additions- und Subtraktionsformat erstmalig auftritt, treten diverse Aspekte komplementbildenden Rechnens (z.B. Kontext, Rechenstrich, Notationskonventionen, etc.) auf, die an anderen Orten dieser Arbeit noch wieder aufgegriffen werden, an dieser Stelle richtet sich der Blick rein auf den Aspekt der Formatwahl.

Dass Eric (als eines von zwei Kindern) bereits in der ersten Stunde des explorativen Kino-Kontext-Blockes in die Grundvorstellung Komplementbildung wechselt, obwohl die Kontextaufgabe eher das Wegnehmen intendiert, veranlasst die Lehrerin, mit Hilfe seines Dokumentes die anderen Kindern an die aus dem zweiten Schuljahr bekannte Möglichkeit zu erinnern, eine „Ergänzungsaufgabe“ an Stelle einer wegnehmenden Subtraktionsaufgabe zu rechnen. „Ergänzen“ ist zu dieser Zeit vermutlich für die Lehrerin die fünfte halbschriftliche Strategiekategorie, abgegrenzt von den vier wegnehmenden Strategiekategorien. In der Klasse wird vermutlich auf Grund der Vorerfahrungen aus dem zweiten Schuljahr „Ergänzen“ als additiv-auffüllendes Komplementbilden verstanden, da z.B. Niklas_V mit der Betonung des Wortes „plus“ auf den Unterschied zum Wegnehmen hinweist. Daher wird Erics Strategie mit dem Begriff „Ergänzungsaufgabe“ belegt, was zu diesem Zeitpunkt eine zufriedenstellende Kategorisierung darstellt.

Aus den Dokumenten der Stunde 01-2 des Kino-Blocks, deren Kontext-Aufgabe dann auch Komplementbildung intendiert („… sind schon da“), wählt die Lehrerin neben Schülerlösungen, die additivem Komplementbilden oder Wegnehmen zuzuordnen sind, auch Jules Rechenweg im Subtraktionsformat zur Reflexion und damit zur Anregung der Zone der nächsten Entwicklung aus, regt damit also ganz bewusst die Möglichkeit an, in der Grundvorstellung Komplementbildung auch subtraktiv-entleerend die Komplementspanne zu ermitteln. Zunächst überhört sie den Einwurf Priscillas, dass es sich hier ebenso um Ergänzen handele, weil sie mit der Thematisierung der Notationskonventionen beschäftigt ist. Dieser Einwurf von Priscilla lässt aber erkennen, dass beobachtende Kinder durchaus in der Lage sind zu verstehen, dass hier der Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung vollzogen wurde, wenn man Priscillas Aussage („Sie hat als erstes Ergänzen gemacht“, Transkript 3, S. 264, Z. 002) nicht als Kennzeichnung für die Strategie „Ergänzen“ im Sinne additiv-auffüllender Komplementbildung, sondern generalisierter als Ermittlung der Spanne zwischen Minuend und Subtrahend, also als Komplementbildung allgemein, versteht. Die Lehrerin selbst kennzeichnet Jules Rechenweg dann schließlich als „Minus-Ergänzungsaufgabe“ (Transkript 4, S. 265, Z. 022), und damit als neue Variante des „Ergänzens“, hier eben im Subtraktionsformat.

Da das zuvor thematisierte Beispiel von Eric allgemein als „Ergänzen“ bezeichnet wurde, muss die Lehrerin zur Abgrenzung von der „Minus-Ergänzungsaufgabe“ dann noch den passenden Begriff zum Additionsformat einführen. Diese Arbeit nimmt ihr Isabel_F ab, indem sie den nach Jules Rechnung vorgestellten Rechenweg von Niklas_V mit dem Begriff „Ergänzungsaufgabe […] mit plus“ belegt (Transkript 5, S. 266, Z. 006).

Auch wenn die Bezeichnung für die Formatwahl im weiteren Verlauf des Unterrichts noch präzisiert wird (s.u.), so sind (spätestens) ab diesem Zeitpunkt beide Formatvarianten des Komplementbildens benannt, reflektiert, und zumindest als Anregung für andere Kinder vorhanden.

Deutung der Kultivierung des Subtraktionsformates

In Tabelle 4.2 (S. 149) sowie im Text weiter oben wurde der Weg der Lehrerin dargestellt, das Subtraktionsformat als Variante des Komplementbildens zu kultivieren. Festhalten mag man hier zunächst, dass dabei das Subtraktionsformat originär aus dem Denken der Kinder entsteht (es wird keine Kontextaufgabe gestellt, die Entleeren initiieren könnte, auch kannten die Kinder es nicht aus dem zweiten Schuljahr), und die Lehrerin das Auftreten des Subtraktionsformates nicht ignoriert oder ausgrenzt, sondern bewusst aufnimmt, auch wenn sie die Begrifflickeiten für das Strategiekategoriensystem damit von „Ergänzen“ auf „Minusergänzungsaufgabe“ und „Ergänzen mit Plus“ erweitern muss.

Später, in der Stunde 02-2, glättet sie diese Begriffe mit der Einführung der Bezeichnungen „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“. Aus diesem Begriffspaar wird auch deutlicher, dass es sich um zwei Ausprägungen einer Denkweise handelt, eben der Grundvorstellung Komplementbildung. Dieser Gedanke wird aber im Unterricht nur sehr indirekt (ein weiteres Beispiel für ein *theorem in action*, vgl. Kap. 2.2.1) thematisiert.

In der Stunde 01-3, in der die Lehrerin bewusst zwei Rechnungen von Kindern nebeneinander an der Tafel in der Reflexionsphase thematisiert, eins im Additionsformat, eins im Subtraktionsformat (Abbildung 4.20, S. 150), äußert sich Lasse mit den bereits weiter oben zitierten Worten „Katharina hat eine Plus-Ergänzung und Robin hat eine Minus-Ergänzung. Das ist genau das Gegenteil, nur dass es beide Ergänzungsaufgaben sind.“ (Transkript 6, S. 266, Z. 015), und beschreibt hier vermutlich die gegensinnigen Rechenrichtungen beim Auffüllen und Entleeren, aber die gemeinsame Idee dahinter, das Ermitteln der Komplementspanne. Die Lehrerin wendet sich darauf hin an alle Kinder mit den Worten: „Hmhm. Obwohl es genau (zeigt auf Aufgabe 1 an der Tafel) Aufgabe 1 war bei beiden.“ (Z. 016, ebd.). Aufgabe 1 an der Tafel ist die Kontextvariante der Kinoaufgabe, die Komplementbildung intendieren soll („…sind schon da…“). Vermutlich möchte sie damit implizit herausstellen, dass man innerhalb dieser Grundvorstellung in beiden Formaten rechnen kann.

Deutung der Dokumente zur Koexistenz der Formate

Zumindest Tom, das legen die drei von ihm vorgestellten Dokumente nahe, scheint kein Problem damit zu haben, in der Grundvorstellung Komplementbildung prinzipiell in beiden Formaten zu rechnen, und zwischen diesen auch während einer Aufgabenbearbeitung wechseln zu können.

Während Tom jeweils Aufgabe für Aufgabe in beiden Formaten ausführt, finden sich insgesamt 31 Beispiele dafür (vgl. Dokumente mit zwei Etiketten in Abbildung 4.17, S. 142), dass die Kinder auf einem Dokument sowohl im Additions-, als auch im Subtraktionsformat rechnen, und zwischen den Aufgaben das Format wechseln. Einige Dokumente davon sind an anderen Stellen dieser Arbeit abgedruckt (z.B. Abbildung 4.10, S. 127, oder Abbildung 4.55, S. 225), mit letztgenanntem aus Stunde 09-4 darunter auch ein Dokument aus dem hinteren Teil des Unterrichts.

Auch wenn in der Literatur auf Grund der insgesamt geringen Thematisierung des Subtraktionsformates (vgl. Kap. 2) dazu keine Aussagen zu finden sind, hätte man doch befürchten können, dass das Subtraktionsformat der Komplementbildung von den Kindern zuweilen mit dem Wegnehmen verwechselt wird, da ja in beiden Fällen Minus gerechnet wird. Nur in zwei Fällen jedoch konnte bei allen 60 Subtraktionsformat-Dokumenten dieser Studie festgestellt werden, dass die Kinder „Minusrechnen“ in der Grundvorstellung Wegnehmen und das Subtraktionsformat in der Grundvorstellung Komplementbildung vermischen, ein Fall ist in Kap. 4.2.4 unter den Ausführungen zu Abbildung 4.34 (S. 174) beschrieben.

4.2.2 Schrittweise

Wie in Kap. 2.2.2 beschrieben, verbleiben vier Strategiekategorien, wenn man das in den didaktischen Handbüchern als fünfte Strategie beschriebene Ergänzen als Grundvorstellungswechsel in die Komplementbildung betrachtet. Komplementbildung wäre demnach in den Varianten Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen möglich, jeweils (wie gerade zuvor beschrieben) im Additions- und Subtraktionsformat. In diesem und den folgenden Kapiteln wird nun dem Strukturbaum für mentale Arithmetik II weiter gefolgt, nach der Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung und des Formates wird nun betrachtet, ob darin Rechnungen der Kinder diesen vier Strategiekategorien zuordbar sind. Begonnen wird in diesem Kapitel mit der Strategiekategorie Schrittweise (vgl. Abbildung 4.24, S. 157), die als basale und häufige Strategie gilt.

Abbildung 4.24: Strukturbaum „Mentale Arithmetik" II, Fokus auf schrittweise Komplementbildung

Befunde zur Verteilung von K-Schrittweise

Abbildung 4.25 (S. 158, in diesem Unterkapitel abgedruckt, aber auch noch für die drei folgenden Unterkapitel benötigt) zeigt die Etikettierung mit den vier in der Grundvorstellung Komplementbildung möglichen Strategiekateogrien. Ähnlich wie im vorangehenden Kapitel, fallen auch hier Dokumente durch das Raster, da sie zwar eindeutig vom Notationsansatz her eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung darstellen, aber nicht eindeutig einer der vier Strategiekategorien zugeordnet werden können, etwa, weil nur eine einzeilige Nebenrechnung notiert wird, also Kopfrechnen (in nicht mehr nachvollziehbaren Teilschritten) erfolgt sein muss, und somit nicht deutlich wird, ob schrittweise, stellenweise oder variierend gerechnet wird.

Die für dieses Kapitel wichtige Strategie K-Schrittweise (Etikett ■) tritt mindestens einmal auf 237 Dokumenten auf, im Vergleich dazu die K-Hilfsaufgabe auf 26, K-Vereinfachen auf 3 und K-Stellenweise auf 2 Dokumenten. Von den 266 Dokumenten in der Grundvorstellung Komplementbildung (vgl. Kap. 4.1.1) sind 14 Dokumente nicht markiert, da sie sich – wie oben beschrieben – nicht eindeutig einer Strategie zuordnen lassen, schwerpunktmäßig aus Block 10 (Algorithmus vergleichen).

Die Cluster komplementbildenden schrittweisen Rechnens entsprechen den allgemeinen Clustern von Dokumenten mit Komplementbildung, die in Kap. 4.1.1 dargestellt wurden, ebenso der in Kap. 4.2.1 vorgestellte Verteilung auf die Formate. Daraus wird deutlich, dass auch in den hinteren Unterrichtsblöcken komplementbildendes Rechnen nahezu ausschließlich schrittweises Rechnen ist.

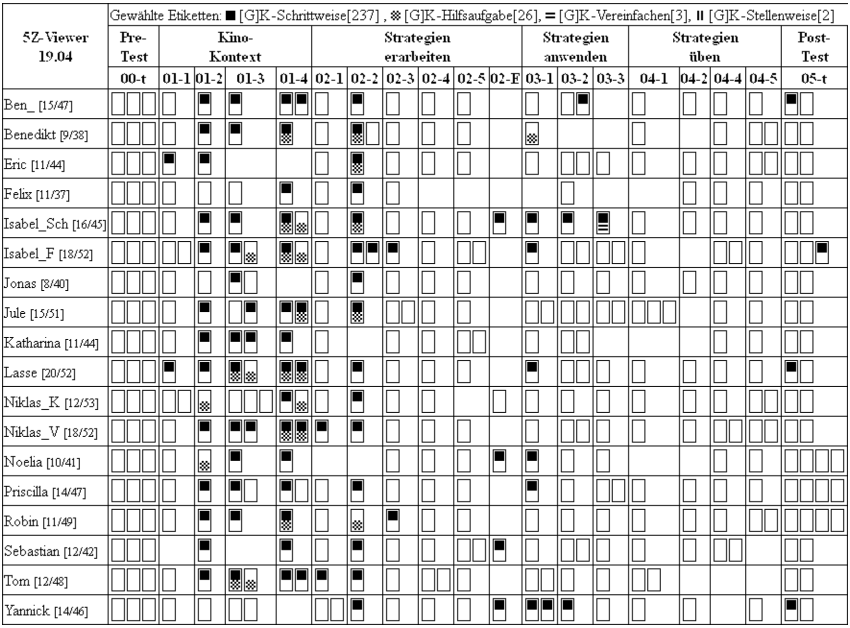
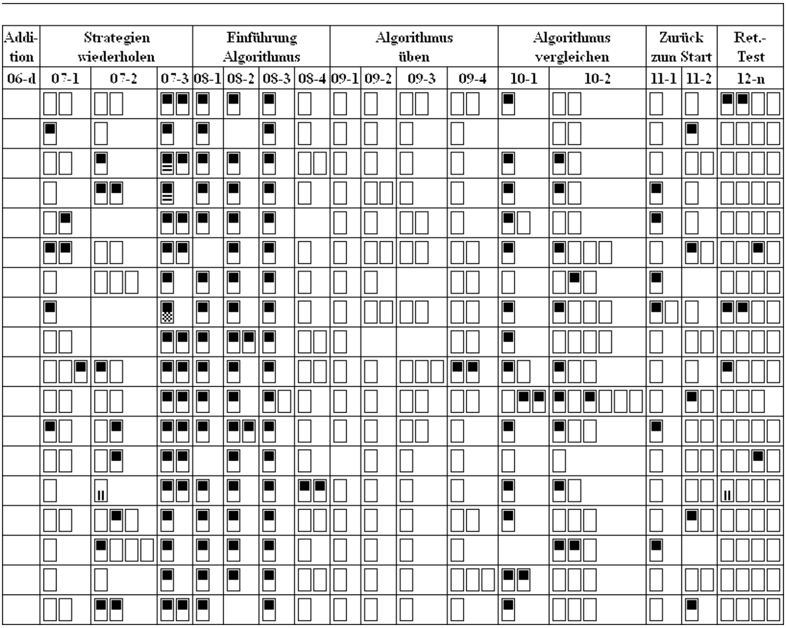


Abbildung 4.25 (beide Seiten): Verteilung der K-Dokumente auf die vier Strategiekategorien

Beispieldokumente für initiales schrittweises Komplementbilden

Bereits im Kap. 4.2.1 wurden die Dokumente von Eric (vgl. Abbildung 4.18, S. 145, und die zugehörigen Beschreibungen) und Jule (Abbildung 4.19, S. 147, ebenfalls dort beschrieben) als Initial-Dokument für die Formatwahl vorgestellt. Beide Dokumente stellen aber auch exemplarische Dokumente mit schrittweisem komplementbildendem Rechnen aus dieser Unterrichtsphase dar. Bereits in Kap. 4.1.1 wurde das Dokument von Tom (vgl. Abbildung 4.3, S. 117) als ebenso beispielhaft für diesen Unterrichtsblock vorgestellt.

Ein Dokument von Katharina (Abbildung 4.26, S. 160) aus der Stunde 01-2 soll hier nun als zusätzliches Beispiel aus diesem Unterrichtsblock für eine eher langsamer Mathematik lernende Schülerin dargestellt werden. Katharina hat in der Stunde zuvor (01-1) die Kontextaufgabe mit einer schrittweisen Strategie in der Grundvorstellung Wegnehmen gelöst, und wagt sich nun zum ersten Mal daran, eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung zu versuchen. Katharinas Teilschritte sind wesentlich vorsichtiger gestaltet als in den oben genannten Rechnungen von Eric, Jule, oder Tom: Sie bewegt sich zunächst mit zwei kleinen Zehnerschritten nach dem Erreichen der glatten

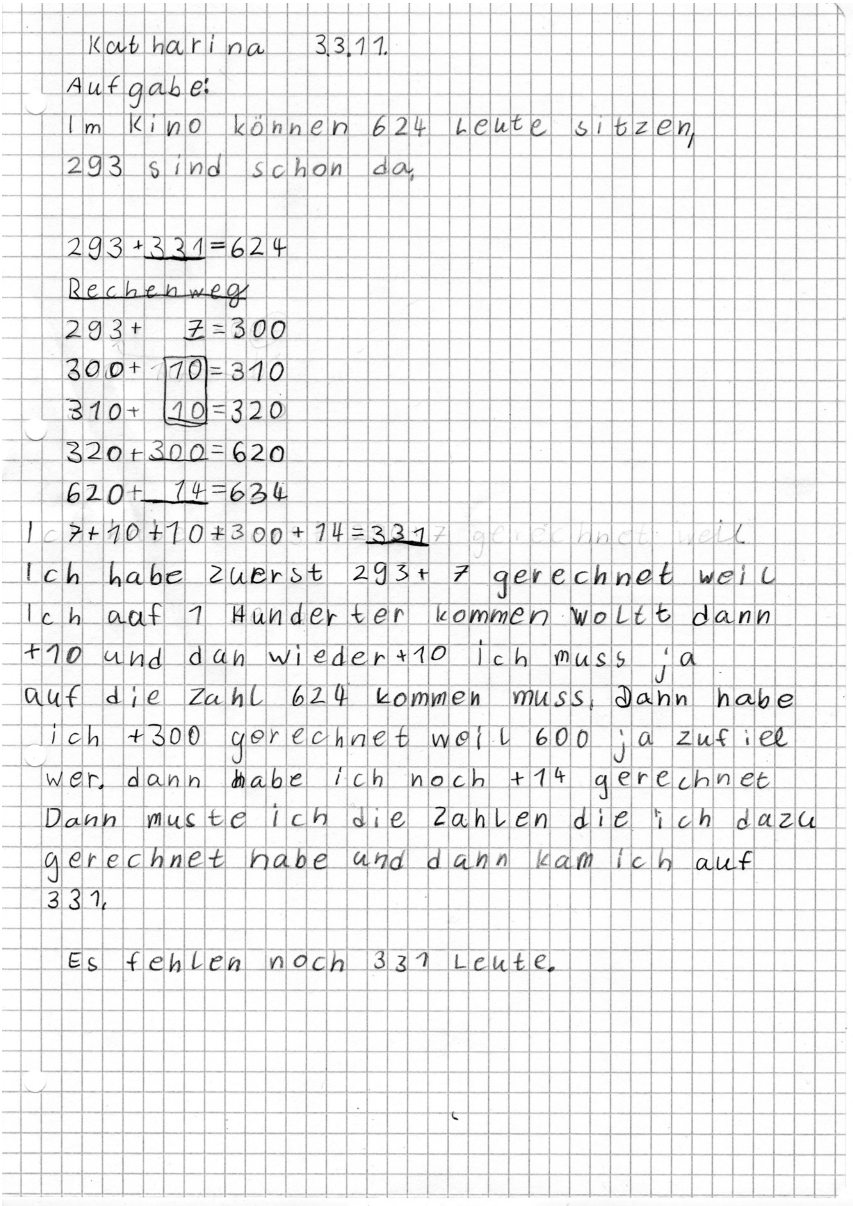


300 weiter, um dann mit einem 300er-Sprung in die Nähe der Zielzahl 624 zu gelangen.

Mit dem letzten Schritt (+14) möchte Katharina vermutlich die Zielzahl des Auffüllvorgangs, die 624, erreichen, geht aber – versehentlich – zur 634. Da sie sich aber in der letzten Zeile der Nebenrechnung – der Addition der Teilbeträge –wieder um 10 verrechnet, erhält sie am Ende doch das richtige Ergebnis, das eigentlich, wären die Teilbeträge korrekt addiert worden, um 10 zu groß sein müsste. Unter ihrer Rechnung beschreibt sie ihr Vorgehen der Schritterzeugung und der Bilanzierung der Schritte, um anschließend das Ergebnis im Sinne des Kontextes zu interpretieren.

Beispieldokumente für konsolidiertes schrittweises Komplementbilden

Im explorativen Block 01 mit seinen Kino-Kontextaufgaben arbeitet die Lehrerin eher nach dem problemorientierten Ansatz (Kontextaufgaben, die mit Adaptionen der aus dem zweiten Schuljahr bekannten halbschriftlichen Rechenstrategien gelöst werden, vgl. Kap. 2.2.3). Wenn die Kinder hier Anregungen durch in den Reflexionsphasen dargestellte Vorgehensweisen aufnehmen, benennen sie die adaptierten Strategien, wenn überhaupt, mit den Namen des Urheber-Kindes.


Katharina 3.3.11.
Aufgabe:
Im Kino können 624 Leute sitzen,
293 sind schon da.

293+331=624
Rechenweg
293+ 7=300
300+ $\boxed{10}$=310
310+ $\boxed{10}$=320
320+300=620
620+ 14=634
I 7+10+10+300+14=331
Ich habe zuerst 293+ 7 gerechnet weil
Ich auf 1 Hunderter kommen wollt dann
+10 und dan wieder+10 ich muss ja
auf die Zahl 624 kommen muss. Dann habe
ich +300 gerechnet weil 600 ja zufiel
wer. dann habe ich noch +14 gerechnet
Dann muste ich die Zahlen die ich dazu
gerechnet habe und dann kam ich auf
331.

Es fehlen noch 331 Leute.

Abbildung 4.26: Katharina, Stunde 01-2, Arbeitsphase

So werden etwa in Stunde 01-3 zwei Rechenwege von Priscilla und Robin an der Tafel gegenübergestellt (Abbildung 4.20, S. 150; hier geht es zwar um die „Kultivierung“ der Formatwahl, aber es sind auch zwei Beispiele schrittweisen komplementbildenden Rechnens, vgl. Kap. 4.3.1), auf die sich dann viele Kinder im Verlauf der Stunde durch die Namenskennzeichnung beziehen.

Im Block 02 (Strategien erarbeiten) verfolgt die Lehrerin dann ein wenig mehr den explizierenden Ansatz (vgl. Kap. 2.2.3). Allerdings werden hier nicht Beispiellösungen als Standards präsentiert, die nachvollzogen werden sollen, sondern die Lehrerin verfolgt das Ziel, die bislang nur mit Schülernamen versehenen Einzelstrategien zu kategorisieren und diese Strategiekategorien mit den in der Mathematikdidaktik gebräuchlichen Bezeichnungen zu belegen. Beim Subtrahieren in der Grundvorstellung Wegnehmen benutzt sie die Bezeichnungen Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen; jeder dieser Strategie-Kategorie ist eine Stunde im Block 02 gewidmet. Als fünfte Strategie wird auch das Ergänzen in Stunde 02-2 anhand von Beispielaufgaben mit schrittweiser Komplementbildung erneut thematisiert.

Aus dem Aufgabenpool des Blocks 2 (Aufgabentabelle ohne Kontexteinkleidung, vgl. Kap. 3.3) sollen die Kinder die Aufgaben 381-297 und 315-256 als Pflichtaufgabe bearbeiten, dabei dürfen sie jeweils zwischen dem ab nun so genannten „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ wählen. Später, bei den sogenannten Küraufgaben (weitere selbstgewählte Aufgaben aus dem Pool, eine quantitative Differenzierung), dürfen sie auch andere Rechenstrategien benutzen.
Eine gemeinsame Reflexionsphase findet in dieser Stunde nicht statt, statt dessen lädt die Lehrerin immer 4-5 Kinder in den sogenannten „Fliesenkreis“ ein (es liegen Teppichfliesen im Kreis, Lehrerin und Kinder sitzen gemeinsam über den Arbeitsblättern zusammen), sobald sie erste Pflichtaufgaben fertig haben. Die Abbildung 4.27 (S. 162) zeigt dabei die ersten Rechnungen von Benedikt, Robin, Jule und Lasse als Montage von Ausschnitten aus den später eingescannten Arbeitsblättern (mit weiteren Rechnungen), so wie sie zum Zeitpunkt des Fliesenkreises als erste Pflichtaufgabe fertiggestellt waren. Die komplette Interaktion aus dieser Besprechungsrunde ist im Anhang in den Transkripten 6.7 bis 6.12 dargestellt, sie wird in anderen Teilen auch noch für Kap. 4.2.4 wichtig.

An dieser Stelle ist für die Betrachtung schrittweiser Komplementbildungsstrategien zunächst interessant, dass sich nun weitere Varianten schrittweisen Rechnens in dieser Grundvorstellung bilden. Benedikts Rechenweg ist dabei mit der „Zwischenlandung“ auf 300 („dass ich auf den Hunderter, auf nen glatten Hunderter kam“, Transkript 8, S. 268) den zuvor vorgestellten initialen Vorgehensweisen ähnlich. Lasse füllt auf, aber tut dies in einem einzigen Schritt, zumindest auf dem Papier. Aus dem Transkript 11 (S. 269) geht nicht hervor, ob er etwa weitere, kleinere Schritte im Kopf gerechnet haben könnte. Jule und Robin erzeugen Schritte, die aus glatten Stellenwertzahlen bestehen. Zusätzlich sind sie so geschaffen, dass beim Auffüll- wie Entleervorgang einzelne Stellen

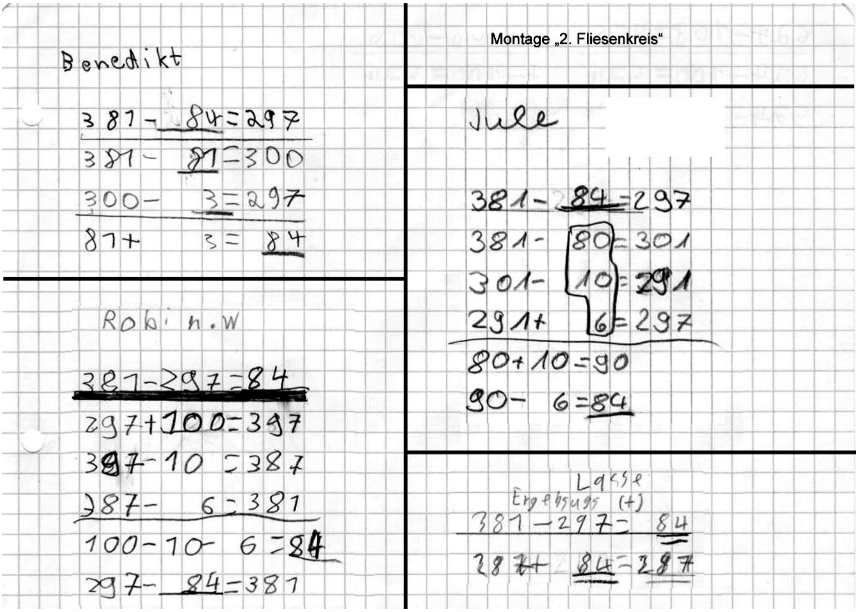


Abbildung 4.27: Montage „2. Fliesenkreis“, Stunde 02-2, Arbeitsphase

der Zielzahl erreicht werden, dabei kommt es zu Rechenrichtungswechseln. Diese beiden Aspekte werden von der Lehrerin als Idee des Stelle Herstellens (bei Jules Aufgabe, Transkript 9, S. 268, in Kap. 4.3 wieder aufgegriffen) und als Hilfsaufgabe (Robins Aufgabe, Transkript 10, S. 269, und Transkript 12, S. 270, in Kap. 4.2.4 ebenfalls tiefer analysiert) thematisiert. An dieser Stelle ist für das Komplementbilden in der Strategiekategorie Schrittweise daran wichtig, dass die Lehrerin die Idee des Stelle Herstellens in Jules Rechenweg innerhalb ihrer Strategienkategorie „Ergänzen“ zulässt, während sie in Robins Rechenweg, wie später noch (vgl. Kap. 4.2.4) dargestellt werden wird, die Idee der Hilfsaufgabe sieht und seinem Rechenweg dem wegnehmenden Rechnen zuordnet, obwohl auch dieser in der Grundvorstellung Komplementbildung steht.

Deutung der Befunde zur Verteilung von K-Schrittweise

Im Vergleich zu den Anzahlen der anderen drei Strategien und auch zur Gesamtzahl der Dokumente mit mindestens einer K-Strategie zeigt sich deutlich die Dominanz der Strategie K-Schrittweise gegenüber anderen K-Strategievarianten. Da K-Schrittweise-Cluster immer dann auftreten, wenn Cluster allgemein im komplementbildenden Rechnen beobachtet wurden, liefert die Betrachtung der Verteilung der Häufigkeiten gegenüber Kap. 4.1.1 keine neuen Erkenntnisse, da komplementbildendes Rechnen zu gut 90% aus schrittweisem Vorgehen besteht. Aus diesem Grund bringt auch die (hier aus Platzgründen nicht abgedruckte) Verteilung von K-Schrittweise auf das Additions- und Subtraktionsformat keine über Kap. 4.2.1 herausgehenden neuen Einsichten, ebenso gehen die schülerbezogenen relativen Häufigkeiten mit den in Kap. 4.1.3 erfolgten Betrachtungen einher.

Festhalten kann man aber, dass in der Grundvorstellung Komplementbildung das schrittweise Rechnen bis zum Schluss *die* dominante Strategie bleibt, sich also nicht von anderen Strategien verdrängen lässt. Dies stellt einen deutlichen Gegensatz zur Verteilung der W-Strategien dar (vgl. Abbildung 4.59, S. 236), bei denen am Ende Strategien des Variierens, besonders des Vereinfachens, zur vorherrschenden Strategievariante werden.

Deutung der vorgestellten Initial-Dokumente zu K-Schrittweise

Die weiter oben genannten Dokumente von Eric, Jule und Tom aus dem explorativen Kino-Block lassen sich dem Muster „zu glatten Zwischenzahlen“ (vgl. Kap. 2.2.2) als Variante der Schritterzeugung zuordnen, ein für diese Unterrichtsphase typisches Vorgehen: Sie wählen als ersten Teilschritt eine Zahl, die sie auf einen glatten Hunderter bringt, als zweiter Teilschritt erfolgt dann der Sprung zu einer weiteren glatten Hunderterzahl, im letzten Schritt dann der Sprung zur Zielzahl des Auffüll- bzw. Entleervorgangs, wobei Jule hier noch eine Zwischenlandung auf einer Fünfer-Zahl einbindet (die man im Sinne der „Kraft der Fünf“ ebenfalls zu den „glatten“ Zahlen zählen könnte). Diesen Vorgang – das „zu glatten Zwischenzahlen gehen“ – beschreibt Jule auch in der Reflexionsphase, in der ihr Dokument vorgestellt wird, mit den Worten: „Also ich habe hier erst wieder (zeigt auf 624-24=600) zum glatten Hunderter gerechnet, ähm , das war dann zu 600, da habe ich dann die 24 weggenommen, und dann habe ich von der 600 die 300 weggenommen“ (Transkript 2, S. 264, Z. 001).

Zu Erics Dokument äußert sich daher Niklas_V wie folgt: „der hat, ähm, nämlich, 389 plus (betont plus) gerechnet, bis er bei der 526 war, und dann hat er glaube ich die Zahlen zusammengerechnet, und dann kam er auf die Zahl der Leute, die noch sitzen“ (Transkript 1, S. 264, Z. 006). Diese bereits in Kap. 4.2.1 beschriebene Aussage, dort als Beleg für das Erkennen des Grundvorstellungswechsel interpretiert, enthält auch implizit die Beschreibung der Anwendung des Assoziativgesetzes beim schrittweisen Komplementbilden, nämlich dass die Addition der Teilbeträge der Schritte die Gesamtspanne des Komplementes ergibt (und damit auch – noch impliziter – dass eine Zerlegung in Teilschritte bei der Komplementbildung erlaubt ist) – ein weiteres Beispiel für ein *theorem in action* (vgl. Kap. 2.2.1).

Jule muss zusätzlich – im Vergleich zu Erics Dokument – noch darlegen, warum die Beträge der Teilschritte addiert werden, obwohl sie doch im Subtraktionsformat, also wegnehmend-entleerend gerechnet hat. Sie beschreibt zunächst den Vorgang des Zusammenfassens (vgl. Transkript 2, S. 264. Z. 001), bringt dann aber ein empirisches Argument, dass eine Subtraktion der Teilbeträge kein sinnvolles Ergebnis erbracht hätte (ebd., Z. 003), und argumentiert hier noch nicht mit der Zerlegung der Gesamtkomplementspanne in Teilbeträge.

An Jules Dokument ist noch die bereits in Kap. 4.2.1 beschriebene Äußerung auf dem Dokument interessant, dass sie sich auf „Kathas Weg" bezieht. Katharina stellt zu Beginn der Stunde 01-2 ihren Rechenweg aus der Vorstunde dar, der ein recht kleinschrittiges schrittweises Vorgehen enthält, aber in der Grundvorstellung Wegnehmen erfolgt, also keine Ermittlung der Komplementspanne zwischen Minuend und Subtrahend, sondern das schrittweise Wegnehmen des Subtrahenden vom Minuend darstellt. Jule sieht also in ihrem Weg ebenfalls das schrittweise Vorgehen als Parallelität zu Katharinas Rechnung, obwohl unterschiedliche Grundvorstellungen vorliegen – ein erstes Indiz dafür, dass Kinder die Idee des schrittweisen Rechnens als Kategorisierung der Schritterzeugung auch unabhängig von der gewählten Grundvorstellung sehen könnten.

Katharinas Dokument zeigt, wie komplex ein Komplementbildungsvorgang durch schrittweises Auffüllen sein kann, wenn die Kinder noch vorsichtig probierend diese Idee selbst erarbeiten. Dieser Komplexität ist es vermutlich auch zuzuschreiben, dass Katharina am Ende die eigentliche Zielzahl 624 aus den Augen verliert, und stattdessen zur 634 auffüllt. Auch wenn durch einen weiteren Rechenfehler bei der Bilanzierung der Teilschritte dann doch wieder das richtige Ergebnis herauskommt, wurde dieses Dokument mit dem Etikett „K-Komplexitätsfehler" (vgl. Kap. 3.4.2 und Kap. 4.1.2) versehen, und steht hier stellvertretend für diese Art von Dokumenten mit Komplexitätsfehlern, die vor allem in der explorativen Phase auftreten, aber kompetenzorientiert wahrgenommen bereits viel von der richtigen Strategie enthalten, nur in kleinen Details noch vom komplett richtigen Vorgehen abweichen.

Auch ihre Teilschritte könnten der Idee „zu glatten Zwischenzahlen gehen" folgen, wobei es nach dem Erreichen der 300 zunächst kleinere, glatte Zehnerzahlen wären, bevor sie sich dann – im vierten Schritt – doch an einen größeren Sprung in Richtung der 624 wagen mag. Das Springen zu 620 könnte dann auch der Variante „mit glatten Rechenzahlen weiterrechnen" zuordbar sein, die Variante „zu glatten Zwischenzahlen gehen" hätte eher eine Zwischenlandung auf der 600 nahegelegt. Allerdings ist eine weitere Interpretation jener der Schritterzeugung zu Grunde liegenden Idee möglich, die zunächst nicht deutlich hervortritt, nämlich die Idee des Stelle Herstellens, daher wird Katharinas Dokument in Kap. 4.3 noch einmal aufgegriffen.

Deutung der Rechenwege aus der Fliesenkreis-Reflexion

Während Benedikt eine schrittweise komplementbildende Rechnung ebenso wie die gerade beschriebenen Dokumente in der Variante „zu glatten Zwischenzahlen" wählt, zeigt Lasse durch die Notation nur eines Schrittes vermutlich bereits Anzeichen der Verkürzung und Internalisierung, wie sie nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung denkbar wäre (vgl. Kap. 3.2.2). Da aus dem Transkript zum Dokument aber nicht hervorgeht, welche Schritte Lasse wirklich im Kopf gerechnet hat, ist die Zuordnung zu schrittweisem Komplementbilden hier reine Spekulation, theoretisch denkbar sind auch internalisierte Formen der anderen K-Strategien. Diese Verkürzung lässt sich jedoch an Dokumenten anderer Kinder nachvollziehen: Während Tom in der Stunde 02-2 noch „Ergänzen" (in beiden Formate) in der Idealform des K-Schrittweise-Rechnens (Subform „zu glatten Zwischenzahlen") notiert (Abbildung 4.22, S. 152), so hat sich diese Strategie in der Stunde 07-3 bereits internalisiert, die Schritte finden im Kopf statt (Abbildung 4.23, S. 152). Dass es sich nach wie vor um schrittweise Komplementbildung handelt, ist an der eigens zur Sichtbarmachung internalisierter Prozesse eingeführten Klammernotation (vgl. Kap. 2.2.2) ersichtlich: Wenn Tom etwa hinter der Aufgabe 281+___=332 in der Klammer „(+19, +32)" notiert, werden hier seine auffüllenden Komplementbildungsschritte (Zwischenlandung auf 300) sichtbar. Diese Klammernotation allerdings stand Lasse in der Stunde 02-2 noch nicht zur Verfügung.

Im Fliesenkreis-Dokument treten aber auch die beschriebenen anderen Varianten komplementbildenden Rechnens auf. Dabei kann man vermuten, dass die Lehrerin „Ergänzen" als Komplementbildung vor allem als schrittweises Rechnen sieht: Zu Beginn der Stunde wählt sie als Beispiele für die Strategiekategorien „Ergänzen(+)" und „Ergänzen(-)" zwei eindeutig schrittweise Rechenwege. Es hätte an dieser Stelle auch Rechenbeispiele aus dem Unterricht gegeben, in denen etwa die Idee der Hilfsaufgabe beim komplementbildenden Rechnen auftrat. Auch in der Eingangs des vorhergehenden Kapitels vorgestellten Gegenüberstellung der Rechenwege von Priscilla und Robin zur Formatwahl in Stunde 01-3 (also noch vor Beginn der gezielten Kategoriebildung im Block 2) wählt sie zwei Beispiele reinen schrittweisen Rechnens, auch hier hätte es andere Beispiele gegeben.

Während sie im Fliesenkreis Benedikts Rechnung, die eindeutig der Strategie K-Schrittweise zuzuordnen ist, als Ergänzungsaufgabe einordnet (Transkript 8, S. 268, Z. 003), charakterisiert sie Jules Rechnung, die einen Rechenrichtungswechsel aufweist, zwar auch als Ergänzungsaufgabe (Transkript 9, S. 268, Z. 001), aber als „ganz schön schwer" (Z. 014). Robins Rechenweg dagegen wird der W-Hilfsaufgabe zugeschrieben (Transkript 10, S. 269, und Transkript 12, S. 270, dargestellt in Kap. 4.2.4).

Aus diesen Beschreibungen wird deutlich, dass die Lehrerin „Ergänzen" vor allem als schrittweises Rechnen sieht, und daher möglicherweise später im

Sinne fortschreitender Mathematisierung und der *guided reinvention* (vgl. Kap. 3.2.2) stark in diese Richtung lenkt. Noch toleriert sie hier Rechenrichtungswechsel, die möglicherweise durch die Idee des Stelle Herstellens motiviert sind (vgl. Kap. 4.3), lässt aber die Hilfsaufgaben-Idee nicht (mehr) zu, und ordnet diese dem Bereich des wegnehmenden Rechnens zu, da vermutlich in ihrem Kategoriensystem in der Grundvorstellung Komplementbildung „Ergänzen“ als rein schrittweise Strategienkategeorie ausgeprägt ist.

4.2.3 Stellenweise

Als zweite, auch in der Grundvorstellung Komplementbildung mögliche Strategie, soll nun (dem Strukturbaum weiter folgend, vgl. Abbildung 4.28, unten) das Auftreten komplementbildenden stellenweisen Rechnens betrachtet werden. Diese Variante des Rechnens bezeichnen Selter u. a. (2012, S. 393) als „rather uncommon“, ebenso etwa auch Peltenburg u. a. (2011) – so taucht es auch in gerade genannter Studie (vgl. Kap. 2.2.3) im Additionsformat sehr selten, im Subtraktionsformat gar nicht auf.

Befunde zur Verteilung von K-Stellenweise

Von 252 Dokumenten (266 K-Dokumente, vgl. Kap. 4.1.1, minus 14 nicht eindeutig strategiezuordbare, vgl. Kap. 4.2.2) mit K-Strategien (Abbildung 4.25, S. 158) tritt K-Stellenweise nur in 2 Dokumenten (Etikett **II**) auf, nur bei der Schülerin Priscilla, zum einen in Stunde 07-2, und zum anderen im Retentiontest (12-n), den Priscilla in Interviewform durchführt.

Weitere Feststellungen können bei dieser geringen Anzahl nicht getroffen werden, bis auf eine: K-Stellenweise tritt nur in der 2. Hälfte des Unterrichts auf, also recht spät im Verlauf der Lernprozesse.

Abbildung 4.28: Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II, Fokus auf stellenweise Komplementbildung

Zwei Dokumente zu K-Stellenweise

Bei beiden Dokumenten Priscillas, die mit K-Stellenweise etikettiert sind, erschließt sich die Zuordnung zu K-Stellenweise erst aus den zugehörigen Interaktionen. Das erste Dokument (Abbildung 4.29, S. 168) stammt aus der 2. Stunde des Blocks 07 (Strategien wiederholen), hier sind die Kinder bei der Lösung des Aufgabenformates „Rechenketten“ (vgl. Kap. 3.3) aufgefordert, bei jeder Teilaufgabe zu überlegen, welche Rechenstrategie am besten passt. Während auf Priscillas Dokument die anderen drei Rechnungen in der Grundvorstellung Wegnehmen erfolgen, ist die zweite Rechnung (789-167) erkennbar der Grundvorstellung Komplementbildung zuzuordnen, sowohl vom Notationsansatz (167+___=789), als auch von der Kennzeichnung („Ergänzen(+) mal anders“). Dieser Zusatz („mal anders“) gibt bereits einen Hinweis darauf, dass Priscilla hier etwas abweichendes, als das zu dieser Zeit inzwischen übliche schrittweise Vorgehen probiert haben mag, was sie leider nur unvollendet aufschreibt („ich hab“ – dann bricht der Kommentar ab).

Während der Arbeitsphase begibt sich die Lehrerin zu Priscilla, die gerade beginnen möchte, diese zweite Aufgabe (789-167) zu rechnen, aber noch keine Idee hat, welche Strategie sie wählen soll (Transkript 13, S. 270, Z. 001). Mehrfach versucht die Lehrerin nicht nur das „Plusergänzen“ (Z. 002, 004, 006), sondern auch die Idee des Stelle Herstellens (vgl. Kap. 4.3.2) anzuregen: „und dass man dann sofort die Zahl, den Einer bekommt“ (Z. 002), „Und dann hattest du doch die Idee, den Einer hinzukriegen“ (Z. 006), „Und dann hattest du doch die Idee, dass du jetzt so viel dazu tust“ (Z. 010). Priscilla lässt sich zwar auf den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung ein (Z. 005), nimmt aber die Anregung, der Idee des Stelle Herstellens zu folgen, nicht auf. Mit „jetzt muss ich hier 7 plus wie viel = 9“ (Z. 013) beschreibt sie vermutlich nicht den von der Lehrerin vermutlich so verstandenen Weg, 167 plus wie viel ergibt eine Zahl mit der Einerziffer 9 (was ein sinnvoller Schritt bei der Idee des Stelle Herstellens gewesen wäre), sondern die stellenweise Komplementbildung zwischen den Einerziffern von Subtrahend und Minuend. Ganz am Ende der Interaktion (die Lehrerin fordert bis dahin Priscilla immer wieder auf, ihre Rechenschritte aufzuschreiben) beschreibt Priscilla dann deutlich die stellenweise Komplementbildung, die sie internalisiert vorgenommen hat: „Ich hab als erstes 7 plus wie viel gleich 9, das war 2, habe ich 2 hingeschrieben, dann habe ich 60 plus wie viel gleich 80, das war 20, habe ich eine 2 hingeschrieben, dann habe ich 100 plus wie viel gleich 700, dann habe ich da ne 6 hingeschrieben“ (Z. 029). Auch wenn Priscilla hier volle Zahlwerte der Stellenziffern ausspricht, wird sie – da sie die Ergebnisse als Ziffern in den Stellenwerten benennt – vermutlich doch stellenwertweise denken, die Zahlenwerte eher als Kennzeichnung der Position der Stellenwerte benutzen.

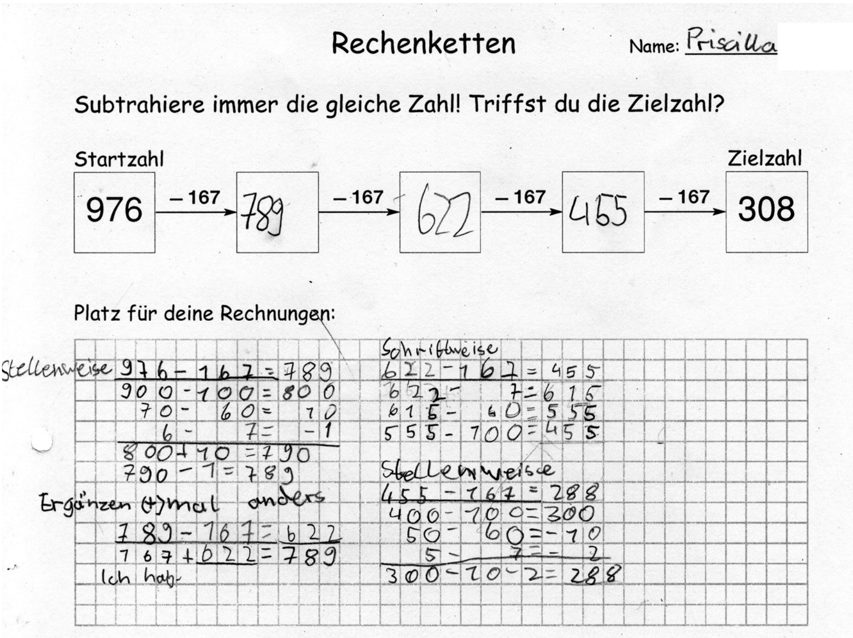
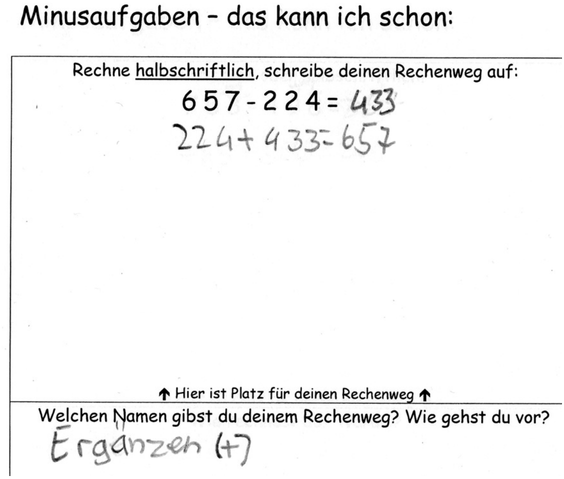


Abbildung 4.29: Priscilla, Stunde 07-2, Arbeitsphase, Ausschnitt

Auch im zweiten Dokument (Abbildung 4.30, S. 169) erschließt sich die Zuordnung zu K-Stellenweise erst durch die Interaktion, denn auf dem Dokument notiert Priscilla nur eine Nebenrechnungszeile als Komplementbildung im Additionsformat direkt mit Ergebnis, ohne ihre einzelnen Rechenschritte zu explizieren, und gibt als Kennzeichnung auch nur passend „Ergänzen(+)“ an. Allerdings entsteht dieses Dokument nicht wie die meisten Dokumente des Retention-Tests (Stunde 12-n) in Einzelarbeit, sondern Priscilla führt diesen Test als eines von drei Kindern in Interviewform durch.

Priscilla gibt dabei an, zunächst „Stellenweise“ (Transkript 14, S. 271, Z. 011, 013) rechnen zu wollen, also vermutlich in der Grundvorstellung Wegnehmen, denn der Begriff „Stellenweise“ ist mit W-Stellenweise als Strategiekategorie belegt. Sie wählt dann „Ergänzen plus“ (Z. 017) und kennzeichnet damit den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung, und fügt an, „man kann halt gut von dem Einer bis zur 7 rechnen“, und notiert dann rasch das komplette Ergebnis 433. Auf Nachfrage gibt sie an: „dann haben ich vom Einer zum Einer und vom Zehner zum Zehner und dann vom Hunderter zum Hunderter“ (Z. 025) – eine Erklärung , die der Interviewer zunächst nicht nachvollzieht,



Minusaufgaben – das kann ich schon:

Rechne halbschriftlich, schreibe deinen Rechenweg auf:

657 - 224 = 433

224 + 433 = 657

↑ Hier ist Platz für deinen Rechenweg ↑

Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg? Wie gehst du vor?

Ergänzen (+)

Abbildung 4.30: Priscilla, Retention-Test, Ausschnitt

aber Priscilla wiederholt dann stellenweise ihre Rechenschritte noch einmal (Z. 026-033), benennt diesen Rechenweg dann mit „Ergänzen plus“ (Z. 037).

Deutung der Dokumente zu K-Stellenweise

In beiden Fällen bezeichnet Priscilla den Auffüllvorgang vom Subtrahenden zum Minuenden, also eine Komplementbildung, als „Ergänzen plus“ und nicht als „Stellenweise“, obwohl hier kein schrittweises Rechnen, sondern eindeutig stellenweises Rechnen vollzogen wird. Intuitiv mag ihr dabei bewusst sein, dass bei einer Zerlegung beider Zahlen in Stellenwerte die einzelnen stellenbezogenen Komplemente ermittelt und anschließend „addiert“ bzw. als stellengerechte Ziffern zu einer Zahl zusammengezogen werden dürfen (ein erneutes Beispiel für ein *theorem in action*, vgl. Kap. 2.2.1).

In beiden Fällen treten allerdings keine Stellenwertüberschreitungen auf, so dass stellenweise Komplementbildung hier nur in der einfacheren, übertragsfreien Variante beobachtet werden konnte. Zum zweiten Dokument gibt sie den Hinweis: „man kann halt gut von dem Einer bis zur 7 rechnen“ (Transkript 14, S. 271, Z. 017) und gibt damit ein Indiz, dass sie erkannt haben könnte („gut rechnen können“), dass hier kein Übertrag stattfindet. Da sie in beiden Fällen sehr schnell zur Lösung gelangt, könnte es (spekulativ) so sein, dass sie zuvor bereits abgeprüft hat, ob alle Ziffern des Minuenden größer sind als die entsprechenden des Subtrahenden, um entscheiden zu können, ob sie die stellenweise Komplementbildung hier „gut rechnen“ kann, und damit, ob es Sinn macht, diesen Ansatz zu wählen.

Bemerkenswert ist, dass dieses stellenweise Vorgehen nur deshalb erfasst wurde, weil es passende Interaktionen zu den Dokumenten gibt. Es könnte also sein, dass durchaus noch mehr Rechnungen der 14 Dokumente, die zwar erkennbar (Notationsansatz der Nebenrechnung) eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung enthalten, aber keiner Strategie zuordbar sind wenn nur die Ergebniszeile notiert wird, nicht zwangsläufig in K-Schrittweise, also theoretisch auch in K-Stellenweise internalisiert vollzogen werden.

K-Stellenweise scheint also auch in dieser Studie „rather uncommon“ (Selter u. a. 2012, S. 393) zu sein, da sich nur zwei Dokumente mit dieser Strategie aufspüren ließen. Nach der in Kap. 4.2.2 beschriebenen Fokussierung des „Ergänzens“ auf schrittweises Rechnen durch die Lehrerin, tritt aber trotzdem, relativ spät im Unterrichtsverlauf, auch das „ungewöhnliche“ K-Stellenweise auf, wenn auch nur in der einfachen Form ohne Stellenwertübergänge.

4.2.4 Hilfsaufgabe

Als erste der beiden variierenden Strategien soll nun – weiterhin dem Strukturbaum für mentale Arithmetik folgend (vgl. Abbildung 4.31, unten) – das Auftreten der Hilfsaufgabe in der Grundvorstellung Komplementbildung im Unterricht der Studie betrachtet werden.

Befunde zur Verteilung von K-Hilfsaufgabe

Von den 252 K-Strategie-zuordbaren Dokumenten (vgl. Abbildung 4.25, S. 158) tritt die K-Hilfsaufgabe (mindestens einmal, Etikett) auf 26 Dokumenten auf, zum Vergleich finden sich mit anderen K-Strategien je 237 Dokumente mit K-Schrittweise, 3 mit K-Vereinfachen und 2 K-Stellenweise. Dabei zeigt sich

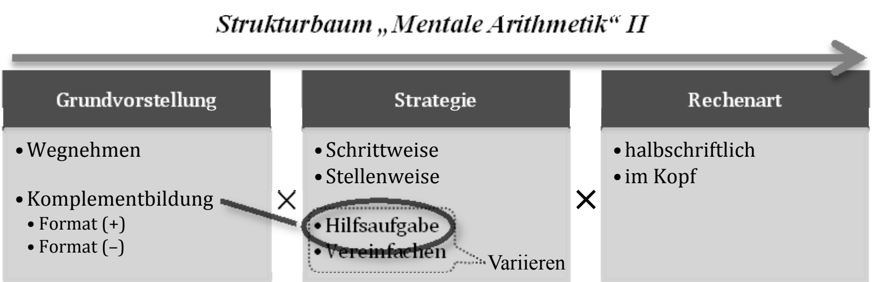


Abbildung 4.31: Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II, Fokus auf K-Hilfsaufgaben

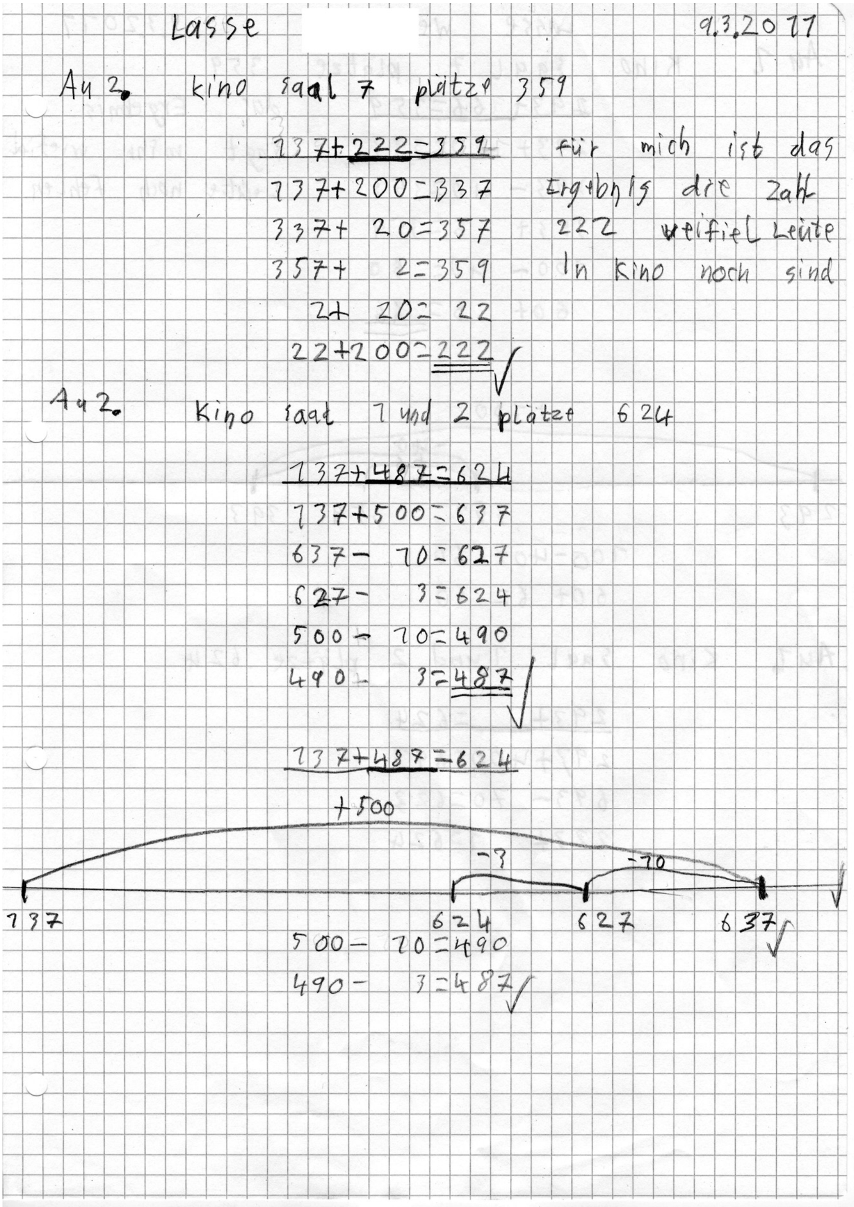
ein deutliches Cluster in den Blöcken 1 und 2, genauer in den Stunden 01-2 bis 01-4 und 02-2. Hier treten 24 der 26 mit K-Hilfsaufgabe etikettierten Dokumente auf, davon wiederum allein 12 in der Stunde 01-4. Von den 26 mit K-Hilfsaufgabe etikettierten Dokumenten beinhalten 12 (mindestens) eine K-Hilfsaufgabe im Additionsformat (Verteilung hier aus Platzgründen nicht abgedruckt), dagegen 19 (mindestens) eine im Subtraktionsformat (einige auch beide Formatvarianten) – in Stunde 01-4 sind es 10 Dokumente mit (mindestens) einer K-Hilfsaufgabe im Subtraktionsformat, auf 4 Dokumenten tritt sie im Additionsformat auf (davon 2 Dokumente mit beiden Varianten). Nach der Stunde 02-2 tritt die K-Hilfsaufgabe nur noch zweimal auf, einmal in Stunde 03-1 (im Block Strategien anwenden), einmal in Block 07-3 (Strategien wiederholen).

Thematisierung der Hilfsaufgabenidee in der Grundvorstellung Komplementbildung

Zu Beginn der Stunde 01-3 wird an der Tafel gemeinsam mit allen Kindern unter anderem der Rechenweg von Niklas_K (Abbildung 4.41, S. 187) besprochen. Dieser Rechenweg ist in sofern besonders, da er der erste gemeinsam besprochene Rechenweg ist, der Rechenrichtungswechsel enthält. Am Ansatz der Rechnung von Niklas ist zu erkennen, dass er von 293 zu 624 auffüllen möchte (293+___=624). An Stelle kleinerer, auffüllender Schritte geht er aber bereits im ersten, glatten Schritt mit +400 zu weit, über 624 hinaus, so dass der nächste Schritt von -70 kompensierend in Gegenrichtung erfolgt, wie es für die Hilfsaufgabenidee (vgl. Kap. 2.2.2) typisch ist. Mit dem letzten Schritt (+1) erreicht Niklas dann die Zielzahl des Auffüllvorgangs.

In der gemeinsamen Interaktion (Transkript 18, S. 274) über den Rechenweg, die implizit bei der Übertragung auf den Rechenstrich entsteht, ordnen die Kinder diesen in die Grundvorstellung Komplementbildung ein („Ergänzungsplusaufgabe“, Z. 013), und beschreiben die Besonderheit des ersten Rechenschrittes: „der hat dann erst plus Vierhundert (betont Vier) gerechnet“ (Priscilla, Z. 019), mit der Betonung von „Vier“ vermutlich darstellend, dass ein kleinerer Schritt für sie erwartbarer gewesen wäre. Für den zweiten Rechenschritt erklärt Niklas_V: „Er muss jetzt auch noch minus rechnen“ (Z. 029), „Weil er ja zu viel dazugenommen hat. Weil jetzt sind ja schon über 624 und er will zur 624 kommen“ (Z. 031). Auch Isabel_F wiederholt diese Idee: „Niklas hat ja, ähm, erst plus den […] Hunderter gerechnet, um zur 624 zu kommen, und dann waren ja schon zu viel, und dann hat er noch wieder zurückgenommen, die er da noch wieder zurücknehmen braucht“ (Z. 033).

Erst hiernach deutet die Lehrerin den Rechenweg in einer anderen Sichtweise: „Die 400 (zeigt auf die Ziffer 6 in 293+400=693 in Niklas_Ks Rechnung an der Tafel) meinst du hat er genommen, damit er erst mal den Hunderter hatte“ (Z. 034, vgl. ebenso Z. 040 und Z. 044).



Lasse 9.3.2011

Au 2. kino saal 7 plätze 359

137+222=359

137+200=337

337+ 20=357

357+ 2=359

2+ 20= 22

22+200=222

für mich ist das Ergebnis die Zahl 222 weifiel Leute in kino noch sind

Au 2. Kino saal 1 und 2 plätze 624

137+487=624

137+500=637

637− 10=627

627− 3=624

500− 10=490

490− 3=487

137+487=624

+500

−3

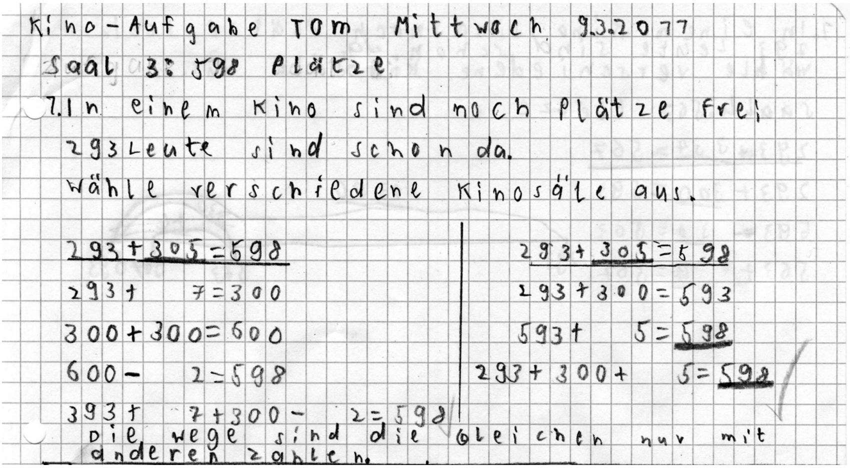
−10

137 624 627 637

500− 10=490

490− 3=487

Abbildung 4.32: Lasse, Stunde 01-3, Arbeitsphase, Vorderseite



Kino-Aufgabe Tom Mittwoch 9.3.2011
Saal 3: 598 Plätze
1. In einem Kino sind noch Plätze frei.
293 Leute sind schon da.
Wähle verschiedene Kinosäle aus.

293+305=598
293+ 7=300
300+300=600
600- 2=598
393+ 7+300- 2=598

293+305=598
293+300=593
593+ 5=598
293+300+ 5=598

Die wege sind die Gleichen nur mit anderen zahlen.

Abbildung 4.33: Tom, Stunde 01-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Zwei Beispieldokumente für das Aufgreifen der Hilfsaufgabenidee

Aus der gerade beschriebenen Reflexion über den Rechenweg von Niklas_K nehmen vermutlich sowohl Lasse (erstes Beispiel) als auch Tom (zweites Beispiel) unterschiedliche Aspekte in ihre in der sich anschließenden Stunde produzierten Rechenwege auf.

Lasse rechnet aus dem Kino-Aufgabenpool (vgl. Kap. 3.3) mit den Sitzplatzzahlen des Saals 7 und des Saals 1/2 jeweils in der Wegnehmen intendierenden Kontextvariante „…137 gehen…“ (Abbildung 4.32, S. 172, Vorderseite) und in der Komplementbildung intendierenden Kontextvariante „…293 sind schon da…“ (Rückseite, aus Platzgründen nicht abgedruckt) vier Aufgaben, alle additiv auffüllend in der Grundvorstellung Komplementbildung. Während die erste Aufgabe dabei eine rein schrittweise Strategie in dieser Grundvorstellung darstellt, enthält die zweite Aufgabe einen Rechenrichtungswechsel, wie er zuvor an der Rechnung von Niklas_K besprochen wurde: Lasse möchte von 137 zu 624 auffüllen (137+___=624), geht aber mit dem ersten, glatten Fünfhunderterschritt über 624 hinaus, und kompensiert dieses Zuweitgehen mit den Schritten von -10 und -3 in Gegenrichtung, um die 624 zu erreichen.

Tom rechnet auf der Vorder- und Rückseite seines Dokumentes (Abbildung 4.33, oben, hier nur als Ausschnitt dargestellt) ebenfalls vier Aufgaben aus dem Kino-Aufgabenpool, jede Aufgabe in zwei Variationen. Tom wählt den Komplementbildung intendieren Kontext („… 293 sind schon da…“) bei der ersten Aufgabe (598-293) und löst die Aufgabe mit einer additiv komplementbildenden Strategie (293+___=598). In der ersten, linken Variante dieser Aufgabe geht

Tom zunächst mit 293+7 zur „glatten Zwischenzahl“ 300, dann aber mit 300+300=600 über die Zielzahl 598 hinaus, und kompensiert diesen zu großen Schritt mit -2 in Gegenrichtung, um zur 598 zu gelangen.

Zwei Beispiele für das spätere Einschränken der Hilfsaufgabenidee

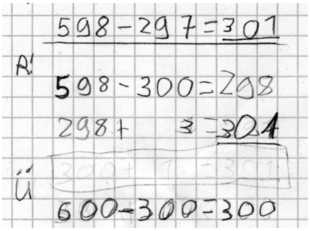


Abbildung 4.34: Robin, Stunde 02-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Bereits in Kap. 4.2.2 wurde die Besprechung von Rechenwegen in einem Fliesenkreis der Stunde 02-2 angesprochen, die Lehrerin regt in dieser Stunde die Kategorienbildung „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ an. Auch das Fliesenkreisdokument (Abbildung 4.27, S. 162) enthält zwei Rechenwege, die einen Rechenrichtungswechsel beinhalten:

Jule verfolgt eine entleerende komplementbildende Strategie (erkennbar am Ansatz: 381-___=297). Zunächst gelangt sie mit 381-80 zur 301. Im zweiten Schritt geht sie dann mit 301-10=291 bereits über die eigentlich zu erreichende 297 hinaus, und kompensiert diesen zu großen Schritt mit einem Schritt von + 6 in die Gegenrichtung, um zur 297 zu gelangen: „dann war ich ja schon bei 291, aber dann war ich ja schon, habe ich ja schon zu viel weggenommen, also musste ich dann noch plus [Tonausfall 1s] 97“ (Transkript 9, S. 268, Z.004). Die Lehrerin aber antwortet auf diese Einlassung mit einer Frage an alle Kinder im Fliesenkreis: „Wer versteht, warum Jule nach der 80 noch die 10 weggenommen hat? Was wollte sie damit erreichen?“ (Z. 004), und bestätigt Lasses Antwort „Sie wollte auf die 90 kommen,“ (Z. 007) „weil das ja auch vom Ergebnis der Zehner ist“ (Z. 009), mit den Worten: „Genau. Sie wollte den Zehner vom Ergebnis bekommen“ (Z. 010).

Robin rechnet komplementbildend im Additionsformat (297+___=381), und bereits im ersten Schritt mit einer glatten Zahl und der Rechnung 297+100 zur 397 und damit weit über das Auffüllziel 381 hinaus. Dieses Zuweitgehen kompensiert er mit zwei Schritten in Gegenrichtung (-10, -6) und gelangt zur 381. Die Lehrerin sagt zunächst „Du hast eine Plusergänzungsaufgabe erst gemacht“ (Transkript 10, S. 269, Z. 005), korrigiert sich dann aber mit „Ne, das stimmt ja dann auch nicht (guckt fragend)...“ (Z. 007), und meint, die Aufgabe sei „ein neuer Trick“ (Z. 011), den Robin dann selbst als „Hilfsaufgabe“ bezeichnet (Transkript 12, S. 270, Z. 001), bestätigt von der Lehrerin (Z. 002).

Ein zweites Mal kommt es zu einem Dialog über Hilfsaufgaben und der Grundvorstellung Komplementbildung zwischen Robin und der Lehrerin: In der Stunde 02-3 sollen die Kinder die Pflichtaufgabe 598-297 mit einer Hilfsaufgabe (und damit in der Grundvorstellung Wegnehmen) probieren. Robin möchte diese Aufgabe zunächst in der Grundvorstellung Komplementbildung lösen, er notiert zunächst den Ansatz 598-___=297, anders als in Abbildung 4.34 (S. 174) zu erkennen, wie in Transkript 15, (S. 272, Z. 009) rekonstruiert wird. Die Lehrerin kommentiert diesen Ansatz mit „Nein, du bist jetzt wieder bei Ergänzen“ (Z. 010) und „Du wolltest die Hilfsaufgabe nehmen: Ich nehme erst 300 weg“ (Z. 012), worauf hin Robin dann den abgedruckten Rechenweg produziert

Deutung der Befunde zur Verteilung der K-Hilfsaufgabe

Nachdem in Kap. 4.2.2. bereits deutlich wurde, dass „Ergänzen“ vornehmlich Rechnen in K-Schrittweise ist, bzw. ab Stunde 02-2 von der Lehrerin stark in die Richtung des schrittweisen Rechnens gelenkt wird, sind an den Befunden zur Verteilung der K-Hilfsaufgabe mehrere Aspekte interessant: Zunächst einmal kann man feststellen, dass sie häufiger auftritt, als die anderen beiden K-Strategien, die sich ebenfalls gegen K-Schrittweise behaupten müssen (3 Dokumente mit K-Vereinfachen, 2 Dokumente mit K-Stellenweise). Man kann weiterhin feststellen, dass sie früh auftritt, vor der Stunde 02-2, ab der dann „Ergänzen“ als Strategiekategorie stark mit schrittweisem Rechnen belegt wird.

Dass die K-Hilfsaufgabe in den Stunden 01-3 und 01-4 ihren Höhepunkt erreicht, mag auch an den Reflexionsphasen des Unterrichts liegen, denn zu Beginn der Stunde 01-3 wird zum ersten Mal ein Rechenweg öffentlich, der einen Rechenrichtungswechsel enthält (Rechnung von Niklas_K, wie weiter oben beschrieben) und die Idee der Hilfsaufgabe (Kompensieren eines zu großen Schrittes in Gegenrichtung, vgl. Kap. 2.2.2) in der Grundvorstellung Komplementbildung aufnimmt.

Während die Lehrerin in dieser Zeit noch Rechenrichtungswechsel beim „Ergänzen“ toleriert, so fokussiert sie dieses später auf rein schrittweises Rechnen, die Idee der Hilfsaufgabe manifestiert sich in ihrem Kategoriensystem im Bereich des wegnehmenden Rechnens, wie weiter unten noch deutlich werden wird. Damit ist jedoch erklärbar, warum die K-Hilfsaufgabe nur im explorativen Anfangsblock und später nur noch sehr vereinzelt auftritt.

Deutung des Aufgreifens der Hilfsaufgabenidee

Gerade wurde angedeutet, dass die Thematisierung von Rechenwegen zu Beginn der Stunde 01-3, welche die Aspekte der Idee der K-Hilfsaufgabe beinhalten, Auslöser dafür gewesen sein könnte, dass viele Kinder sich an eine solche Aufgabe in den Stunden 01-3 und 01-4 wagen.

Jener Rechenweg von Niklas_K (Abbildung 4.41, S. 187) enthält die für eine Hilfsaufgabe typischen Elemente (vgl. Kap. 2.2.2): Niklas geht mit einem glatten Vierhunderterschritt zur 693 und damit weit über das Ziel hinaus, muss also im nächsten Schritt einen Rechenrichtungswechsel vornehmen, und in Gegenrichtung kompensieren, was er zu viel aufgefüllt hat, um daraufhin den

Auffüllvorgang im dritten Schritt zu beenden. Die Kinder – so könnte man die Transkriptausschnitte deuten – sehen auch genau dieses Elemente der Hilfsaufgabe (glatt zu weit, kompensieren zurück) im Rechenweg.

Die Lehrerin aber sieht in diesem Rechenweg vermutlich vor allem die Idee des Stelle Herstellens: Der erste Schritt erreicht genau die Hunderterziffer der Zielzahl im Zwischenergebnis, der zweite die Zehnerziffer, der dritte die Einerziffer. Dies kann zufälliges Produkt der Hilfsaufgabenidee oder handlungsleitendes Ziel der Idee des Stelle Herstellens sein; dann wäre die Hilfsaufgabenidee nur Mittel zum Zweck, die Idee des Stelle Herstellens zu verfolgen.

Diese Ambivalenz ist auch in den vorgestellten Dokumenten von Lasse (Abbildung 4.32, S. 172), und Tom (Abbildung 4.33, S. 173) erkennbar, die weiter oben vorgestellt wurden: Betrachtet man Lasses zweite Rechnung (137+___=624) für sich, so scheinen die Rechenschritte zunächst plausibel die Hilfsaufgabenidee wiederzugeben (+500 geht glatt zu weit, -10 und -3 kompensieren diesen Schritt). Erst aus dem Kontext der weiteren drei Aufgaben erschliesst sich, da Lasse immer gleich vorgeht, dass er immer die Stellenwerte der Zielzahl herstellt, in der Reihenfolge Hunderterstelle, Zehnerstelle, Einerstelle, immer jeweils auch mit einem glatten Hunderterschritt, einem Zehnerschritt, und einem Einerschritt. Dies legt den Schluss nahe, dass Lasses übergeordneter Plan die Idee des Stelle Herstellens ist, und die verwendeten Elemente der Hilfsaufgabenidee eher Mittel zum Zweck sind, wenn sie zum Erreichen des Ziels notwendig sind.

Toms erste Rechnung (293+___=598) dagegen enthält keine Hinweise auf die Idee des Stelle Herstellens, wohl aber die für Hilfsaufgaben charakteristischen Elemente. Sie stellt vermutlich eine heuristische Variation dar, da der Rechenweg +300 und -2 einen eleganteren, effizienteren Weg als zum Beispiel der mit +200, +90, +8 darstellt. Diese Rechnung kann daher als ein Beispiel einer weiteren Variante dafür stehen, dass auch Hilfsaufgaben in der Grundvorstellung Komplementbildung entstehen, wenn die Schritte nicht durch die Leitidee des Stelle Herstellens motiviert sind, sondern diese – wie hier – von der Idee der „glatten Rechenzahlen“, die ja der Idee Hilfsaufgabe direkt innewohnen, ausgelöst werden (ein weiteres Beispiel: Abbildung 4.10, S. 127, mit einer anderen Variante des Nutzens glatter Zahlen).

Beide Dokumente, von Lasse und Tom, stammen aus der Stunde 01-3, in der zu Beginn am oben beschriebenen Dokumente von Niklas_K sowohl von den Kindern die Hilfsaufgabenidee, als auch von der Lehrerin die Idee des Stelle Herstellens thematisiert wurden – Lasse und Tom scheinen also unterschiedliche Aspekte der vorgestellten Aufgabe wahrgenommen und für sich umgesetzt zu haben.

Dieser Konflikt – ist eher die Idee des Stelle Herstellens oder die Idee der Hilfsaufgabe handlungsleitend – tritt bei vielen weiteren Dokumenten, die einen Rechenrichtungswechsel beinhalten, immer wieder auf. Da aber die Idee des

Stelle Herstellens auch ohne Rechenrichtungswechsel verfolgt werden kann, so kann man – einerlei wodurch genau motiviert – konstatieren, dass das Einbringen von Rechenrichtungswechseln ein Adaptionsprozess sein könnte, bei dem Elemente aus der (bereits aus dem zweiten Schuljahr bekannten, und zu diesem Zeitpunkt auch schon im Unterricht präsenten) W-Hilfsaufgabe in die Grundvorstellung Komplementbildung übertragen werden, wie auch die beschriebenen Äußerungen der Kinder in der Reflexionsphase über die K-Rechnung mit Rechenrichtungswechsel vermuten lassen.

Deutung der Dokumente zur Einschränkung der K-Hilfsaufgabe

Im weiter oben beschriebenen Dokument aus der Fliesenkreisreflexion der Stunde 02-2 (Abbildung 4.27, S. 162) enthält auch Jules Rechenweg charakteristische Elemente der Idee der Hilfsaufgabe (glatt zu weit gehen, kompensierend zurück) in der Grundvorstellung Komplementbildung, die Jule auch in ihrer Äußerung beschreibt („[…] zu viel weggenommen, […] also […] noch plus“, s. o.). Die Lehrerin aber sieht in Jules Rechenweg vermutlich eher die Idee des Stelle Herstellens („Sie wollte den Zehner vom Ergebnis bekommen“, s. o.). Zumindest lässt sie aber bei eigentlich schrittweiser Komplementbildung, die der Idee des Stelle Herstellens folgt, (noch) Rechenrichtungswechsel zu.

Robin dagegen rechnet direkt im ersten Schritt den für die Hilfsaufgabenidee typischen großen Hunderterschritt, um in den folgenden Schritten zurück zur 381 zu gelangen. Auch wenn man in seinem Weg ebenfalls die Idee des Stelle Herstellens sehen könnte (auch seine Rechenschritte stellen nacheinander die Hunderter-, Zehner- und Einerstelle der Zielzahl her), so scheint dieser große erste Schritt die Lehrerin zu veranlassen, hierin vor allem die Hilfsaufgabenidee zu sehen. Zwar erkennt sie am Rechenansatz auch die Grundvorstellung Komplementbildung („Du hast eine Plusergänzungsaufgabe erst gemacht“, s.o.), aber ein Hilfsaufgabenschritt scheint zu dieser Zeit für sie nur noch in der Grundvorstellung Wegnehmen sinnvoll zu sein, da sie irritiert scheint und ihre Meinung revidiert, diesen Rechenweg als „neuen Trick“ (s.o.) bezeichnet und Robin veranlasst, diesen der Strategiekategorie Hilfsaufgabe zuzuordnen, die allerdings im Unterricht rein mit wegnehmendem Rechnen belegt ist.

Auch in der Interaktion zwischen der Lehrerin und Robin im zweiten weiter oben beschriebenen Dokument aus der Stunde 02-3 macht die Lehrerin deutlich, dass die Hilfsaufgabenidee aus ihrer Sicht nur noch in der Grundvorstellung Wegnehmen existent ist und nicht zur Grundvorstellung Komplementbildung passt („Nein, du bist jetzt wieder bei Ergänzen“, s.o.), so dass dieser dann schließlich auch eine W-Hilfsaufgabe rechnet.

4.2.5 Vereinfachen

Um die Betrachtung komplementbildenden Rechnens in den Strategie-Kategorien des Strukturbaums für mentale Arithmetik abzuschließen, fehlt hier noch der Blick auf die zweite variierende Strategie, das K-Vereinfachen (vgl. Abbildung 4.35).

Abbildung 4.35: Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II, Fokus auf K-Vereinfachen

Befunde zur Verteilung des K-Vereinfachen

Nur 3 der 252 K-Strategie-zuordbaren Dokumenten (vgl. Abbildung 4.25, S. 158) enthalten eine Rechnung, die Aspekte enthält, die dem K-Vereinfachen (Etikett =) zuordbar sind – das K-Vereinfachen spielt demnach eine ähnlich marginale Rolle wie K-Stellenweise. Eines der Dokumente entstammt der Stunde 03-3 (Block Strategien anwenden), zwei weitere treten in der Stunde 07-3 auf (Strategien wiederholen), alle also relativ „mittig“ im Verlauf des Unterrichtsversuchs, nicht in der explorativen Phase, aber auch nicht mehr am Ende. Nach der Thematisierung von „Ergänzen stellengerecht“ und der Einführung des Algorithmus tritt K-Vereinfachen nicht mehr auf, während – so viel sei hier vorweggenommen (vgl. Kap. 4.4) – das W-Vereinfachen zur vorherrschenden Strategie im letzten Drittel des Unterrichtsversuchs wird. Auch hier sind – wie bei K-Stellenweise – weitere Interpretationen der Verteilung auf Grund der geringen Fallzahl nicht aussagekräftig.

Dokument zum K-Vereinfachen aus Block 03

In der Stunde 03-3 rechnen die Kinder an Aufgaben eines strukturierten Päckchens (vgl. Kap. 3.3) aus der Stunde 03-1 weiter. Sieben Kinder der Klasse, die in der Vorstunde krank waren oder noch nicht zu dieser Aufgabe kamen, sollen die Aufgabe „Welche Aufgabe ist besonders geeignet für die Rechenstrategie Vereinfachen? Begründe.“ angehen und danach die restlichen Aufgaben des

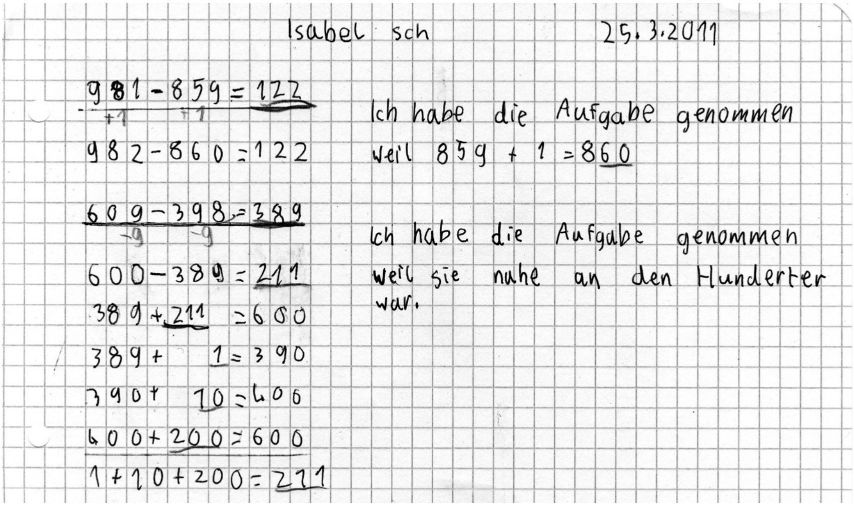


Abbildung 4.36: Isabel_Sch, Stunde 03-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Päckchens lösen. Sechs der sieben Kinder erledigen diese Aufgabe erwartungsgemäß mit Rechnungen in W-Vereinfachen. Isabel_Sch (Abbildung 4.36, oben) wählt eine erste Aufgabe (981-859) und vereinfacht diese zu 982-860, um anschließend direkt das Ergebnis zu notieren, ohne Einblick in ihre Rechenschritte zu geben. Die zweite Aufgabe (609-398) variiert sie zu 600-389, diese neue Aufgabe löst sie dann mit einer allen Notationskonventionen entsprechenden Nebenrechnung in K-Schrittweise, in der Variante des „Ergänzen stellengerecht" (vgl. Kap. 4.3.2), und schreibt dazu neben die Rechnung: „Ich habe die Aufgabe genommen, weil sie nahe an den Hunderter war".

Dokumente zum K-Vereinfachen aus Block 07

In der Stunde 07-3 (die letzte Stunde im Block „Strategien wiederholen") sollen die Kinder jede Aufgabe eines „schönen Päckchens mit Störung" (vgl. Kap. 3.3) jeweils mit „Ergänzen(+)" und in einer zweiten, selbstgewählten Strategie lösen. Die Lehrerin will hier (neben prozessbezogenen Kompetenzen wie Beschreiben, Begründen, Darstellen) das „Ergänzen" noch einmal anregen, da sie in den folgenden Stunden mit „Ergänzen stellengerecht" langsam zum Algorithmus der schriftlichen Subtraktion kommen möchte.
Zu Beginn der Stunde lädt sie die Kinder in den Fliesenkreis (vgl. Kap. 4.2.2) ein, die meinen, noch Beratungsbedarf zu haben, um dort gemeinsam die erste Aufgabe des Päckchens anzugehen. Mit Ben, Eric, Felix und Katharina

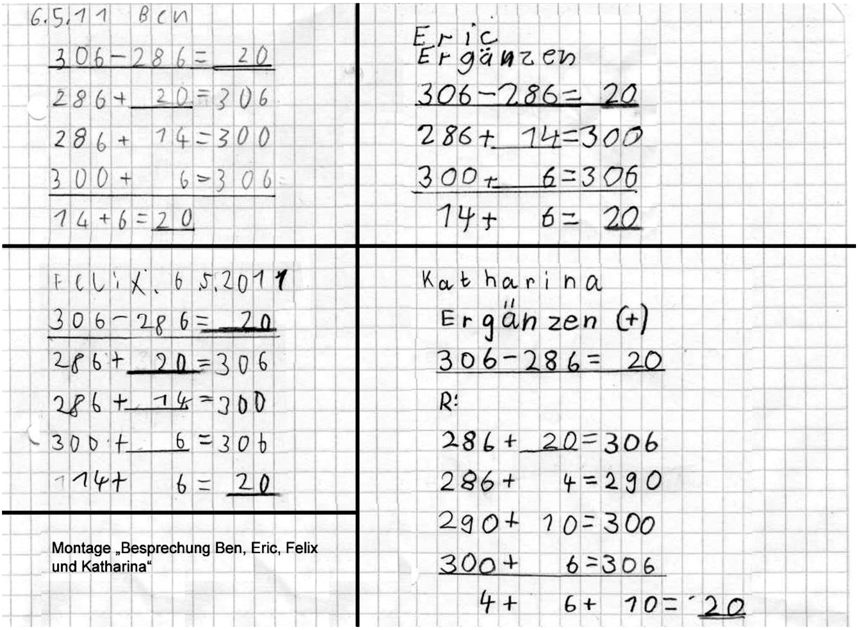


Abbildung 4.37: Montage „Besprechung Ben, Eric, Felix und Katharina“, Stunde 07-3, Arbeitsphase

(Montage der Rechnungen in Abbildung 4.37, oben) wird dort das „Ergänzen“ an der Aufgabe 306-286 besprochen (Transkript 16, S. 273). Zunächst wird geklärt, wie aus der Minusaufgabe eine Ergänzungsaufgabe wird (Ansatz mit Komplementlücke, Z. 002), dann geht es bei den Lösungen der Kinder zunächst um Varianten der Schritterzeugung und implizit (als *theorem in action*) um das Assoziativgesetz (Z. 009-014). Dann aber gibt die Lehrerin zwei Denkimpulse: „Und wenn ihr euch das Ergebnis jetzt anguckt, hättet ihr das vielleicht auch schneller machen können? In weniger Schritten?“ (Z. 015) und „Aber jetzt guckt euch doch mal die beiden Zahlen an. 286 und die 306. Fällt euch da nichts auf?“ (Z. 017). Nach Äußerung Erics, der auf die gleichen Einer hinweist, (Z. 018), äußert die Lehrerin „Weil der Einer schon bei beiden Zahlen gleich war, der war ja schon 6, da musste man ja eigentlich gar nichts mehr gucken. Nur noch die Zehnerziffern, ne.“ (Z. 021).

Später im Verlauf der Stunde wird genau diese Aufgabe (mit ausgewählten Kindern, wer, lässt sich auf Grund eines technischen Defektes nicht mehr rekonstruieren) noch einmal an der Tafel besprochen. Leider gibt es keine Aufzeichnung dieser Situation, also auch kein passendes Transkript, sondern nur das Foto vom Tafelanschrieb (Abbildung 4.38, S. 181). Hier notiert die Lehrerin zur Auf-

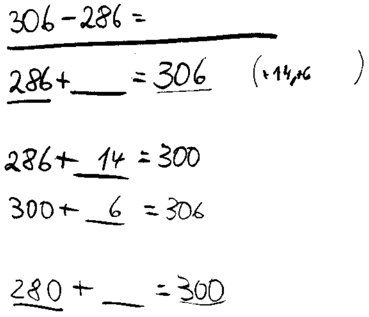


Abbildung 4.38: Tafelanschrieb (invertiert), Stunde 07-3, Reflexionsphase

gabe 286+___=306 den Weg in K-Schrittweise mit Schritten „zur glatten Hunderterzahl“, dann aber darunter zusätzlich die Aufgabe 280+___=300.

An die Interaktion zu ersten Rechnungen im Fliesenkreis der Stunde 07-3 schließt sich noch Erics Dokument (Abbildung 4.39, S. 182) aus der gleichen Stunde an. Die erste Aufgabe (306-286) ist dabei jene, die zuvor im Fliesenkreis entstand. Die Lehrerin gab zu Beginn der Stunde den Arbeitsauftrag, jede Aufgabe in zwei Strategievarianten zu rechnen, einmal mit „Ergänzen(+)“, die Eric in der linken Aufgabenspalte aufschreibt, und einmal in einer passenden, anderen Strategie, die Eric rechts notiert. Eric benutzt über der rechten Spalte den Begriff „Vereinfachen“, der aber eigentlich für das Rechnen in der Grundvorstellung Wegnehmen steht. Seine Aufgaben in dieser Spalte sind aber, wie man am Notationsformat erkennt, der Grundvorstellung Komplementbildung zuzuordnen.

Deutung des Dokumentes zum K-Vereinfachen aus Block 03

Isabel_Sch (Abbildung 4.36, S. 179) notiert in der ersten Aufgabe keine eigentliche Nebenrechnung, sondern nur die erste Nebenrechnungszeile. Da diese Nebenrechnungszeile keine für die Komplementbildung typische Ergebnislücke enthält, würde man diese Aufgabe vermutlich eher dem wegnehmenden Rechnen zuordnen.

Die zweite Aufgabe auf dem Arbeitsblatt lässt jedoch vermuten, dass Isabel bei der zweiten Aufgabe, möglicherweise auch bei beiden Aufgaben, in der Grundvorstellung Komplementbildung gedacht haben könnte: Auch bei der zweiten Aufgabe notiert Isabel die erste Zeile der Nebenrechnung als Wegnehmen (ohne Komplementlücke), aber sowohl die Wahl der Variante des Vereinfachens als noch deutlicher die Nebenrechnung lassen andere Vermutungen zu. Für ein wegnehmendes Rechnen wäre eine viel günstigere Vereinfachung der Aufgabe, beide Zahlen, Minuend und Subtrahend, um 2 zu erhöhen, um dann 611-400 rechnen zu können. Isabel aber erniedrigt beide Zahlen um 9 und vereinfacht zu 600-389, eine Aufgabe, die in der Grundvorstellung Wegnehmen nur umständlich zu rechnen ist, aber – wie die weitere Nebenrechnung von Isabel zeigt – in der Grundvorstellung Komplementbildung gut zu lösen ist („Stellengerechtes Ergänzen“, wie es Isabel auch in der Stunde zuvor, allerdings ohne zu Vereinfachen, benutzt hat, ohne Abbildung).

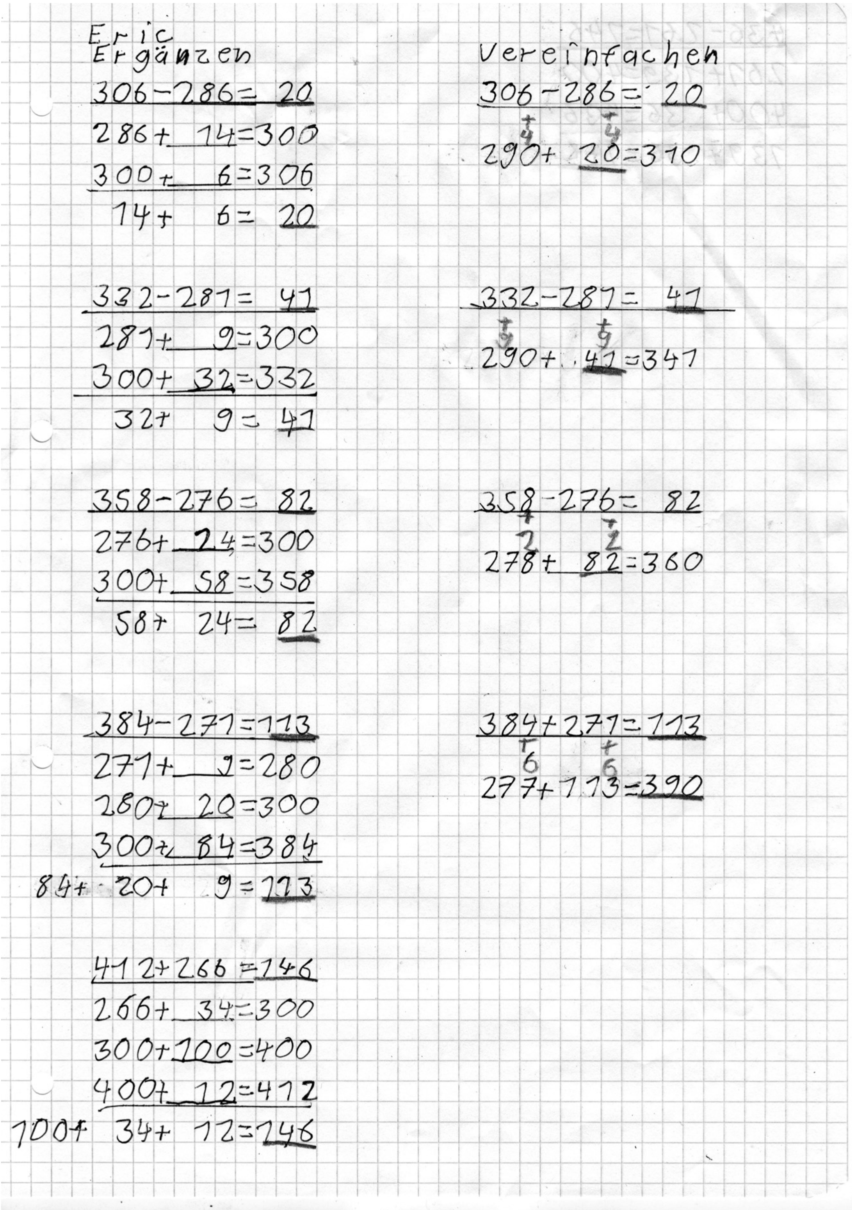


Abbildung 4.39: Eric, Stunde 07-3, Arbeitsphase

Die Lehrerin stellte den Arbeitsauftrag, eine Aufgabe zu suchen, die besonders geeignet für die Strategie Vereinfachen ist. Daher kann man vermuten, dass Isabel nicht zufällig diese Aufgabe wählt, sondern die Aufgaben durchmustert, welche sich besonders zum Vereinfachen und anschließendem komplementbildenden Auffüllen eignen, denn in ihrer Aussage „Ich habe die Aufgabe genommen, weil sie nahe an den Hunderter war" kann sich das „sie" – die Zahl, die zuerst vereinfacht gedacht wird, und die andere mitschleppt – auch auf den Minuenden 609 beziehen, der zum glatten Minuenden 600 vereinfacht dann gut Auffüllen zu vollen Stellen ermöglicht. Man könnte also vermuten, dass Isabel von Anfang an Vereinfachen in der Grundvorstellung Komplementbildung gedacht hat, also eine Aufgabe mit Zahlenwerten gesucht hat, die sich nach dem Variieren gut komplementbildend rechnen lässt, auch wenn das Variieren selbst notiert ist, wie es in der Grundvorstellung Wegnehmen üblich ist (es wurden ja keinerlei Notationskonventionen für das Vereinfachen in der Grundvorstellung Komplementbildung thematisiert).

Deutung der Dokumente zum K-Vereinfachen aus Block 07

In der Fliesenkreiskreisbesprechung der Stunde 07-3 (Abbildung 4.37, S. 180 und Transkript 16, S. 273) rechnen die Kinder die Aufgabe 286+___=306 zunächst mit „Ergänzen(+)", also in K-Schrittweise im Additionsformat. Dann aber weist die Lehrerin auf die beiden gleichen Einer hin (Z. 017), und fordert die Kinder auf, darüber nachzudenken, wie man schneller (als mit den Schritten +14 und +6) zum Ziel gelangen könne (Z. 015).

Schneller mag bedeuten, die Rechnung auf einen Schritt zu reduzieren. Abschließend stellt sie fest, weil der Einer bei beiden Zahlen gleich sei, „da musste man ja eigentlich gar nichts mehr gucken. Nur noch die Zehnerziffern" (Z. 021). Die Begriffe „Einer" und „Ziffern" könnte man als Indiz nehmen, dass die Lehrerin hier stellenweises Vorgehen in die Rechnung hineindenkt, aber stellenweises Auffüllen würde wegen des Stellenwertübergangs zwischen Zehner- und Hunderterstelle die Rechnung eigentlich nicht „schneller" (also in einem Schritt zu rechnen) machen.

Mit den Worten „da musste man ja eigentlich gar nichts mehr gucken. Nur noch die Zehnerziffern" (Z. 021) könnte sie auch beschreiben, beide Einer wegzudenken, und nur noch die Aufgabe ab der Zehnerziffer zu betrachten. Denn an der Tafel (Abbildung 4.38, S. 181) notiert sie die Aufgabe 280+___=300, also mit „weggedachten" Einern (die dann vermutlich mit einem Schritt, +20, gelöst werden soll). Das „Wegdenken" der Einer könnte dann als eine gleichsinnige Veränderung um -6 bei Minuend und Subtrahend verstanden werden, also genau das, was der Idee des Vereinfachens entspricht, hier in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Vermutlich nimmt Eric (Abbildung 4.39, S. 182) genau diese Anregung aus dem Fliesenkreis mit: In der rechten Spalte vereinfacht er die Ausgangsaufgabe (das gleichsinnige Verändern ist deutlich gekennzeichnet), um dann mit der variierten, neuen Aufgabe komplementbildend (am Ansatz der Nebenrechnung erkennbar) zu rechnen.

4.2.6 Rechenarten und Notationsformen

Innerhalb der mentalen Arithmetik (als Klammerbegriff für alles nichtalgorithmische, vgl. Abbildung 4.40, unten) bestünde, dem Strukturbaum für mentale Arithmetik weiter folgend, abschließend die Möglichkeit, zu entscheiden, ob bei einem Rechenweg die für den Lösungsprozess notwendigen Teilschritte der Rechnungen aufgeschrieben („halbschriftlich“) oder internalisiert im Kopf ausgeführt werden. Darauf wird zunächst in diesem Kapitel eingegangen.

Zusätzlich zur Wahl der Rechenart soll dann in diesem Kapitel noch dargestellt werden, welche Rolle die Notationsformen (informell, standardisiert, am Rechenstrich, vgl. Kap. 2.2.1) des halbschriftlichen Rechnens im vorliegenden Unterricht beim Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung spielen.

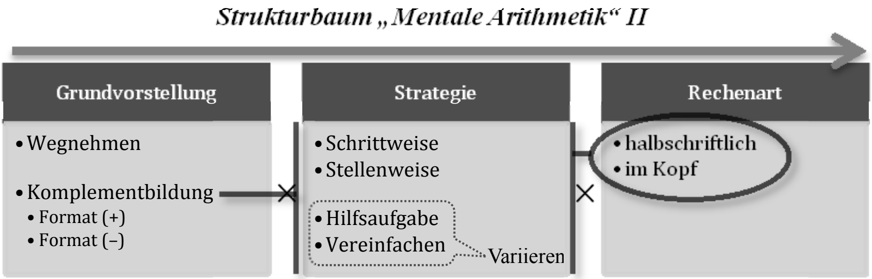


Abbildung 4.40: Strukturbaum „Mentale Arithmetik“ II, Fokus auf Rechenart

Befunde zur Verteilung auf die Rechenarten

Mit Hilfe der Auswertungssoftware kann festgestellt werden, dass von den 266 Dokumenten, die mindestens eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung enthalten, 239 eine solche in halbschriftlicher Form enthalten, dagegen auf 42 Dokumenten das Rechnen internalisiert erfolgt. Im Wesentlichen treten internalisierte K-Rechnungen erwartungsgemäß im letzten Drittel des Unterrichts auf. Um eine Analyse der internalisierten Rechenwege zu ermöglichen, erfolgten selbst diese nicht vollständig internalisiert, sondern die Kinder werden gebeten, mit Hilfe der Klammernotation (vgl. Kap. 2.2.2, Beispiele hierfür sind Abbildung 4.6 auf S. 120 oder Abbildung 4.23 auf S. 152) ihre Teilschritte nachvollziehbar zu dokumentieren.

Deutung der Befunde zur Verteilung auf die Rechenarten

Im Unterricht der Studie besteht – abgesehen von der Stunde 11-2 – eigentlich nie eine echte Wahl zwischen diesen Rechenarten, denn die Lehrerin gibt in allen anderen Stunden die Rechenart für die Kinder vor. Trotzdem lösen einige Kinder zumindest Teile halbschriftlich notierter Rechnungen auch internalisiert, als Beispiel mag hier das Vorgehen von Priscilla beim stellenweisen Komplementbilden dienen, wie es in Kap. 4.2.3 beschrieben wurde. Auf den Abdruck der Verteilung der Rechenarten wurde hier aus Platzgründen und auch deshalb verzichtet, da diese Wahl – wie beschrieben – nicht frei war, und somit auch der Verteilung als solcher keine besondere Bedeutung zugemessen werden kann.

Man mag vielleicht noch konstatieren, dass die Kinder von sich aus auch früher die internalisierte Rechenart gewählt hätten, wenn die Lehrerin nicht immer wieder auf die Notation von Rechenschritten gedrängt hätte – ein Umstand, welcher der beabsichtigten Beforschung der Rechenwege von vornherein geschuldet war, und sich in einem nicht dokumentierten (und analysierten) Unterricht möglicherweise anders gestaltet hätte. Generell sind die Übergänge jedoch fließend – selbst bei langkettigen Rechnungen in K-Schrittweise finden doch möglicherweise noch weitere, kleinere Teilschritte zusätzlich im Kopf statt, welche die Kinder nicht weiter explizieren, etwa bei den dort auftretenden Stellenwertübergängen.

Befunde zu Notationsformen halbschriftlichen komplementbildenden Rechnens

Im Unterricht der Studie benutzen die Kinder keine informellen Notationsformen beim halbschrifltichen Komplementbilden, auch beim Wegnehmenden Rechnen lassen sich solche Notationsformen nur in zwei marginalen Einzelfällen ganz zu Beginn des Unterrichts finden.

Alle anderen halbschriftlichen Rechnungen (und somit auch komplementbildende) lassen sich in der großen Mehrheit der Kategorie Standardnotationsform zuordnen, mit Ausnahme der Rechenstrichrechungen (s.u.). In den explorativen Blöcken des Unterrichts thematisiert die Lehrerin immer wieder die zum Teil noch unvollkommenen Standardnotationsformen in einzelnen Aspekten (Abgrenzen der Nebenrechnung durch einen Strich, unterstreichen des Ergebnisses in Nebenrechnung und nach Eintrag in die Rechenansatzzeile, stellengerechte Schreibweise, etc.) allgemein für die halbschriftliche Subtraktion, aber auch speziell für die Komplementbildung, etwa wenn sie die Notation des Komplementes als unterstrichene Lücke oder das Abgrenzen der Neben-Nebenrechnung durch einen weiteren Strich (wenn z.B. die Beträge von Teilschritten addiert werden) thematisiert. Als Beispiele hierfür können die in Kap. 4.2.1 vorgestellten Dokumente mit den zugehörigen Transkripten von Jule (Abbildung 4.19, S. 147 mit Transkript 3, S. 264, Z. 005-012) oder Niklas_V (Abbildung 4.21, S. 151 mit Transkript 5, S. 266, Z. 007-009) dienen.

Befunde zur Nutzung des Rechenstrichs

Die Kinder der Studie haben den Rechenstrich bei der Thematisierung erster mentaler Arithmetik im 2. Schuljahr ausführlich benutzt, und rechneten bei der im ersten Halbjahr des 3. Schuljahrs behandelten halbschriftlichen Addition im Tausenderraum rein auf der Zahlenebene, sie nutzten dort den Rechenstrich von sich aus nicht. Trotzdem beschließt die Lehrerin zu Beginn des Unterrichts der Studie, die Nutzung des Rechenstrichs erneut anzuregen, nachdem die meisten Kinder im Pretest rein auf der Zahlenebene gerechnet haben, einige wenige aber auch Aufgaben am Rechenstrich (W-Schrittweise) gelöst haben. Zu Beginn der Stunde 01-1, nachdem der Kinokontext als solcher und die Kontextaufgabe „Im Kino sitzen 526 Leute, 389 davon gehen zur Pause“ dieser Stunde besprochen wurden, regt die Lehrerin zunächst Adaptionsprozesse vom halbschriftlichen Addieren im Tausenderraum an, vor allem bei der Notation der Nebenrechnungen (Transkript 17, S. 274, Z. 001), und bittet um die Notation jedes einzelnen Rechenschrittes. Dann erinnert sie an den Rechenstrich und regt an, man könne „auch an dem Rechenstrich seinen Rechenweg aufschreiben, dann sieht man besser, wie du gerechnet hast“ (Z. 002).

Es finden sich im Unterricht der Studie insgesamt nur 5 Dokumente, in denen eine komplementbildende Rechnung auftritt, die originär am Rechenstrich gerechnet wird, also Prozedur und Prozess am Rechenstrich stattfindet, ohne dass halbschriftliche Nebenrechnungen notiert wurden (vgl. Dokument Benedikt, Stunde 01-2, Abbildung 4.43, S. 197). Dagegen befinden sich unter den 62 Dokumenten in beiden Grundvorstellungen, auf denen der Rechenstrich auftritt, insgesamt 34 in der Grundvorstellung Komplementbildung, allein 19 davon im explorativen Kinoblock 01. Der Rechenstrich verliert in beiden Grundvorstellungen schnell an Bedeutung, mit Ende des Kino-Blockes tritt er nur noch auf einem W- und zwei K-Dokumenten in Block 02 auf. In Block 10 wird das Rechnen am Rechenstrich erneut aufgegriffen, hier treten auf 13 Dokumenten Rechenstrichrechnungen in der Komplementbildungsvariante „Ergänzen stellengerecht“ auf, die mit dem schriftlichen Verfahren verglichen werden.

Beispieldokumente zur Rolle des Rechenstrichs

Im explorativen Kinoblock ist häufig zu beobachten, dass die Kinder zusätzlich zur halbschriftlich notierten originären Rechnung eine Darstellung der darin enthaltenen Rechenschritte am Rechenstrich produzieren. So tut dies auch Eric im K-Initialdokument aus Stunde 01-2 (Abbildung 4.18, S. 145, vgl. Kap. 4.2.1), er transformiert seine in K-Schrittweise durchgeführte halbschriftliche Rechnung mit der gleichen Schrittfolge auf den Rechenstrich, dokumentiert damit den Auffüllvorgang von 389 zur 526, und fügt hinzu: „Auf den Bögen stehen die Zahlen die man dann zusammen rechnen“ muss.

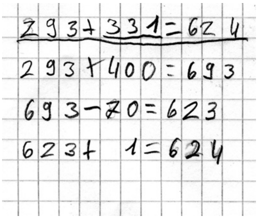


Abbildung 4.41: Niklas_K, Stunde 01-2, Arbeitsphase, Ausschnitt

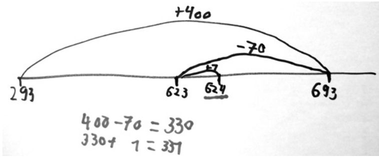


Abbildung 4.42: Rechenstrich auf Papier, Stunde 01-3, Einführungsphase

Auch Jule (Abbildung 4.19, S. 147) transformiert ihre im Subtraktionsformat schrittweise durchgeführte halbschriftliche Rechnung in eine entsprechende Rechenstrichdarstellung. Nachdem zunächst Jules Rechenweg besprochen und Notationskonventionen thematisiert wurden, macht die Lehrerin auch noch die Rechenstrichdarstellung zum Thema (Transkript 4, S. 265). Zunächst fokussiert sie auf die erfolgreiche Transformation der Schritte (Z. 003, durch zeigen in 004), aber Niklas_V merkt an: „das ist eigentlich genau der gleiche, […] bloß, sie rechnet das dann nicht beim Rechenstrich zusammen“ (Z. 004). Es entspannt sich ein Gespräch darüber, dass das Ergebnis einer Komplementbildung am Rechenstrich nicht direkt ablesbar ist (Z. 005-012), sondern diese erst aus der Summe der Bogenzahlen ermittelt werden muss: „Da muss sie noch, das, die Zahlen noch zusammenrechnen, die sie minus gerechnet hat“ (Katharina, Z. 014).

In einer langen, gemeinsamen Interaktion (Transkript 18, S. 274) zu Beginn der Stunde 01-3 bespricht die Lehrerin eine halbschriftliche komplementbildende Rechnung (Abbildung 4.41, oben) von Niklas_K, aus der nicht klar wird, wie Niklas aus den Einzelschritten zum Ergebnis kam, durch die Transformation in eine Rechenstrichdarstellung (Abbildung 4.42, oben). Die Lehrerin bezeichnet dabei das Transformieren als „den Rechenweg […] auf dem Rechenstrich vor[zu]machen“ (Z. 001). Zunächst wird der Ansatz (293+___=624, Z. 001-011) und die gewählte Grundvorstellung samt Format („Ergänzungsplusaufgabe“, Z. 012-014) geklärt, dann wird Schritt für Schritt die halbschriftliche Rechnung am Rechenstrich nachvollzogen. Im ersten Schritt rechnet Niklas mit +400 bereits zu viel dazu, und geht über die Zielzahl des Auffüllvorgangs hinaus, was zunächst als Hilfsaufgabenidee, später auch als Idee des Stelle Herstellens interpretiert wird (vgl. dazu die in Kap. 4.2.4 unter diesem Blickwinkel durchgeführte Analyse des Transkripts). Tom, der den Rechenstrich unter Mitwirkung anderer Kinder erzeugt, macht diesen Schritt von +400 direkt bis zum Ende des Striches (Z. 021-029) und zeichnet den folgenden kompensierenden Schritt in Gegenrichtung sowie den letzten Schritt zur Zielzahl ein (Z. 030).

Deutung der Befunde zu den Notationsformen

Dass die Kinder keine informellen Notationsformen nutzen, liegt vermutlich daran, dass sie bereits im zweiten Schuljahr die Form halbschriftlichen Rechnens (Abgrenzung der Nebenrechnung mit einem Strich, Notation aller Zwischenschritte) ausführlich kennengelernt haben, und somit im Sinne des Prinzips der fortschreitenden Mathematisierung (vgl. Kap. 3.2.2) dieses Vorwissen aufgreifen und auf den neuen Zahlenraum und dadurch komplexere Rechnungen adaptieren.

Dass also standardisiert notierte Rechnungen den Schwerpunkt halbschriftlichen Rechnens bilden, mag an dieser Stelle nicht verwundern, allerdings ist dieser Adaptionsprozess nicht trivial: Am Anfang haben die Kinder noch Schwierigkeiten, die gedachte Rechenstrategie als Notation in allen Teilen nachvollziehbar abzubilden. Vermutlich auch darum spricht die Lehrerin in der explorativen Phase immer wieder Notationskonventionen beim halbschriftlichen Rechnen an. Sie führt diese Notationskonventionen also nicht qua Definition ein, sondern thematisiert im explorativen Block immer wieder eher beiläufig einzelne Aspekte der Notationskonventionen allgemein, aber auch die Besonderheiten des komplementbildenden Rechnens (Komplementlücke, Neben-Nebenrechnung, usw.; weitere Beispiele: Transkript 19, S. 276, Z. 008-016; Transkript 20, S. 278, Z. 012-029), vermutlich um damit auf die von ihr antizipierte Idealform (vgl. Kap. 2.2.2) zu lenken und eine gemeinsame Kommunikationsbasis zu schaffen.

Deutung der Befunde zur Nutzung des Rechenstrichs

Zur Rolle des Rechenstrichs werden in der mathematikdidaktischen Literatur (vgl. Kap. 2.2.3) zwei Aspekte beschrieben: Erstens hilft der Rechenstrich den Kindern vor allem bei informellen Lösungsprozessen, also wenn sie neu dem heuristischen Rechnen begegnen, weil Prozedur und Prozess parallel und in einfachster Weise entwickelt werden, dabei durch die quasi-proportionale Anordnung der Zahlen stets ein Gefühl für die quantitative Bedeutung der Teilprozesse entsteht. Zweitens aber wird auch immer wieder die Prozessdokumentationsfunktion des Rechenstrichs betont, da die Kinder mit dem Rechenstrich ihre Lösungsprozesse anderen Kindern einfach darstellen und damit kommunizierbar machen können.

Wie bereits beschrieben, finden sich im Unterricht der Studie eigentlich keine informellen Notationsformen, sondern die Kinder rechnen direkt in der Standardnotationsform für halbschriftliches Rechen. Daher ist zu vermuten, dass sie den Rechenstrich in der oben genannten ersten Funktion als Stütze, um Prozedur und Prozess zu entlasten, nicht mehr benötigen, sondern direkt auf der reinen Zahlenebene rechnen können, was sich vermutlich auch daran zeigt, dass nur 5 komplementbildende Rechnungen originär am Rechenstrich entstehen.

Um so mehr scheint daher die zweite Funktion des Rechenstrichs, die Prozessdokumentation, im Unterricht der Studie eine Rolle zu spielen, da bei der überwiegenden Zahl der Dokumente komplementbildenden Rechnens, auf denen der Rechenstrich auftritt, dieser nachträglich als Transformation der halbschriftlichen Rechnung entsteht. Daran mag auch der oben beschriebene Auftrag der Lehrerin direkt in der ersten Stunde des Unterrichts, „auch“ am Rechenstrich zu rechnen (Transkript 17, S. 274, Z. 002, s.o.) einen Anteil haben, denn „auch“ am Rechenstrich kann bedeuten „wahlweise“ oder „zusätzlich“ am Rechenstrich zu arbeiten. Da sie „auch“ mit „aufschreiben“ statt „rechnen“ verbindet, wird dies vermutlich eher in Richtung „zusätzlich“ verstanden. Mit „dann sieht man besser, wie du gerechnet hast“ könnte in diesem Sinne ebenfalls gemeint sein, den Rechenstrich nachträglich zur Verdeutlichung der halbschriftlichen Rechenschritte zu benutzen. Die Lehrerin sieht hier also vermutlich auch mehr die Dokumentationsfunktion, als die prozessbegleitende Funktion des Rechenstrichs, und die Formulierung „dann sieht man besser“ verweist bereits darauf, dass andere Adressaten diese Darstellung des Rechenweges am Rechenstrich verstehen können sollen.

Abschließend mag man hier noch betrachten, warum der Rechenstrich, wenn überhaupt, nur im explorativen Kino-Block benutzt wird: Vermutlich werden in dieser Unterrichtsphase noch Bedeutungen einzelner Rechenschritte (gerade beim komplementbildenden Rechnen) ausgehandelt, deren Wirkungen am Rechenstrich veranschaulicht werden (s.u.) – diese Evidenz ist nach der Konsolidisierung des Verständnisses einzelner Teilschritte vermutlich im weiteren Verlauf des Unterrichts nicht mehr gegeben.

Weiterhin transformieren einige Kinder ihre Rechnung in eine Rechenstrichdarstellung vermutlich nur deshalb, weil die Lehrerin zu Beginn des Kinoblocks explizit darum bittet. Dies könnte am Beispiel von Niklas_V aus Stunde 01-2 deutlich werden, der seine eigene Rechnung in K-Schrittweise im Subtraktionsformat halbschriftlich erstellt und in die Rechenstrichdarstellung transformiert (Abbildung 4.21, S. 151), aber die folgenden, zusätzlichen Rechnungen, bei denen er sich vermutlich an von anderen Kindern (Namen als Kommentar) vorgestellten Beispielen orientiert, enthalten keine Rechenstrichdarstellung mehr. Die Lehrerin hatte ja auch die Worte „dann sieht man besser, wie du gerechnet hast“ (Transkript 17, S. 274, Z. 002) benutzt, der zweite und dritte Weg stellt aber die Adaption der Ideen anderer Kinder dar.

In den weiteren Blöcken, in denen auch die Lehrerin nur noch rein auf der Zahlenebene argumentiert, spielt der Rechenstrich auch für die Prozessdokumentation und Lösungs-Interaktion keine Rolle mehr und wird nur noch einmal im Block 10, erneut auf Bitten der Lehrerin, wieder aufgegriffen.

Deutung der Beispieldokumente zur Rolle des Rechenstrichs

Erics oben dargestelle Rechnung am Rechenstrich aus der Stunde 01-2 (Abbildung 4.18, S. 145) stellt eine Transformation des halbschriftlichen Rechenweges dar. Im Kommentar zur Rechnung verweist Eric aber bereits auf einen wesentlichen Unterschied des komplementbildenden Rechnens am Rechenstrich zum wegnehmenden Rechnen: Das Ergebnis ist nicht sofort ersichtlich. Während man beim Wegnehmen mit dem letzten Schritt „auf dem Ergebnis landet", wird hier das Komplement als Spanne zwischen Subtrahend und Minuend durch Ausmessen, hier noch durch Auffüllen (später auch durch Entleeren) ermittelt, d.h. die Start- und Zielzahl dieses Vorgangs stehen unter dem Strich, aber die Zielzahl ist nicht das Ergebnis, sondern die Spanne des Komplementes muss durch Aufsummieren der Schrittbeträge nachträglich ermittelt werden. In der halbschriftlichen Rechnung geschieht dies im letzten Schritt, wenn die Schrittbeträge der einzelnen Nebenrechnungszeilen (im Kopf, wie bei Eric, oder später als Neben-Nebenrechnung darunter) addiert werden und die Summe in die Lücke des Rechenansatzes 389+___=526 eingetragen wird.

Jules ebenfalls oben dargestelltes Dokument (Abbildung 4.19, S. 147, Transkript 4, S. 265) enthält eine Transformation des Rechenwegs in die Rechenstrichdarstellung, aber unterscheidet sich von Erics Rechenweg darin, dass sie zum einen die gerade angesprochene Neben-Nebenrechnung aufschreibt, zum anderen entleerend im Subtraktionsformat rechnet. Niklas_Vs Hinweis „das ist eigentlich genau der gleiche, […] bloß, sie rechnet das dann nicht beim Rechenstrich zusammen" weist also vermutlich darauf hin, dass – wie vorgenannt – das Ergebnis am Rechenstrich beim komplementbildenden Rechnen nicht direkt ablesbar ist, aber dieses in der halbschriftlichen Rechnung als Neben-Nebenrechnung notiert werden kann. Zusätzlich wird vor allem in der Interaktion über die Bedeutung der Zahlen am Rechenstrich deutlich, dass im Subtraktionsformat, obwohl Minus gerechnet wird, die Beträge dieser Schritte zur Ermittlung der Gesamtkomplementspanne addiert werden müssen, wie die Transkriptzeilen um Katharinas oben beschriebene Aussage deutlich machen. Jules Dokument nutzt die Lehrerin also, um die Grundvorstellung Komplementbildung in der Darstellung am Rechenstrich anzuregen, und auf die Besonderheiten des Rechnens in dieser Grundvorstellung hinzuweisen.

Dem Rechenweg von Niklas_K (Abbildung 4.41, S. 187, s.o.) fehlt dagegen wieder die Neben-Nebenrechnung, die Niklas vermutlich im Kopf ausgeführt hat, die hier von besonderer Herausforderung ist, da Rechenrichtungswechsel auftreten und die Beträge der einzelnen Teilschritte richtig verrechnet werden müssen. Vermutlich ist dies mit ein Grund, warum die Lehrerin diesen Rechenweg in der gemeinsamen Reflexion (Transkript 18, S. 274) in eine Rechenstrichdarstellung transferieren lässt (Abbildung 4.42, S. 187). Gerade bei den Rechenrichtungswechseln und ihrer Wirksamkeit für das Ermitteln der Komplementspanne geht es nicht nur darum, die Prozesse der Lösung erneut nachzuvollziehen, sondern auch darum, den weiter oben beschriebenen Aspekt ausnutzen zu können, durch die Anordnung der Zahlen ein Gefühl für die quantitative Bedeutung der Teilprozesse herzustellen. Die „Wirksamkeit“ der Rechenrichtung für das Ermitteln der Komplementspanne wird dabei vor allem an der zeichnerischen Darstellung am Rechenstrich deutlicher als auf der reinen Zahlenebene:Tom etwa zeichnet wie oben beschrieben direkt den ersten Bogen bis zum Ende des Striches, vermutlich weil ihm klar ist, dass nun ein kompensierender Schritt in Gegenrichtung erfolgen wird. Hier wird erkennbar, dass der Rechenstrich sowohl diesen quantitativen Aspekt in der komplementbildenden Hilfsaufgabenidee deutlich macht (zu weit rechnen, über das Ziel hinaus, deshalb darf die Landung ganz weit rechts erfolgen), als auch die Wirksamkeit der Rechenrichtungen, denn der kompensierende Schritt in Gegenrichtung erfolgt nicht nur, um „zurück[zu]nehmen“ (Z. 033), was „zu viel“ (ebd.) war, sondern verringert auch die Komplementspanne, was im Transkript in den Zeilen 053 bis 070 implizit ausgehandelt wird, ohne dass dies konkret benannt wird.

4.2.7 Zusammenfassung

In Kapitel 4.2 wurden Befunde und deren Deutung zu folgendem Forschungsinteresse vorgestellt:

FI2: Welche Varianten von Komplementbildung lassen sich im Unterricht wann beobachten, wie …

1. *Rechnungen im Additions- oder im Subtraktionsformat,*
2. *Rechnungen in der Strategiekategorie Schrittweise,*
3. *Stellenweise,*
4. *Hilfsaufgabe und*
5. *Vereinfachen, sowie*
6. *Varianten der Rechenarten und Notationsformen?*

Dazu wurden kapitelweise aufgefächert Verteilungsdarstellungen analysiert und ausgewählte, beispielhafte Schülerdokumente, ggf. mit den zugehörigen Interaktionen vorgestellt und gedeutet. Dabei traten folgende Ergebnisse auf:

Formate

Zunächst kann man festhalten, dass das Subtraktionsformat entgegen den Erwartungen im Unterricht der Studie sehr früh originär aus dem Denken der Kinder auftritt, existent ist, und existent bleibt.

Bei der Verteilungsanalyse des Auftretens des Subtraktionsformates wird offenbar, dass dieses nach einer Blüte in der explorativen Phase im weiteren Verlauf zwar stark abnimmt (vermutlich, da die Lehrerin „Ergänzen“ stark als auffüllendes, schrittweises Rechnen im ebenfalls von Anfang an präsenten Additionsformat anregt, um damit später den Algorithmus einführen zu können), aber doch nie ganz verschwindet, sondern bis zum Ende vorhanden bleibt. Die Lehrerin fängt die starke Existenz des Subtraktionsformates damit auf, dass sie selbst ihre Strategiekategorie „Ergänzen“ in „Ergänzen(+)“ und „Ergänzen(-)“ differenziert, dem Subtraktionsformat Raum gibt, und die Formatwahl kultiviert.

Es zeigen sich keine Indizien, dass komplementbildendes Rechnen im Subtraktionsformat verständnisschwieriger als solches im Additionsformat sein könnte, ebenso besteht vermutlich nicht die Gefahr der Verwechselung mit dem Wegnehmen durch die gleiche Operationsrichtung. Dagegen zeigen einige Dokumente auf, dass Kinder dieser Studie problemlos zwischen beiden Formaten hin- und herwechseln können, auch, wenn nicht alle Kinder gleich stark das Subtraktionsformat nutzen.

K-Schrittweise

Bei der Betrachtung der Strategiekategorien innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung zeigt sich, dass „Ergänzen“ hauptsächlich schrittweises Rechnen ist, da die allergrößte Zahl der Dokumente, auf denen in dieser Grundvorstellung gerechnet wird, einen schrittweisen Charakter aufweisen. Schnell zeigt sich, dass diverse Varianten des schrittweisen Rechnens entstehen können, und dabei die Idee des Stelle Herstellens eine zentrale Rolle einnimmt, der noch gesondert in Kap. 4.3 nachgegangen wird.

Im Kategoriensystem der Lehrerin scheint „Ergänzen“ stark mit schrittweisem Rechnen belegt zu sein, da sie, wenn die Kinder „ergänzen“, immer stärker ein – wenn auch variantenreiches – rein schrittweises Vorgehen anregt, dabei aber weiteren Strategievarianten wie der Hilfsaufgabenidee immer weniger Beachtung schenkt.

K-Stellenweise

Obschon die Lehrerin „Ergänzen“ stark in Richtung schrittweises Rechnen lenkt, so können auch Varianten komplementbildenden Rechnens beobachtet werden, die den anderen Strategiekategorien zuordbar sind. Auch wenn die Strategie Stellenweise in der Grundvorstellung Komplementbildung nur auf zwei Dokumenten (relativ spät in Block 07 und Block 12) nachweisbar ist, so sind gerade diese zwei Dokumente bedeutsam: Obwohl „Ergänzen“ (zu diesem Zeitpunkt) stark mit schrittweisem Vorgehen belegt ist, so treten diese zwei Dokumente dennoch auf und belegen, dass es zumindest denkbar ist, dass Kinder auch in dieser Grundvorstellung stellenweise denken können und Komplementbildungen durchführen.

Aus forschungsmethodischer Sicht kann hier noch festgehalten werden, dass beide Dokumente nicht als solche der Strategiekategorie K-Stellenweise zuordbar sind, sondern diese Zuordnung erst an unerwarteten Stellen durch die Interpretation der begleitenden Unterrichtsinteraktion möglich wurde, es sich im

Nachhinein also auszahlte, eine *thick description* im Sinne des *Design Research* Ansatzes (vgl. Kap. 3.2.1) anzufertigen und den Unterricht möglichst unselektiert und komplett zu dokumentieren und zu analysieren.

K-Hilfsaufgabe

Als weitere in der Grundvorstellung Komplementbildung mögliche Strategievariante tritt die K-Hilfsaufgabe deutlich hervor gegenüber dem stellenweisen Rechnen oder dem Anwenden des Variierens als Alternative zum schrittweisen Rechnen. Zum einen ist sie sehr früh (bereits im explorativen Kinoblock) stark vertreten, zum anderen entsteht sie aber vermutlich erst im Zusammenhang mit der Idee des Stelle Herstellens beim Rechnen in K-Schrittweise, ihre Nutzung lässt sich aber auch ohne diesen Zusammenhang nachweisen.

Einerlei, ob die Kinder nun originär die Hilfsaufgabenidee in der Grundvorstellung Komplementbildung anwenden, oder diese quasi nur als Zwischenstation zum späteren „Ergänzen stellengerecht“ aus der Idee des Stelle Herstellens entsteht – hier zeigt sich, dass die Kinder eine eigentlich in der Grundvorstellung Wegnehmen kultivierte Idee in die Grundvorstellung Komplementbildung übertragen und anwenden können, also vermutlich in der Lage sind, Ideen, die Strategiekategorien ausmachen, in beiden Grundvorstellungen zu adaptieren.

Nach ihrer Blüte in den explorativen Blöcken stirbt die K-Hilfsaufgabe vermutlich durch die spätere starke Lenkung des „Ergänzens“ auf schrittweises Rechnen wieder aus. Deutlich zeigt sich in der in Kap. 4.2.4 beschriebenen Interaktionen zu Robins Dokumenten, dass die Lehrerin die Hilfsaufgabenidee der Grundvorstellung Wegnehmen zuordnet, und diese in der Grundvorstellung Komplementbildung nicht mehr zulässt. Sie lässt sich aber nach der Stunde 02-2 immer noch marginal darin nachweisen, einmal in Block 03, einmal in Block 07. Mit der Festlegung des Komplementbildens auf schrittweises Vorgehen könnten also für die K-Hilfsaufgabe ähnliche Überlegungen wie die Ausführungen zu K-Stellenweise vorab gelten, vermutlich ist sie nur deswegen stärker, weil sie bereits vor der Thematisierung der Standardstrategiekategorien in Block 02 und dem Festlegen des „Ergänzens“ auf schrittweises Rechnen auftrat.

K-Vereinfachen

Auch zum K-Vereinfachen, das ebenfalls nur marginal auftritt (3 Dokumente in den Blöcken 03 und 07), lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, wie bereits zu K-Stellenweise und zur K-Hilfsaufgabe nach dem Block 02: Vermutlich hemmt die starke Fokussierung auf schrittweises Komplementbilden hier eine Übertragung der Strategieideen aus dem Wegnehmen, aber dennoch ist auch die Idee des Vereinfachens innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung existent und nachweisbar.

Im Gegensatz zum späteren Umgehen mit der K-Hilfsaufgabe lässt sich die Lehrerin in den zur Stunde 07-3 beschriebenen Prozessen (vgl. Kap 4.2.5) vermutlich einmal kurz selbst darauf ein, Vereinfachen ansatzweise komplementbildend zu denken, bleibt aber sonst stringent dabei, „Ergänzen“ als K-Schrittweise zu favorisieren.

Alle vier Strategiekategorien lassen sich also auch in der Grundvorstellung Komplementbildung zumindest aufspüren, und bestätigen somit die Zweidimensionalität des erweiterten Kategoriesystems, das Rechnung zu strukturgleichen Strategiekategorien innerhalb beider Grundvorstellung zuordnet, wie es in Kap. 2.2.2 aufgestellt wurde.

Rechenarten und Notationsformen

Hier lässt sich zunächst festhalten, dass die Kinder überwiegend halbschriftlich in der Form der Standardnotationen rechnen, erst gegen Ende auch internalisert; allerdings ist die Entscheidung hierzu nicht wirklich frei, sondern die Rechenarten werden von der Lehrerin vorgegeben.

Ebenso erbittet die Lehrerin direkt zu Beginn des explorativen Kinoblocks die zusätzliche Nutzung des Rechenstrichs, weniger in der Nutzung als Prozesshilfe, dafür aber umso mehr als nachträglich produziertes Dokumentations- und Kommunikationsmedium. Der Rechenstrich spielt aber nach dem explorativen Kinoblock keine Rolle mehr, da hier Rechnen nur noch rein auf der Zahlenebene stattfindet.

Die beschriebenen Interaktionen im Bereich des komplementbildenden Rechnens zeigen aber auf, wie die Bedeutung der Rechenschritte innerhalb dieser Grundvorstellung gut am Rechenstrich kommuniziert werden können. Bei Aufgaben mit Rechenrichtungswechseln oder solchen im Subtraktionsformat bildet dieser eine implizite Veranschaulichung des Assoziativgesetzes der Addition als *theorem in action*, etwa wenn über die Bilanzierung der durch Rechenrichtungswechsel negativ wirkenden Komplementbildungsbeträge verhandelt wird.

4.3 Entwicklung der Idee des Stelle Herstellens

Bereits in den vorangegangenen Kapiteln des Ergebnisteils wurde des Öfteren das Auftreten der Idee des Stelle Herstellens angesprochen. Wie in Kap. 2.3 beschrieben, könnte sich die Idee des Stelle Herstellens so im Unterricht kultivieren lassen, dass mit dem *Ergänzen stellengerecht* als Spezialform der schrittweise additiven Komplementbildung ein eleganter, Verständnis entwickelnder Weg zum Algorithmus eingeschlagen würde. Zusätzlich könnte diese Kultivierung dazu dienen, reflexive Betrachtung dieser Idee das Verständnis für den Algorithmus zu vertiefen. In diesem Kapitel soll nun der Entwicklung dieser Idee im Unterricht der Studie nachgegangen werden. Als Forschungsinteresse wurde dazu formuliert:

FI3: 1. *Inwieweit und ggf. in welchen Varianten tritt die Idee des Stelle Herstellens im Unterricht auf?*
2. *Wie kultiviert die Lehrerin diese Idee verständnisentwickelnd zum Algorithmus?*
3. *Inwiefern wird diese Idee nach der Einführung des Algorithmus zur reflexiven Verständnisentwicklung verwendet?*

Während in den ersten beiden Ergebniskapiteln auch quantitative Auszählungen und Verteilungen, die mit Hilfe der Auswertungssoftware erstellt wurden, Gegenstand der Betrachtung waren, fokussiert sich in diesem Kapitel die Analyse der Entwicklung dieser Idee auf die vertiefendende Deutung von Dokumenten und Interaktionen komplementbildenden Rechnens, auf denen diese auftritt.

4.3.1 Variantenreiches Auftreten

Wie aus den vorangegangenen Kapiteln bereits deutlich wurde, tritt die Idee des Stelle Herstellens bereits im explorativen Kinoblock auf. Dieses Auftreten der Idee soll in diesem Kapitel an Hand von zwei Beispielen nachvollzogen werden.

Anschließend wird durch die Analyse von drei weiteren Beispielen dargestellt, in welchen Varianten diese Idee im Anfangsteil des Unterrichts der Studie auftritt. Erst im folgenden Kapitel (4.3.2) wird dann dargestellt, wie die Lehrerin diese Idee aufgreift und kultiviert.

Zwei Beispieldokumente zum Auftreten der Idee des Stelle Herstellens.

Beide im Folgenden vorgestellten Dokumente zum Auftreten dieser Idee entstehen in der Stunde 01-2, also sehr früh im Lernprozess. Zu Beginn dieser Stunde wird mit Erics Beispiel (vgl. Kap. 4.2.1) zum ersten Mal eine komplementbildende Rechnung vorgestellt, auch die Aufgabenstellung des Kinokontextes („…293 sind schon da…") regt hier zum ersten Mal Komplementbildung an.

Benedikt (Abbildung 4.43, S. 197) bildet additiv-auffüllend schrittweise das Komplement zwischen 293 und 624, hier (als eines von 5 Dokumenten, vgl. Kap. 4.2.6) ausschließlich und originär am Rechenstrich, ohne halbschriftliche Notation. Zunächst geht er mit einem ersten Schritt von 293+7 zur 300, dann aber folgen zwei Schritte, die anders als die in Kap 4.2 beschriebenen für diese Zeit typischen Vorgehensweisen nicht weiter zu „glatten" Zwischenzahlen gelangen: Zunächst füllt Benedikt mit +104 zur Zahl 404 auf, anschließend geht er mit +120 zur 524 weiter. Im letzten Schritt erreicht er mit +100 die Zielzahl 624. Im ausführlichen Kommentar zur Rechnung gibt Benedikt als Idee für den ersten Schritt an: „das ich auf ein glatten Hunderter komme". Den zweiten und dritten Schritt begründet er davon abweichend mit „dann +104 das ich den einer habe von der 24" und „dann +120 das ich jetzt die ganze Zahl von den Zener und den Eine".

In Kap. 4.2.2 wurde bereits das Dokument von Katharina (Abbildung 4.26, S. 160) aus der gleichen Stunde dargestellt. Dort wurde argumentiert, Katharina könne die Schritte +10, +10, dann aber +100 als zunächst vorsichtiges, dann mutigeres Auffüllen in Richtung Zielzahl gewählt haben (Details vgl. Kap 4.2.2). Im Kommentar benutzt sie dabei die Formulierung „dann +10 und dan wieder +10 ich muss ja auf die Zahl 624 kommen muss".

Deutung der Beispieldokumente zum Auftreten der Idee des Stelle Herstellens

Benedikt verfolgt zunächst eine typisch schrittweise Komplementbildende Strategie, in dem er im ersten Schritt mit der Variante „zur glatten Zwischenzahl" auf der 300 landet. Die dann folgenden, und – ohne zunächst den Kommentar zu betrachten, merkwürdig erscheinenden Zwischenschritte – folgen einer anderen Idee: Der Schritt +104 wird so gewählt, dass ein Stellenwert der Zielzahl, hier der Einer, erreicht wird. Dies geht auch aus dem Kommentar hervor, wenn Benedikt schreibt „dann +104 das ich den einer habe von der 24", bezieht sich „24" vermutlich auf die Zielzahl 624 des Auffüllvorganges. Auch der nächste Schritt (+120) folgt vermutlich genau diesem Interesse: „dann +120 das ich jetzt die ganze Zahl von den Zener und den Eine". Diese Äußerung kann man so interpretieren, dass mit dem Schritt von +120 (fast) die ganze (Ziel)zahl 624 erreicht ist, wenn man nur Zehner- und Einerstelle betrachtet – hier wird also erneut ein Schritt so gestaltet, dass ein weiterer Stellenwert der Zielzahl erreicht wird.

Katharina könnte im oben genannten Dokument neben der dort beschriebenen Interpretation – mit vorsichtigen, glatten Schritten in Richtung Zielzahl gehen – möglicherweise auch die Idee des Stelle Herstellens verfolgt haben: Zu den (in Kap. 4.2.2 als vorsichtig bezeichneten) Schritten 300+10=310 und 310+10=320 schreibt sie im Kommentar: „dann +10 und dan wieder +10 ich

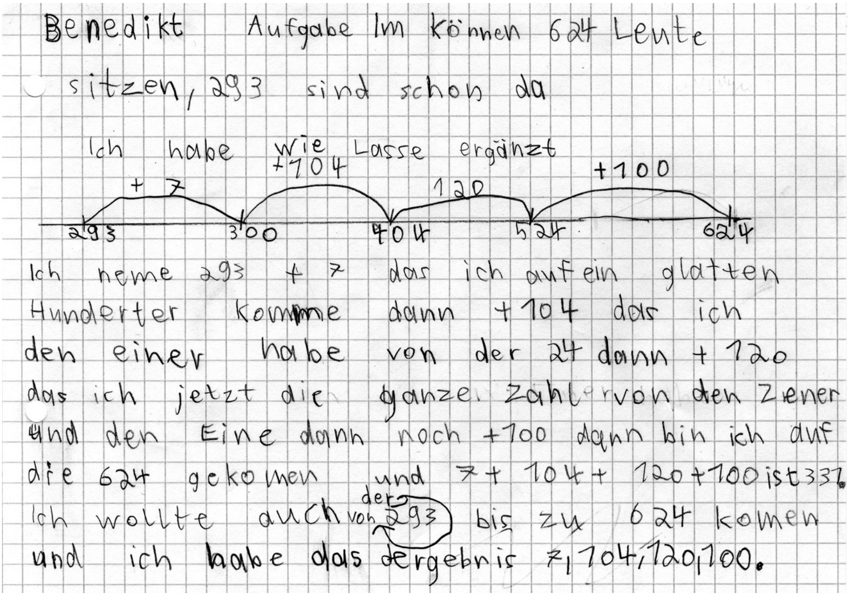


Abbildung 4.43: Benedikt, Stunde 01-2, Arbeitsphase

muss ja auf die Zahl 624 kommen muss“. Dies könnte nicht nur bedeuten „Ich gehe in Richtung der 624“, sondern auch „Ich stelle die Zehnerstelle 20 der 624 mit diesen zwei Zehnerschritten her“, wenn man „ich muss ja auf die Zahl 624 kommen muss“ mit „und die 20 der 624 habe ich damit schon einmal erreicht“ gedanklich fortsetzt. Ebenso könnte dann auch der folgende Schritt um +300 nicht – wie in Kap. 4.2.2 beschrieben – als mutiger Schritt „in die Nähe der 624“ gedacht sein, sonder auch als „die 600 der 624 herstellen“ motiviert sein.

Am Beispiel von Benedikt und Katharinas Rechnungen lässt sich somit die Idee des Stelle Herstellens beschreiben: Als Variante schrittweisen Komplementbildens werden umständlicher anmutende (da schwieriger zu rechnende) Zwischenschritte benutzt, die das Ziel haben, einzelne Stellenwerte der Zielzahl zu erreichen, und damit – obwohl umständlicher anmutend – gleichsam entlastend sind.Um mit Benedikts Beispiel zu sprechen: Wenn man (fast) die ganze (Ziel)zahl, von Zehner- und Einerstelle her betrachtet, erreicht hat, braucht man sich „nur“ noch um die Hunderterstelle zu kümmern, eine Motivation, die möglicherweise auch in Katharinas Rechenweg auftaucht. Während Benedikt diese Idee explizit benennt, so bleibt sie in Katharinas Dokument nur eine Deutung von möglichen anderen.

Beispiele für drei Varianten der Idee des Stelle Herstellens

Für die gerade vorgestellten Beispieldokumente zum Auftreten der Idee des Stelle Herstellens bleibt festzuhalten, dass hier nur in Teilschritten diese Idee auftritt und verfolgt wird. Im Folgenden werden nur drei Beispieldokumente dargestellt, in denen vermutlich konsequent, in allen Schritten, diese Idee in verschiedenen Varianten verfolgt wird.

Isabel_Sch rechnet ebenfalls die Aufgabe 293+___624 in Stunde 01-2 mit einer schrittweisen Strategie. Im ersten Schritt addiert sie +300 (glatter Hunderterschritt) zu 593, im zweiten Schritt +30 (glatter Zehnerschritt) zu 623, im letzten Schritt dann +1 zur Zielzahl 624. In der Ergebnisspalte notiert Isabel dabei falsche Endziffern, rechnet aber im Ansatz der nächsten Zeile trotzdem mit der richtigen Zahl weiter.

Bereits in Kap. 4.2.2 (Abbildung 4.27, S. 162; hier: Robins Rechenweg), Kap. 4.2.4 (Abbildung 4.32, S. 172) und Kap. 4.2.6 (Abbildung 4.41, S. 187)wurden drei Dokumente vorgestellt, in denen möglicherweise die Idee der Hilfsaufgabe aus dem Wegnehmen adaptiert wird, um komplementbildend der Idee des Stelle Herstellens folgen zu können. Allen drei Rechenwegen ist gemeinsam, dass dort immer die Komplementbildung erst in einem glatten Hunderter-, dann in einem glatten Zehner-, und zuletzt in einem Einerschritt durchgeführt wird. Dabei kommt es auf Grund von Stellenwertüberschreitungen zu den vor allem in Kap. 4.2.4 beschriebenen Rechenrichtungswechseln.

Die dritte Variante der Idee des Stelle Herstellens findet sich auf dem Dokument von Priscilla (Abbildung 4.45, S. 199). Auch Priscilla benutzt bei der Rechnung zu Saal 5 aus dem Kino-Aufgabenpool (vgl. Kap. 3.3) glatte Stellewertschritte (also additives, schrittweises Auffüllen), aber in der umgekehrten Reihenfolge, als die zuvor genannten Beispiele, also Einer-, glatter Zehner-, und glatter Hunderterschritt.

Deutung der Dokumente mit Varianten des Stelle Herstellens

Isabel_Sch benutzt an Stelle der zu diesem Zeitpuntk häufig auftretenden Variante „zu glatten Zwischenzahlen“ das Rechnen „mit glatten Rechenzahlen“. Dabei erzeugt sie diese glatten Rechenzahlen so, dass genau ein Hunderter-, Zehner- und Einerschritt entsteht. Der erste Schritt, 293+300=593, erreicht dabei nicht die Hunderterstelle der 624, hat diese aber möglicherweise im Visier: Würde Isabel hier 293+400 rechnen, wäre der Zielhunderter hergestellt, aber die Zielzahl überschritten. Ihre Idee könnte also sein, dass bei drohender Überschreitung die größtmögliche „glatte Rechenzahl“ gewählt wird, die in die Nähe der Zielstelle kommt, diese Zielstelle „fast“ erreicht. Dagegen kann sie im zweiten Schritt mit 593+30= 623 direkt den Zielzehner herstellen (und dadurch den Hunderterübergang die Hunderterstelle gleich mit), der letzte Schritt erreicht dann sowohl die Einerstelle als insgesamt auch die Zielzahl. Gerade dieser letzte

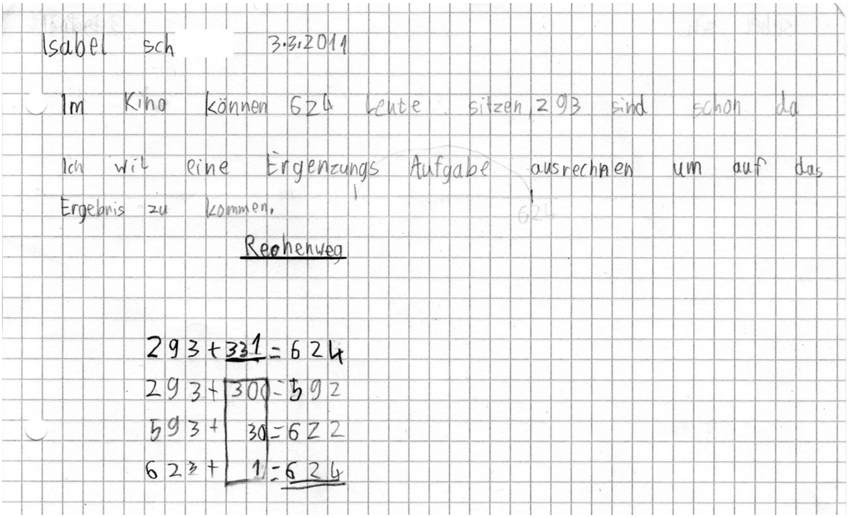


Abbildung 4.44: Isabel_Sch, Stunde 01-2, Arbeitsphase

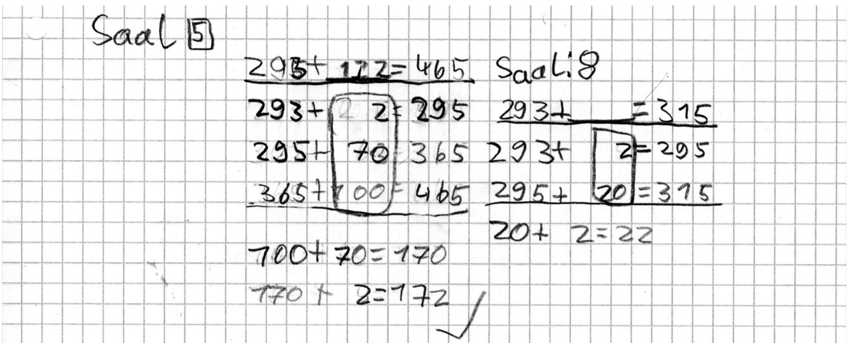


Abbildung 4.45: Priscilla, Stunde 01-4, Arbeitsphase, Ausschnitt

Schritt (+1), der als eigene Rechenzeile notiert wird, indiziert hier ein zielstellendenkendes Vorgehen, da hier nicht die wesentlich ökonomischere Variante von +31 in einem Schritt benutzt wird. Diese Variante der Idee des Stelle Herstellens, bei drohender Zielzahlüberschreitung eine Stelle durch „fast" erreichen (also Stellenwert -1) anzusteuern, konnte auch auf weiteren Dokumenten beobachtet werden.

In den drei genannten Dokumenten mit Rechenrichtungswechseln dagegen erfolgt das Stelle Herstellen konsequent, ebenfalls mit glatten Rechenschritten in der Reihenfolge Hundert-Zehner-Einer. Hier wird nicht das Überschreiten von Zielzahlen durch das „Fasterreichen“ vermieden, sondern das Überschreiten mit der Adaption der Hilfsaufgabenidee kompensiert. Am Beispiel der Rechnung von Lasse (Abbildung 4.32, S. 172) und der Rechnung zu 137+___=624 sei dieser Gedanke noch einmal dargestellt: Im ersten Schritt stellt Lasse die Hunderterstelle her, in dem er +500 rechnet. Damit ist aber die Zielzahl der Komplementbildungsvorgangs bereits überschritten, der Hilfsaufgabenidee folgend, kompensiert er diese Überschreitung mit einem Schritt von -10 in Gegenrichtung. Dieser Schritt ist vermutlich so gewählt, dass er die Zehnerzielziffer 2 der 624 erreicht – sonst wäre eine Aufteilung der letzten beiden Schritte in -7 und -6 statt in -10 und -3 die zu dieser Zeit üblichere Idee. Zur Ambivalenz, ob nun eher die Hilfsaufgabenidee oder die des Stelle Herstellens in diesen Dokumenten handlungsleitend ist, wurde bereits eingehend in Kap. 4.2.4 Stellung genommen.

Priscillas Variante des Stelle Herstellens ist den zuvor beschriebenen ähnlich, aber sie erfindet eine neue Version davon: Auch sie folgt vermutlich in den zunächst umständlich anmutenden Schritte dem Ziel, hintereinander die einzelnen Stellen der Zielzahl herzustellen, allerdings hier in der Reihenfolge Einer- (+2 erreicht die 5 der 465), Zehner- (+70 erreicht die 60 der 465) und Hunderterstellenwerte (+100 erreicht die 400 der 465). Diese Reihenfolge, mit der Einerstelle zu beginnen und durch Auffüllen zu erreichen, dann weitere Stellenwerte der Größe nach aufsteigend abzuarbeiten, entsprich genau der in der didaktischen Literatur so genannten Variante „Ergänzen stellengerecht“ (vgl. Kap. 2.3), und strukturähnlich auch dem als „Auffüllen mit Ergänzen“ bezeichneten Algorithmus der schriftlichen Subtraktion. Diese Variante hat den großen Vorteil, dass Stellenwertübergänge hier nicht durch das zuvor beschriebene „Fasterreichen“ vermieden werden müssen, oder diese Rechenrichtungswechsel auslösen, sondern jede Stelle der Zielzahl, ob mit Übertrag oder nicht, direkt in einem Rechenschritt erreicht werden kann. Wenn ein Stellenwertübergang stattfindet, findet er hier „von selbst“ statt – im nächsten Rechenschritt ist dann die zu bearbeitende Stelle bereits um 1 erhöht. Allerdings muss man hier hinterfragen, ob man diesen Rechenweg noch als „Strategie“ bezeichnen kann, denn – konsequent ausgeführt – führt dieser zu genau einer eindeutigen Rechnung (wenn immer direkt die größtmögliche glatte Stellenzahl zum Auffüllen benutzt wird), die dadurch quasialgorithmischen Charakter hat.

4.3.2 Kultivierung und Einführung des schriftlichen Algorithmus

Nachdem nun an einzelnen Dokumenten das Auftreten der Idee des Stelle Herstellens in den explorativen Blöcken dargestellt wurde, soll hier nun nachgezeichnet werden, ob und wie die Lehrerin diese Idee im Unterricht kultiviert. Eine chronologische Übersicht der in dieser Arbeit abgedrukten Dokumente und der Interaktionen, welche die Idee des Stelle Herstellens in sich tragen, befindet sich in Kap. 4.3.4 in Tabelle 4.3 (S. 213).

Beispiele für die Kultivierung des Stelle Herstellens in den explorativen Blöcken

Im Unterricht der Studie wird zum ersten Mal gemeinsam über die Idee des Stelle Herstellens zu Beginn der Stunde 01-3 gesprochen, und zwar am bereits mehrfach vorab thematisierten Rechenweg von Niklas_K (Abbildung 4.41, S. 187, vgl. Kap 4.2.4, Kap. 4.2.6 und Kap. 4.3.1). Bereits in Kap. 4.2.4 wurde beschrieben, dass die anderen Kinder hier zunächst die Idee der Hilfsaufgabe sehen, die Lehrerin aber deutet den Rechenweg am Ende der Interaktion (Transkript 18, S. 274) in einer anderen Sichtweise: „Die 400 (zeigt auf die Ziffer 6 in 293+400=693 in Niklas_Ks Rechnung an der Tafel) meinst du hat er genommen, damit er erst mal den Hunderter hatte" (Z. 034). Sie fügt für den zweiten Rechenschritt 693-70=623 an „Warum hat er denn jetzt genau minus 70 genommen" (Z. 040) und korrigiert die Antwort von Niklas_V „Weil er auf die 20 gekommen ist" (Z. 043) mit den Worten: „Auf die Zehnerzahl (zeigt auf die Ziffer 2 in 693-70=623 in Niklas Ks Rechnung an der Tafel.)" (Z. 044). Niklas_V übernimmt ihre Sichtweise mit „Auf die Zehnerzahl, wo er hinkommen möchte", und beschreibt anschließend den letzten Rechenschritt.

Am Ende der gleichen Stunde bespricht die Lehrerin die Rechenwege von Priscilla und Robin an der Tafel (Abbildung 4.20, S. 150). Auch dieses Dokument wurde bereits in Kap. 4.2.1 dargestellt, denn zunächst geht es der Lehrerin in der Interaktion um die Formatwahl zwischen Additions- und Subtraktionsformat. Im weiteren Verlauf des Gesprächs zunächst über den Rechenweg von Priscilla (Transkript 19, S. 276) fokusiert sie aber auf einen weiteren Aspekt: „Ich möchte noch mal wissen, wie Prisci ergänzt hat, nicht welche Zahlen sie jetzt da hingeschrieben hat, sondern, was wohl in ihrem Kopf da passiert ist. Was hat sie überlegt. Warum hat sie denn zuerst die 7 dazu getan. Da hat sie sich ja bei was gedacht" (Z. 016). Hier sehen die Kinder zunächst die Variante der glatten Zwischenzahlen (Z. 017, 021, 028, 030, 032), aber die Lehrerin deutet immer wieder an, es gäbe eine andere handlungsleitende Idee (Z. 022, 024, 027, 031, 033), bis Lasse ihr antwortet: „Sie wollte erst mal auf den Hunderter kommen, auf den sie bei dem Ergebnis kommen wollte" (Z. 036). Er präzisiert weiter: „die Ergänzungsaufgabe hieß ja, die sie sich ausgedacht hat, 293 plus hmhmhm ist 381, und dann ist sie erst mal auf den Hunderter gegangen, dann wollte sie auf den Zehner, und dann auf den Einer. Und das wollte sie so in Schritten rechnen" (Z. 038). Auf Nachfragen bestätigt Priscilla diese Interpretation (Z. 040, 042). Anschließend wird Robins Rechenweg besprochen (Transkript 20, S. 278), dabei wendet sich Lasse direkt an Robin mit den Worten: „Du wolltest das wieder genauso machen wie Prisci, du wolltest auch auf den Hunderter, den Zehner, und auf den Einer kommen" (Z. 005), was Robin bestätigt (Z. 006).

Deutung der vorgestellten Beispiele zur Kultivierung

Die Lehrerin sieht im Rechenweg von Niklas_K vermutlich vor allem die Idee des Stelle Herstellens: Der erste Schritt erreicht genau die Hunderterziffer der Zielzahl im Zwischenergebnis, der zweite die Zehnerziffer, der dritte die Einerziffer. Dabei kommt es zu einem Rechenrichtungswechsel, da sein erster Schritt +400 zwar die Hunderterstelle herstellt, aber „zu weit" über die Zielzahl des Auffüllvorgangs hinausgeht, und er nun in Gegenrichtung kompensieren muss (Adaption der Hilfsaufgabenidee in die Grundvorstellung Wegnehmen, vgl. Kap. 4.2.4). Diesen Schritt wählt er mit -70 erneut so, dass dadurch die Zehnerzielstelle erreicht wird. Mit einem erneuten Rechenrichtungswechsel und +1 erreicht er die Zielzahl. In Kap. 4.2.4 wurde aber bereits angedeutet, dass hier nicht originär die Idee des Stelle Herstellens handlungsleitend gewesen sein muss, sondern auch lediglich die Adaption der Hilfsaufgabenidee zufällig zum stringenten Herstellen der Stellen in der Reihenfolge Hunderter-, Zehner- und Einerstelle geführt haben könnte. Am Interaktionverhalten der Lehrerin ist zumindest abzulesen, dass sie die anderen Kinder, die eher die Hilfsaufgabenidee sehen, stark in Richtung der Idee des Stelle Herstellens lenkt („meinst du hat er genommen, damit…" und „Auf die Zehnerzahl" als Korrektur zur Aussage „auf die 20", s.o.). Sie beschreibt die Idee des Stelle Herstellens hier (und auch später) immer nur implizit („damit er den Hunderter hat", gleichzeitiges Antippen der Hunderterstelle der Zielzahl, usw.), ohne diese Idee begrifflich zu kennzeichnen – ein erneutes Beispiel für ein *theorem in action* (vgl. Kap. 2.2.1).

Auch in der oben beschriebenen Interaktion über die Rechenwege von Priscilla und Robin sehen die Kinder zunächst in Priscillas Rechenweg nicht die Idee des Stelle Herstellens, erst die Lehrerin – erkennbar an den vielen Einlassungen – fokussiert hier deutlich in dieser Richtung. Auch wenn beide Kinder am Ende bestätigen, diesem Plan gefolgt zu sein – allein aus den Rechenwegen heraus würden sich auch die Varianten „zu glatten Zwischenzahlen" (Priscilla) und „mit glatten Rechenzahlen" (Robin) ablesen lassen, ohne dass hier die Idee des Stelle Herstellens handlungsleitend sein muss. Dass Lasse dann direkt in Robins Weg diese Idee sieht, könnte auch daraus entstehen, dass die Lehrerin diese zuvor mehrfach im Unterricht thematisiert und damit aufgewertet hat.

In einem dritten Beispiel, direkt zu Beginn der Folgestunde (aus Platzgründen hier nicht abgedruckt) verhält sich die Lehrerin erneut so, dass sie explizit auf Elemente der Idee des Stelle Herstellens in der thematisierten Rechnung hinweist. Im Sinne der *guided reinvention* (vgl. Kap. 3.2.2) mag man vermuten, dass die Lehrerin hier möglicherweise sehr früh auf Elemente lenkt, die sie später („Ergänzen stellengerecht") zur Einführung des Algorithmus benutzen möchte. An dieser Stelle sei auch noch einmal an die Besprechung im Fliesenkreis in der Stunde 02-2 (Abbildung 4.27, S. 162, dargestellt in Kap. 4.2.2) erinnert, in der Jule einen Rechenrichtungswechsel benutzen „darf". Die Lehrerin sieht in ihrer Rechnung die Idee des Stelle Herstellens, während sie diese in

Robins Rechnung nicht erkennt, und seinen komplementbildenden Rechenweg als wegnehmende Hilfsaufgabe einkategorisiert.

Beispiele zur Weiterentwicklung zum Algorithmus

Nach dieser beschriebenen Thematisierung der Idee greifen die Kinder vermutlich des Öfteren auf Elemente dieser Idee zurück, sie deutet sich bis zum Schluss immer wieder auf Dokumenten an. In einem Dokument aus dem Block 03 (Abbildung 4.36, S. 179) von Isabel_Sch ist zum Beispiel die Idee des Stelle Herstellens in der Variante der Reihenfolge Einer-, Zehner-, und Hunderterstelle zu erkennen, so wie sie in Kap. 4.3.1 an Priscillas Dokument (Abbildung 4.45, S. 199) beschrieben wurde.

Nach den Osterferien (vgl. Kap. 3.3) werden in Block 07 zunächst erneut die bis dahin thematisierten Strategiekategorien wieder aufgegriffen, in der Stunde 07-3 rückt das Ergänzen(+) erneut in den Mittelpunkt. Dann greift die Lehrerin zu Beginn der Stunde 08-1 auf die in Großformat an der Tafel präsentierten, in Kap. 4.3.1. beschriebenen Dokumente von Benedikt (Abbildung 4.43, S. 197) und Priscilla (Abbildung 4.45, S. 199) zurück, und erbittet von allen Kindern, Aufgaben mit der (quasialgorithmischen) Strategie „Ergänzen(+) wie Prisci“ – also K-Schrittweise im Additionsformat, mit der Idee des Stelle Herstellens in der Reihenfolge E-Z-H – an Aufgaben eines schönen Päckchens zu probieren.

In Block 08 nutzt die Lehrerin schließlich einen Rechenweg von Robin (Abbildung 4.46, S. 204), der dort die Idee entwickelt, die einzelnen Zielzahlstellen farbig (hier nur als Graustufe zu erkennen) zu kennzeichnen, um parallel zu Robins Rechnung die einzelnen Schritte des Algorithmus an der Tafel einzuführen (und dabei – auf der Abbildung schlecht erkennbar – die gleiche Farbkennzeichnung für die Stellen wie in Robins Rechnung zu verwenden).

Nach dieser Einführung des schriftlichen Rechenverfahrens nutzen die Kinder das halbschriftliche „Ergänzen stellengerecht“ parallel zum Algorithmus, dabei wird im Unterricht immer wieder über Gemeinsamkeiten und Unterschiede gesprochen. Jule etwa (Abbildung 4.47, S. 205) markiert in ihren Rechnungen mehrere Elemente: Zunächst erhält in der halbschriftlichen Rechnung jede Stelle der Zielzahl des Auffüllvorgangs eine Farbmarkierung, diese Markierung wiederholt sie bei den Ergebnissen der Nebenrechnung. An Stelle der üblichen Neben-Nebenrechnung zur Addition der Komplementteilbeträge kreist Jule die einzelnen Komplementbildungsschritte ein und unterstreicht in der gleichen Farbe das Ergebnis der schriftlichen Rechnung. Ebenfalls eingekreist sind in der zweiten Aufgabe jeweils Übertrag und Ergebnisziffer in der schriftlichen Rechnung, in der gleichen Farbe markiert sie in der Nebenrechnungszeile 273+70 die 7 der 273, und in der Zeile darunter die Einer-3 der 343.

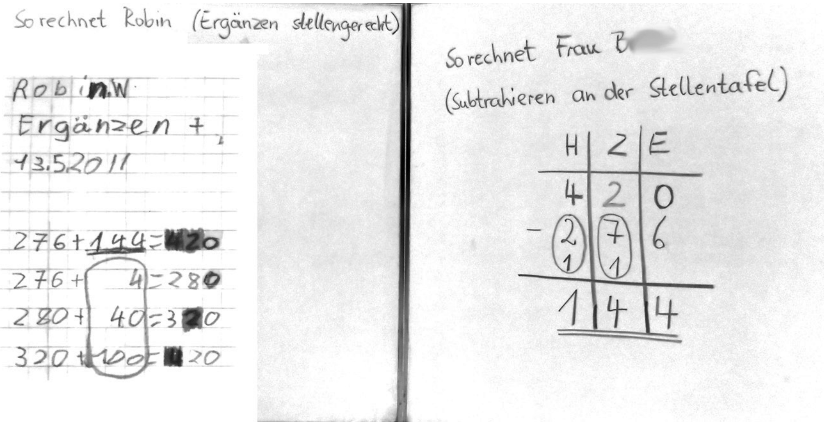


Abbildung 4.46: Tafelbild (teilinvertiert), Stunde 08-2, Einführungsphase

Deutung der Beispiele zur Entwicklung zum Algorithmus

Auch wenn die beiden oben vorgestellten Dokumente von Isabel_Sch relativ eindeutig die Idee des Stelle Herstellens repräsentieren könnten, so muss allerdings für andere Dokumente die bereits mehrfach beschriebene Ambivalenz beachtet werden, dass nicht alle Rechenwege, in denen durch einen oder mehrere Schritte Zielzahlstellen hergestellt werden, zwangsläufig immer von der Idee des Stelle Herstellens geleitet sein müssen. Ebenso kann das Anwenden der Hilfsaufgabenidee oder die Variante des schrittweisen Komplementbildens „mit glatten Rechenzahlen" auch zufällig stelleherstellend sein. Vorsichtig interpretiert könnte es etwa die Hälfte aller 266 K-Dokumente sein, bei denen die Idee des Stelle Herstellens durch die Schrittwahl plausibel erscheint. In seltenen Fällen bestätigen die Kinder dies durch Kommentare und Interaktionen. Die in dieser Arbeit abgedruckten Dokumente, die man der Idee des Stelle Herstellens zuordnen könnte, sind in Tabelle 4.3 (S. 213) verzeichnet.

Bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion vollzieht die Lehrerin Rechenschritt für Rechenschritt aus Robins Nebenrechnungszeilen in der Stellenwerttafel beim schriftlichen Rechnen nach, thematisiert einzeln das Herstellen der Stellen, und weist dabei auch auf die ggf. entstehenden Stellenwertübergängen hin, etwa in der Zeile 280+40=320, in der nicht nur der Zielstellenwert 20 erreicht wird, sondern auch der Stellenwertübergang von 200 zu 300 geschieht, der sich in der schriftlichen Rechnung als Übertrag manifestiert: Hier nutzt die Lehrerin die Erkenntnisse, die die Kinder bis dahin im komplementbildenden Rechnen erlangt haben, hier im Speziellen in der Variante des „Ergänzen stellengerecht", zur Verständnisentwicklung beim schriftlichen Rechnen.

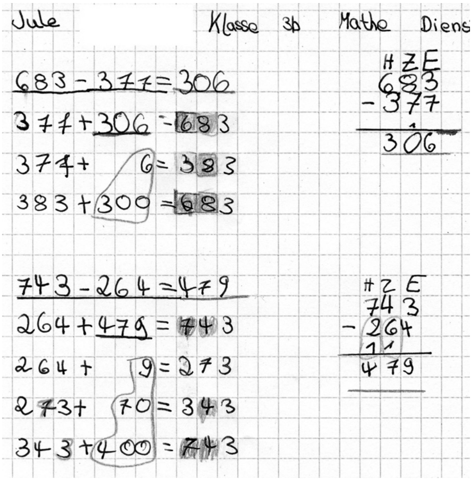


Abbildung 4.47: Jule, Stunde 08-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

An Jules Dokument (Abbildung 4.47, oben) aus der Stunde 08-3 wird dies in mehreren Aspekten deutlich: Zum einem ist die Idee des Stelle Herstellens in der halbschriftlichen Rechnung gegenwärtig, da hier die einzelnen zu erreichenden Stellen im Ansatz der Nebenrechnung farbig markiert werden, wie ebenfalls das Erreichen dieser in den entsprechenden Nebenrechnungszeilen. Zum anderen deutet Jule mit dem Einkästeln der Schrittbeträge hier möglicherweise zwei Dinge an: Diese Teilschritte lassen sich – da sie stellengerecht erfolgen und somit nur glatte Stellenwerte enthalten – gut sofort zum Ergebnis „zusammenziehen“ (ohne zu rechnen, auf Grund der Nullen, ein Aspekt, der auch immer wieder im Unterricht thematisiert wird), und diese Teilschritte stellen als ausgeschriebene Zahlwerte die gleichen Ergebnisziffern im Algorithmus dar (das Ergebnis ist dort in der gleichen Farbe der Einkästelung unterstrichen). Zusätzlich könnte die letzte Markierung noch ein Hinweis auf die Stellenwertübergänge sein: In der Zeile 264+9=273 entsteht ein solcher Stellenwertübergang in der Zehnerstelle. Diese neue, um 1 erhöhte Zehnerstelle, ist in der Folgezeile farbig markiert, mit der gleichen Farbe markiert Jule auch das Zusammenfassen der Zehner-Sechs mit der Übertragseins in der schriftlichen Rechnung, und könnte damit auf die analoge Bedeutung dieses Schrittes hinweisen. Ebenso könnte dies bei der Hunderterstelle der Fall sein, wenn man interpretiert, dass hier versehentlich die Einer-3 an Stelle der Hunderter-3 markiert wird.

4.3.3 Reflexive Verwendung, Konsolidierung und Internalisierung

Abschließend soll für die Idee des Stelle Herstellens beim komplementbildenden Rechnen in diesem Kapitel an je einem Beispiel erläutert werden, wie diese nach der Einführung des schriftlichen Algorithmus reflexiv zur Entwicklung von Algorithmusverständnis eingesetzt wird, wie sie sich als Strategievariante konsolidiert, und wie sie auch internalisiert eingesetzt wird.

Beispiel für die reflexive Verwendung

Nachdem im Block 09 der Algorithmus an substanziellen Aufgabenformaten geübt wurde, wird in Block 10 erneut ein reflektiver Blick auf das schriftliche Verfahren eingenommen, in dem es kontrastiv, im Vergleich zu mehreren anderen komplementbildenden halbschriftlichen und schriftlichen Rechenweisen betrachtet wird (aus Platzgründen hier nicht näher betrachtet, zu den Inhalten vgl. Kap. 3.3), darunter auch erneut der Vergleich mit „Ergänzen stellengerecht“. In den Schülerdokumenten zu dieser Fragestellung werden die Kinder aufgefordert, schriftlich zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den Rechenarten Stellung zu beziehen.

Isabel_F (Abbildung 4.48, S. 207) rechnet zunächst 835-418 schriftlich, und überträgt dann die Struktur der Musteraufgabe auf ihre eigene halbschriftliche Rechnung der gleichen Aufgabe, in dem sie schrittweise zunächst passend die Einer-, dann die Zehner-, dann die Hunderterstelle der Zielzahl des Auffüllvorgangs herstellt. Die erreichten Ziffern kennzeichnet sie dabei mit einer Unterstreichung, sowohl in der Musteraufgabe, als auch in der eigenen Rechnung. Mit zwei Querstrichen markiert sie in beiden Rechenwegen die Hunderter-, Zehner-, und Einerziffer der Komplementbildungsschritte, und sie kreist in den schriftlichen Rechnungen Ziffern, die mit einer Übertragseins versehen sind, gemeinsam mit dieser ein.

Anschließend vervollständig sie die Frage „Gleich ist...“ mit der Antwort „das es die gleiche Aufgabe ist.“ und mit dem Hinweis „Und der Übertrag ist da wenn ich von der 288 bis zu 328 rechne das sind 40 also bin ich schon über dem nächsten Hunderter“. Zu den Unterschieden zwischen schriftlichem und halbschriftlichem Lösen der Aufgabe gibt sie zu Protokoll, das halbschriftliche Rechnen sei „länger aber verständlicher“, aber „Der Übertrag“ sei in der halbschriftlichen Rechnung „versteckt“, und schließt mit dem Hinweis: „es ist als mann eine neue Wurstscheibe anfängt zu essen also knabbert mann den Hunderter an“.

Deutung des Beispiels für die reflexive Verwendung

Zunächst lässt sich festhalten, dass Isabel_F die Variante des Komplementbildens, die im Unterricht „Ergänzen stellengerecht“ heißt, in der Musteraufgabe erkennt und in ihrer eigenen Rechnung repliziert, wie es die meisten Kinder bei

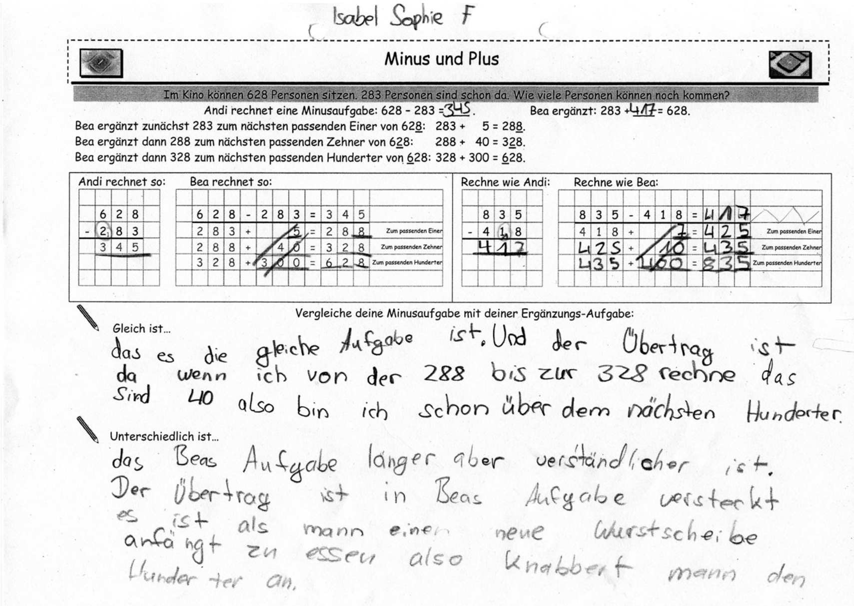


Abbildung 4.48: Isabel_F, Stunde 10-2, Arbeitsphase

dieser Aufgabenstellung tun (einige wenige wechseln dagegen die Grundvorstellung und nehmen den Subtrahenden zerlegt in Einer-, Zehner-, und Hunderterschritt vom Minuenden weg).

Schriftlich äußert sie sich nur zu zwei ausgewählten Aspekten: Sie erkennt zum einen die Paralellität der Stellenwertübergänge, in dem sie – so könnte man ihre Einlassug interpretieren – argumentiert, der bei der schriftlichen Subtraktion sichtbare Übertrag sei in der halbschriftlichen Rechnung versteckt und daran erkennbar, dass sich bei der Addition eines Auffüllschrittes ein Stellenwertübergang mitvollzieht, den sie an der Zeile 288+40=328 aus der halbschriftlichen Musteraufgabe und der dort erkennbaren Veränderung der Hunderterstelle erklärt. Zusätzlich wird dieser Stellenwertübergang möglicherweise in der schriftlichen Rechnung durch das Einkreisen der Übertragseins mit der Hunderterstelle gekennzeichnet, den man als nonverbale Beschreibung „aus Zwei(hundert) wird Drei(hundert)“ interpretieren könnte.

Zum anderen weist Isabel auf den grundlegenden Unterschied zwischen halbschriftlichem und schriftlichem Komplementbilden hin: Dass die halbschriftliche Variante „länger aber verständlicher sei“, impliziert den Gegensatz, dass die schriftliche zwar kürzer (effizienter), aber in der Wirkung ihrer Mechanismen schwieriger zu verstehen sei.

Zeichnerisch könnte Isabel auf dem Dokument noch durch die Querstriche andeuten, dass sich die einzelnen Komplementbildungsschritte ohne Neben-Nebenrechnung einfach zusammenziehen lassen, dass sie ziffernweise das Ergebnis der schriftlichen Rechnung darstellen.

Isabel äußert sich also nur zu einzelnen Aspekten der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den beiden in der Rechenart verschiedenen, sonst aber strutkturgleichen Komplementbildungsvorgängen, so wie es auch die anderen Kinder bei dieser Aufgabenstellung tun. Erst in der Summe aller schriftlichen Äußerungen wird vermutbar, dass sich Erkenntnisübertragung in weiteren Aspekten des Komplementbildens in der gesamten Lerngruppe ereignet haben könnte. Gleichsam wird hier deutlich, dass es selbst leistungsstärkeren Kindern wie Isabel_F schwer fällt, erkannte Aspekte in eigener Sprache schriftlich auszudrücken.

Abschließend sei noch Isabels Äußerung zum „Anknabbern“ der „Wurstscheibe“ bzw. des Hunderters interpretiert: Hier schlägt vermutlich die Idee des Entbündelns (vgl. Kap. 2.3.1) durch. Isabel hat diese Form des Algorithmus bereits vor der schulischen Thematisierung der schriftlichen Subtraktion zu Hause von ihrer Mutter erlernt, und bringt hier Aspekte ein, die vermutlich nichts mit der Rechnung auf dem Arbeitsblatt zu tun haben.

Beispiele für die Konsolidierung und Internalisierung

Der Rechenweg von Jule (Abbildung 4.49, S. 209) aus dem Retentiontest steht exemplarisch dafür, dass am Ende des Unterrichts der Studie auch das Komplementbilden in der Variante „Ergänzen stellengerecht“ Einzug in das Strategienrepertoire der Kinder nimmt. Die Aufgabenstellung, 657-224 halbschriftlich zu rechnen, löst Jule auffüllend komplementbildend in der Variante „Ergänzen stellengerecht“, weil sie „Ergänzen(+) […] bei dieser Aufgabe am leichtesten fand“. Diese Aufgabe sei im Vergleich zur schriftlichen Rechnung daneben einfacher gewesen, denn dort „musste man […] nur was dazu tun“.

Bereits aus der Stunde 07-3, also noch vor der expliziten Thematisierung von „Ergänzen stellengerecht“ im Unterricht, wählt Robin (Abbildung 4.50, S. 209) stellengerechtes auffüllendes Komplementbilden in der Reihenfolge eines Einer-, Zehner-, und Hunderschrittes bei der Bearbeitung dreier Aufgaben, allerdings führt er dieses nicht halbschriftlich, sondern internalisiert aus. In der „Klammernotation“ (vgl. *shortcuts* in Kap. 2.2.2) sind jene Auffüllschritte notiert, die in der halbschriftlichen Notation in den einzelnen Nebenrechnungsrechnungszeilen aufgeschrieben würden, die hier im Kopf erfolgen.

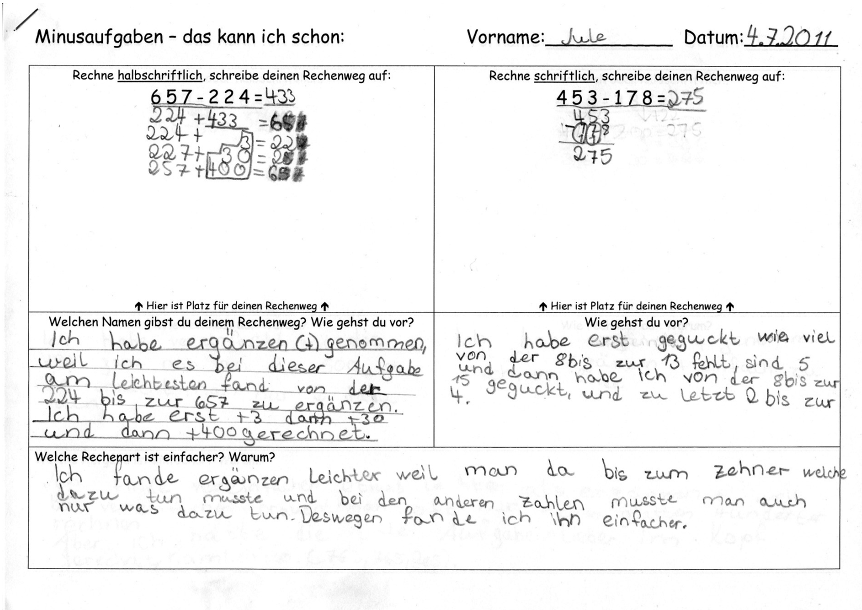


Abbildung 4.49: Jule, Retention-Test, Ausschnitt

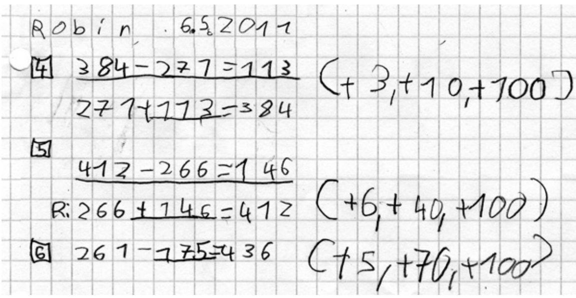


Abbildung 4.50: Robin, Stunde 07-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Deutung der Beispiele für Konsolidierung und Internalisierung

Zu Jules Rechnung aus dem Retentiontest lässt sich zunächst sagen, dass die Wahl der „Strategie“ (die ja eigentlich quasi-algorithmisch ist) von „Ergänzen stellengerecht“ eine interessante Wahl darstellt: Die Aufgabenstellung hieß nicht „Rechne geschickt“ oder „Wende eine Strategie an“, sondern einfach nur: „Rechne halbschriftlich“. Wenn Jule hier das quasi-algorithmische „Ergänzen stellengerecht“ anwendet, so könnte dies ein bewusster Ersatz für die hier ebenfalls sinnvolle Wahl einer schriftlichen Rechnung sein, die allerdings von der Aufgabenstellung her nicht möglich war. Ihre Aussage, diese Aufgabe sei einfacher als die schriftliche Rechnung gewesen, bezieht sich vermutlich auf die hier nicht vorhandenen Stellenwertübergänge, denn hier „musste man […] nur was dazu tun“ könnte „ohne dass die Stelle überschritten wurde“ bedeuten, während in der schriftlichen Rechnung zwei Überträge zu verarbeiten sind.

In Tabelle A.1 (S. 262) sind alle Bearbeitungen der Aufgabe 657-224 aufgelistet, die als Kernaufgabe sowohl im Pre-, im Post-, als auch im Retentiontest enthalten ist. Während im Pretest fast alle Kinder hier W-Stellenweise als Strategie wählen, und sich im Posttest die Strategiewahl schwerpunktmäßig Richtung W-Stellenweise verschiebt, so gesellt sich im Retentiontest noch das W-Vereinfachen zu den wegnehmenden Strategien hinzu (fünfmal W-Schrittweise, viermal W-Stellenweise, dreimal W-Vereinfachen). Vier Kinder wechseln zur Bearbeitung dieser Aufgabe in die Grundvorstellung Komplementbildung, ein Kind wählt dabei die „klassische“ Form von „Ergänzen“, also die auffüllende Variante „zu glatten Zwischenzahlen“, ein Kind rechnet K-Stellenweise (Priscilla, dargestellt in Kap. 4.2.3, Abbildung 4.30, S. 169), und zwei Kinder (Jule, gerade hier vorgestellt, und Lasse, nicht abgedruckt) wählen K-Schrittweise in der Variante „Ergänzen stellengerecht“.

Während bei allen Aufgaben im Posttest (vgl. Tabelle A.2, S. 263) sechsmal eine Aufgabe in der Grundvorstellung Komplementbildung gerechnet wird, ohne dass hier die stellengerechte Variante auftritt, so sind unter den acht K-Rechnungen im Retentiontest vier in dieser Variante aufgeführt, zwei davon bei der Aufgabe 426-387, bei der viele Kinder auch den Algorithmus als Alternative wählen. Zusammenfassend mag man hier vermuten, dass diese quasi-algorithmische Variante des halbschriftlichen Komplementbildens in das Rechenrepertoire der Kinder mit aufgenommen wird, und möglicherweise eine weitere Wahlalternative zum Algorithmus darstellt, wiederum als Wahlalternative zu heuristischen halbschriftlichen Rechenstrategien.

Im Retentiontest findet sich auch noch ein Beispiel für eine weitere internalisiert ausgeführte Rechnung in „Ergänzen stellengerecht“ (Noelia, 518-321, vgl. Tabelle A.2, S. 263), in der wie im oben vorgestellten Beispiel von Robin die stellengerechten Komplementbildungsschritte internalisiert ausgeführt werden. Wie in Kap. 4.2.6 dargestellt, findet internalisiertes halbschriftliches Rechnen erst in den hinteren Blöcken statt, hier ist festzuhalten, dass auch diese quasi-algorithmische Form der Komplementbildung darunter zu beobachten ist.

4.3.4 Zusammenfassung

In Kapitel 4.3 wurden Befunde und deren Deutung zu folgendem Forschungsinteresse vorgestellt:

FI3: 1. *Inwieweit und ggf. in welchen Varianten tritt die Idee des Stelle Herstellens im Unterricht auf?*
2. *Wie kultiviert die Lehrerin diese Idee verständnisentwickelnd zum Algorithmus?*
3. *Inwiefern wird diese Idee nach der Einführung des Algorithmus zur reflexiven Verständnisentwicklung verwendet?*

Dazu wurde kapitelweise anhand exemplarischer Schülerdokumente und Interaktionen dargestellt, wie sich die Idee des Stelle Herstellens entwickelt, vom Auftreten der Idee und ihrer Kultivierung bis hin zur Nutzung, mit ihr verständnigserwerbend zum Algorithmus zu gelangen. Folgende Ergebnisse lassen sich festhalten:

Variantenreiches Auftreten

Die Idee des Stelle Herstellens tritt sehr früh im Unterricht der Studie originär aus dem Denken der Kinder auf (vgl. Kap. 4.3.1), ohne von außen angeregt zu werden. Zunächst lässt sie sich in Teilschritten komplementbildenden Rechnens erkennen, die das Ziel verfolgen, beim Komplementbildungsvorgang bereits einzelne Stellen der Zielzahl in den Zwischenergebnissen herzustellen. Diese Schritte erscheinen zunächst umständlich, wirken aber vermutlich auch entlastend, da im weiteren Verlauf der Rechnung nur noch Teilbestandteile der Zielzahl erreicht werden müssen.

Wenn alle Rechenschritte vollständig der Idee des Stelle Herstellens folgen, lassen sich drei Varianten des Stelle Herstellens beim komplementbildenden Rechnen ausmachen, die ebenfalls alle originär aus dem Denken der Kinder auftreten:

- Die Stellen der Zielzahl werden in der Reihenfolge der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer hergestellt. Drohen dabei Überschreitungen, so wird nicht die Stelle selbst, sondern diese vermindert um 1 hergestellt (so genanntes „Fasterreichen“).
- Die Stellen der Zielzahl werden ebenfalls in der Reihenfolge der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer hergestellt. Gegebenenfalls auftretenede Überschreitungen werden bewusst in Kauf genommen und durch das Adaptieren der Idee der Hilfsaufgabe aus dem wegnehmenden Rechnen (Rechenrichtungswechsel, kompensieren in Gegenrichtung) bewältigt.

- Die Stellen der Zielzahl werden in der Reihenfolge der Einer-, Zehner- und Hunderterziffer hergestellt. Stellenwertübergäng stellen hier kein Problem dar.

Es zeigte sich, dass die Lehrerin in gemeinsamen Interaktionen starken Einfluss auf die Kinder ausübt, die Idee des Stelle Herstellens in den Rechenwegen zu sehen. Vermutlich möchte sie frühzeitig diese Idee sichern, um diese später zur Einführung des schriftlichen Algorithmus nutzen zu können. Diese starke Fokussierung auf diese spezielle Art des additiv schrittweisen Komplementbildens trägt aber vermutlich – wie bereits in Kap. 4.2 dargestellt – dazu bei, dass sich Rechnungen in den anderen in dieser Grundvorstellung denkbaren Strategiekategorien nicht mehr entwickeln können.

Kultivierung und Einführung des schriftlichen Algorithmus

Die letzte der drei Varianten, der Idee des Stelle Herstellens zu folgen (Reihenfolge Einer-, Zehner- und Hunderterstelle), kultiviert die Lehrerin zur dann so genannten Strategievariante „Ergänzen stellengerecht“ (vgl. Kap. 4.3.2).

Diese ist dann aber eigentlich keine Strategie mehr, da hier bei allen Kindern identische Schritte ausgeführt werden, wenn immer mit der kleinstmöglichen Zahl der Zielstellenwert erreicht wird. Man könnte also von einer präalgorithmischen Form halbschriftlichen Rechnens sprechen.

Die Lehrerin nutzt dann dieses „Ergänzen stellengerecht“ zur Einführung des schriftlichen Algorithmums (*Auffüllen mit Ergänzen*, bzw. *Überschreiten durch Auffüllen*, vgl. Kap. 2.3.2). Hier ist in Interaktionen zu Dokumenten erkennbar, dass die Kinder mit dem Wissen über Teilstrukturen des Komplementbildungsprozesses auf halbschriftlicher Ebene die passenden Teilprozesse des Algorithmus erklären können, hier also eine relativ verständniserwerbende Form der Einführung gewählt wird.

Reflexives Algorithmusverständnis

Dieser Prozess könnte auch umgekehrt funktionieren – in Unterrichtsphasen, in denen schriftliche Rechnungen unter anderem auch mit halbschriftlicher Komplementbildung reflexiv verglichen werden (vgl. Kap. 4.3.3), zeigen die Kinder, dass sie dem algorithmischen Rechnen verschiedene Teilaspekte des halbschriftlichen Komplementbildens zuordnen können.

Zudem kann in den späteren Unterrichtsblöcken beobachtet werden, dass Kinder auch die Variante „Ergänzen stellengerecht“ nicht nur halbschriftlich, sondern auch internalisiert ausführen, und diese in ihr Repertoire der möglichen Rechenarten, vermutlich als eine Alternative zum schriftlichen Rechnen, mit aufnehmen können.

Die Idee des Stelle Herstellens ist damit ein wichtiger Bestandteil des Rechnens in der Grundvorstellung Komplementbildung geworden. Die hier skizzierte Entwicklung, vom ersten Auftreten bis hin zum Retentiontest, kann anhand der Übersicht in Tabelle 4.3 (unten) noch einmal nachvollzogen werden, in der alle in diesem Zusammenhang erwähnten Medien chronologisch dargestellt sind.

Tabelle 4.3: Die Idee des Stelle Herstellens – chronologische Übersicht abgedruckter Medien

Std.	**Medien**	**Inhalt** *(kursiv: Kultivierung der Idee in gemeinsamen Interaktionen)*
01-2	Abbildung 4.43, S. 197	Benedikt: Schritt am Rechenstrich stellt Stelle her
01-2	Abbildung 4.26, S. 160	Katharina: Idee des Stelle Herstellens?
01-2	Abbildung 4.44, S. 199	Isabel_Sch: Alle Stellen herstellen, Reihenfolge HZE
01-3	*Transkript 18, S. 274*	*Reflexion zu 01-2: K-Hilfsaufgabe und die Idee des Stelle Herstellens, erklärt am Rechenstrich*
01-3	Abbildung 4.32, S. 172	Lasse: Die Idee des Stelle Herstellens mit Rechenrichtungswechsel löst die Idee der K-Hilfsaufgabe aus
01-3	*Transkript 19, S. 276 Transkript 20, S. 278*	*Reflexion über Priscilla & Robin: Zusätzlich zur Formatwahl wird die Idee des Stelle Herstellens kultiviert*
01-4	Abbildung 4.45, S. 199	Priscilla: Alle Stellen herstellen ohne Rechenrichtungswechsel, Reihenfolge EZH, entspricht dem späteren „Ergänzen stellengerecht“
02-2	*Abbildung 4.27, S. 162 und die zugehörigen Transkripte*	*Jule und Robin, Fliesenkreis: Jule (Stelle Herstellen) darf einen Rechenrichtungswechsel einbauen, Robin (K-Hilfsaufgabe) wird missverstanden*
03-3	Abbildung 4.36, S. 179	Isabel_Sch: Stelle Herstellen, Reihenfolge EZH, angewandt beim K-Vereinfachen
07-3	Abbildung 4.50, S. 209	Robin: Stelle Herstellen, Reihenfolge EZH, internalisiert ausgeführt
08-1	*Abbildung 4.43, S. 197 Abbildung 4.45, S. 199*	*Mit Ausschnitten aus den beiden Dokumenten (Benedikt aus 01-2, Priscilla aus 01-4) wird „Ergänzen stellengerecht“ (Stelle Herstellen EZH) angeregt*
08-2	*Abbildung 4.46, S. 204*	*Einführung des Algorithmus parallel zu Robins „Ergänzen stellengerecht“ mit Farbmarkierungen*
08-3	Abbildung 4.47, S. 205	Jule: Reflexive Verwendung „Ergänzen stellengerecht“ parallel zum Algorithmus
10-2	Abbildung 4.48, S. 207	Isabel_F: Reflexive Verwendung „Ergänzen stellengerecht“ im Vergleich zum Algorithmus
12-n	Abbildung 4.49, S. 209	Jule wählt „Ergänzen stellengerecht“ als Variante halbschriftlichen Rechnens im Retentiontest

4.4 Mögliche Auslöser komplementbildenden Rechnens

In diesem Kapitel sollen abschließend die sogenannten Auslöser komplementbildenden Rechnens im Unterricht der Studie betrachtet werden. In Kap. 2.2.3 wurde dargestellt, dass in der Literatur vier Auslöser für die Strategiewahl bzw. dann auch im Speziellen für das komplementbildende Rechnen benannt werden: Der Kontext der Aufgabe, die Zahlenwerte (die ggf. eine „kleine Differenz" darstellen), die Anregungen im Unterricht, und die ggf. vorhandenen Vorlieben der Kinder. Daher wurde als Forschungsfrage formuliert:

FI4: Welche Rolle spielen mögliche Auslöser der Komplementbildung, wie
1. Aufgaben mit Kontexten, die einen Grundvorstellungswechsel anregen können,
2. Aufgaben mit einer kleinen Differenz,
3. Anregungen durch Reflexionen über das Vorgehen anderer Kinder, und
4. individuelle Vorlieben für bestimmte Varianten komplementbildenden Rechnens?

Zu allen vier Forschungsinteressen ist anzumerken, dass es schwierig ist, in einem beobachteten Alltagsunterricht kausale Abhängigkeiten zu evaluieren, da hier keine kontrollierten Bedingungen bestehen, wie sie in einigen der in Kap. 2.2.3 dargestellten Studien vorhanden waren. Zudem ist anzumerken, dass sich der Grundvorstellungswechsel, ausgelöst durch Kontexte, Zahlenwerte, oder Vorlieben nur dann vollziehen kann, wenn die Strategiewahl in der entsprechenden Unterrichtsstunde freigestellt ist. Zu diesen Fragen wird daher nur an Beispielen argumentiert, die entweder aus Stunden stammen, in denen die Wahl der Rechenstrategie freigestellt war (vgl. Kap 3.3), oder diese zumindest nach der Bearbeitung von „Pflichtaufgaben" möglich war – in diesem Fall wird dann gesondert auf die Form der „Pflichtaufgabe" hingewiesen.

Es bleibt zu einem Großteil Interpretation, warum ein Kind in der Arbeitsphase einer Stunde ein Problem in der gewählten Strategiekategorie löst. Dass sie etwa zu Beginn der Stunde an einer gemeinsam besprochenen Aufgabe vorgestellt wurde, heißt nicht, dass diese Anregung auch der Auslöser sein muss, denn ebenfalls eine bis drei der anderen könnten aktiv sein und die Anregung zu Stundenbeginn vom Kind selbst aber gar nicht wahrgenommen werden.

In einigen Fällen äußern sich die Kinder aber mehr oder weniger trennscharf zu möglichen Auslösern auf den Dokumenten, bzw. sprechen über diese in den begleitenden Interaktionen. Hieran soll im Folgenden versucht werden, etwas zum Stellenwert der einzelnen möglichen Auslöser auch im hier beobachteten Unterricht – mit all den genannten Einschränkungen – zu erheben.

4.4.1 Kontexte

Im Unterricht der Studie sind Kontextaufgaben nur an zwei Stellen vertreten (vgl. auch Kap. 3.3): im explorativen Block 01 wird mit dem Kinokontext der Einstieg in subtraktives Rechnen im Tausenderraum angeregt, im Block 11 („Zurück zum Start“) wird erneut in einer der Kino-Situation ähnlichen Kontextumgebung (ICE-Aufgabe) die Möglichkeit flexiblen Rechnens gegeben, neben der mentalen Arithmetik (also halbschriftliches bzw. internalisiertes strategisches Rechnen) hier auch unter Einbezug auch der bis dahin eingeführten schriftlichen Verfahren, die dort ebenfalls zur Wahl stehen.

Kein Kontextbezug in Block 11

Die Analyse der Dokumente aus Block 11 im Sinne des Kontextes als Auslöser für die Wahl der Rechenstrategie, ggf. verbunden mit dem Grundvorstellungswechsel, ist schnell erledigt: In keinem der Dokumente findet sich ein Bezug zum Kontext, in keiner der Interaktionen aus dem Unterricht spielt der Kontext eine Rolle. Die Kinder kombinieren aus den Zahlenwerten der Kontextaufgabe heraus einfach immer neue Subtraktionsaufgaben und arbeiten von da an auf der reinen Zahlenebene, vermutlich, weil sie ahnen, dass es bei diesem Kontext nicht um Erkenntnisse über Zugreisen, sondern nur um eingekleidete Subtraktionsaufgaben geht, die sich darin verbergen.

Ein Beispiel dafür ist das Dokument von Isabel_F (Abbildung 4.6, S. 120, Stunde 11-2), hier entstammen alle Zahlenwerte der Subtraktionsaufgaben dem ICE-Kontext, ohne dass dieser auf dem Dokument in irgendeiner Form auftritt.

Kontextbezug im explorativen Kinoblock

Anders ist die Situation im explorativen Kinoblock 01. In der Stunde 01-1 wird dieser Kontext zunächst als solcher mit allen Kindern besprochen (es ist ein real existierendes Kino, mit real existierenden Saalplänen und Sitzplatzzahlen zu Grunde gelegt, dass alle Kinder der Klasse persönlich schon besucht haben). In diesem Kontext werden dann folgende Aufgaben gestellt:

- Stunde 01-1: „Im Kino sitzen 526 Leute, 389 davon gehen zur Pause.“
- Stunde 01-2: „Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da.“
- Stunde 01-3 und 01-4 (jeweils Doppelstunden): Kino-Aufgabenpool, 12 Säle mit 120 bis 624 Plätzen, jeweils zur Bestückung der Wahlaufgaben „..293 sind schon da“ oder „…137 gehen…“ (s.o.). Bei der Stunde 01-4 ist zu beachten, dass hier die Lehrerin zunächst mindestens eine „Pflichtaufgabe“ in „Ergänzen(+)“ oder „Ergänzen(-)“ erbittet, bevor die Rechenstrategie für weitere Aufgaben freigegeben ist.

Der Kontext der Stunde 01-1 soll dabei eher das wegnehmende Rechnen anstoßen, der Kontext der Stunde 01-2 dagegen auffüllendes Komplementbilden (vgl.

Kap. 3.3). Auf einen dritten Kontext, der entleerende Komplementbildung hätte anregen können, wurde verzichtet (vgl. hierzu die Ausführungen in Kap. 4.3.1 und die Übersicht in Tabelle 4.2, S. 149). In den Stunden 01-3 und 01-4 stehen dann beide Kontexte zur Wahl.

In der Stunde 01-1 rechnen 15 der 17 anwesenden Kinder erwartungsgemäß nur in der Grundvorstellung Wegnehmen. Von den 15 W-Rechnern ergänzen 12 ihr Dokument durch zusätzlich notierte Kommentare wie Fragestellungen der Art „Wie viele Kinder sitzen noch im Kino? 137 Leute sitzen noch im Kino“ oder „Ich muss jetzt überlegen, wie viele Menschen noch dort drin sind“, und geben damit ein Indiz, dass der Kontext sie zum wegnehmenden Rechnen angeregt haben könnte. Zwei Kinder jedoch rechnen – obwohl der Kontext Wegnehmen intendieren soll – in der Grundvorstellung Komplementbildung, darunter der Rechenweg von Eric (Abbildung 4.18, S. 145), der in Kap. 4.2.1 als K-Initialdokument vorgesellt wurde, und der trotz seiner auffüllend-komplementbildenden Rechnung als Antwort auf das Blatt schreibt: „Es sind 137 Leute die noch sitzen“.

Hinweise für oder gegen einen Kontextbezug in Stunde 01-2

In der Stunde 01-2 intendiert dann die Kontextaufgabe auch den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung, die Formulierung „Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da“ soll die Frage „Wie viele können noch dazukommen?“ und additives Auffüllen auslösen. Gleichzeitig werden aber zu Beginn der Stunde 01-2 auch die ersten Schülerbeispiele für subtraktives Rechnen reflektiert, neben W-Schrittweise und einem W-Vereinfachen zuzuordnendem Rechenweg auch die beiden Rechnungen in K-Schrittweise im Additionsformat von Eric und Lasse aus der Vorstunde. Auch diese kommen also als möglicher Auslöser für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung in Frage.

In Tabelle 4.4 (S. 217) ist dargestellt, auf welchen Dokumenten der Stunde 01-2 ein Hinweis zum Kontext gegeben wird, bzw. ob auch ein Hinweis darauf vorhanden ist, ob auch die Anregungen zu Stundenbeginn aufgegriffen wurden.

Dabei geben 11 Kinder einen Hinweis, den Kontext als Auffüllvorgang verstanden zu haben, und rechnen darauf hin auch in der Grundvorstellung Komplementbildung. 3 dieser 11 Kinder beziehen sich zusätzlich zu den Kontextkommentaren auf die vorgestellten Rechenwege: Niklas_V kennzeichnet seine Rechnung mit „Eric“, Jule bezieht sich auf „Kathas Weg“ (der allerdings schrittweise wegnehmend ist – vgl. hierzu Kap. 4.2.2), und Lasse auf „Lasses Weg“. Nur ein Kind, Benedikt, gibt dagegen an, er habe „wie Lasse ergänzt“, ohne einen Hinweis auf den Kontext zu geben.

Weitere 3 Kinder beachten die Intention des Kontextes in dieser Stunde nicht – Felix und Yannick ohne Kommentar, aber Jonas schreibt „Wie viele Leute fehlen noch“ neben seine W-Rechnung.

Tabelle 4.4: Hinweise für Grundvorstellungswahl-Auslöser in Stunde 01-2

Kind	**Hinweise zu Kontext** („Im Kino können 624 Leute sitzen, 293 sind schon da.“) **und *Anregung***	**GV***	**Vgl.**
Ben	„Wie viele Leute müssen noch kommen, damit das Kino voll ist.“	**K**	
Benedikt	*„Ich habe wie Lasse ergänzt“*	**K**	Abb. 4.37, S. 197
Eric	„Wie viele Plätze sind noch frei?“	**K**	
Isabel_F	„Wie viele Leute dürfen noch kommen?“	**K**	
Isabel_Sch	-	**K**	Abb. 4.38, S. 199
Jule	„Ich glaube ich muss jetzt gucken wie viele noch nicht da sind“ und *„Ich habe diesmal Kathas Weg genommen …“*	**K**	Abb. 4.19, S. 147
Katharina	-	**K**	Abb. 4.20, S. 160
Noelia	„Ich will wissen wie viele Plätze noch frei sind.“	**K**	
Priscilla	„Wenn im Kino 293 sitzen wie viele können dann noch rein“	**K**	
Robin	„Wie viele können noch kommen?“	**K**	
Sebastian	„331 Leute felen noch bis das Kino anfangen kann.“	**K**	
Tom	„Wie viele fehlen noch bis das Kino voll ist“ bei einer K(+) Aufgabe, „Wie viele Leute müssen weg gehen bis nur noch 293 Leute im Kino sitzen“ bei einer K(-) Aufgabe.	**K**	Abb. 4.3, S. 117
Lasse	„Ich habe mir gedacht das ich herausfinden soll wieviele noch velen und es felen 331 Leute“ und *„Weg von Lasse“*	**K**W	
Niklas_K	Vorab 4 W-Rechnungen, 2 davon sind mit *„Felix“* und *„Benedikt“* kommentiert. Keine Kennzeichnung bei der als Ausschnitt abgedruckten 5. K-Rechnung.	W**K**	Abb. 4.59, S. 187
Niklas_V	„Man muss heraus finden wie viele Leute noch ins Kino kommen müssen das das Kino voll ist.“ – eigener Weg in K-Schrittweise(-), zweiter Weg in K-Schrittweise(+) und Kommentar *„Eric“,* dritter Weg in W-Vereinfachen/Schrittweise , Kommentar *„Priscilla“*.	**K**W	Abb. 4.49, S. 151
Felix	-	W	
Jonas	„Wie viele Leute fehlen noch“, rechnet aber W-Schrittweise, zweiter Rechenweg enthält W-Vereinfachen und den Kommentar *„Prisci“*.	W	
Yannick	-	W	

*) GV = Grundvorstellung, K = Komplementbildung, W = Wegnehmen

Allein ein Kontextkommentar muss also nicht folgerichtig auch den Grundvorstellungswechsel auslösen: Sowohl die Einlassung von Eric aus Stunde 01-1, als auch der Kommentar von Jonas aus Stunde 01-2 legen nahe, dass hier der Kontext der Aufgabe und die dem Rechenweg zugrunde liegende Grundvorstellung nicht zu einander zu passen: Eric füllt auf, schreibt aber von Leuten, die „noch“ sitzen, deutet damit eher das Ende eines Wegnehmvorgangs an. Jonas fragt „Wie viele Leute fehlen noch“, ermittelt aber vermutlich nicht die fehlenden Leute, sondern eher den Rest der Sitzplätze, die übrig bleiben, wenn man die besetzten Plätze von den Gesamtplätzen wegnimmt.

Immerhin wechseln deutlich viele Kinder, wie intendiert, in die Grundvorstellung Wegnehmen, woran auch der Kontext, wie man hier nur vermuten kann, einen starken Anteil haben könnte.

Beispiele zur Rolle des Kontextes in den Stunden 01-3 und 01-4

In den 01-3 und 01-4 (jeweils Doppelstunden) dürfen die Kinder aus einem Aufgabenpool Säle mit 120 bis 624 Plätze in die Wahlaufgaben „…293 sind schon da…“ oder „…137 gehen…“ einsetzen, also auch zwischen den die jeweilige Grundvorstellung intendierenden Kontexten wechseln. Dazu finden in beiden Stunden weitere Reflexionen über Rechenwege statt.

Die Kinder rechnen nun deutlich mehr Aufgaben aus beiden Kontexten, daher können im Folgenden nur noch exemplarische Beispiele gegeben werden, aus Platzgründen an Dokumenten, die an anderen Stellen dieser Arbeit bereits abgedruckt sind:

- Tom (Std. 01-3, Abbildung 4.33, S.173) wählt „…293 sind schon da…“ und rechnet komplementbildend, in der zweiten, nicht abgedruckten Hälfte des Blattes wechselt er dann auf „…137 gehen…“ und in die Grundvorstellung Wegnehmen.
- Priscilla (Std. 01-4, Abbildung 4.45, S.199) fragt passend zur Kontextaufgabe „…293 sind schon da…“ (im nicht abgedruckten Teil des Dokumentes) „Wie viele Leute können noch rein?“ und rechnet alle Aufgaben (auch im nicht abgedruckten Teil) komplementbildend.
- Keinen Kommentar zum Kontext gibt Isabel_F (Std. 01-4, Abbildung 4.9, S.126 und Abbildung 4.10, S.127), rechnet aber in der zur gewählten Aufgabenstellung passenden Grundvorstellung. Sie gibt oben an, „Priscis Weg“ (eine zuvor vorgestellte K-Rechnung) als Idee aufgenommen zu haben.
- Ebenfalls keinen Kommentar zum Kontext gibt Katharina (Std. 01-4, Abbildung 4.58, S.233). Sie wählt „…137 gehen…“, verweist aber auf „Prisci“, und rechnet zwei Aufgaben in der Grundvorstellung Komplementbildung.

- Yannick (Std. 01-3, Abbildung 4.51, S.221) und Jonas (Std. 01-3, Abbildung 4.13, S. 134) formulieren beide eine zum Kontext „…293 sind schon da…“ passende Frage. Während aber Jonas dann auch in der Grundvorstellung Komplementbildung rechnet, rechnet Yannick alle Aufgaben wegnehmend.
- Lasse (Std. 01-3, Abbildung 4.32, S.172) rechnet zwei Aufgaben zum Kontext „…137 gehen…“ und kommentiert auch das erste Ergebnis passend: „Für mich ist das Ergebnis die Zahl 222 weifiel Leute In Kino noch sind“. Er rechnet aber beide Aufgaben in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Deutung der Beispiele aus den Stunden 01-3 und 01-4

An einigen Stellen der genannten Beispiele wird deutlich, dass der Kontext noch eine Rolle bei der Grundvorstellungswahl spielen könnte, etwa bei Tom, der passend zum Wechsel der Kontextaufgabe auch in der anderen Grundvorstellung rechnet, obwohl er den Kontext nicht kommentiert. Allerdings tun dies auch andere Kinder, die sich dann aber (auch?) auf Anregungen durch Schülerlösungen beziehen.

An dieser Stelle muss zusätzlich beachtet werden, dass die Lehrerin in der Stunde 01-4 von den Kindern erbittet (neben weiteren Aufgaben mit freier Strategiewahl), mindestens eine K-Rechnung zu versuchen. Auch wenn es in den drei oben genannten Beispielen mehr Aufgaben als diese erste „Pflichtaufgabe“ sind, so werden sie doch mit dieser ersten Rechnung bereits in die Grundvorstellung Komplementbildung geleitet.

Generell werden in den Stunden 01-3 und 01-4 die Kommentare zum Kontext weniger, und selbst Kommentare, welche die Kontextaufgabe richtig interpretieren, bedeuten möglicherweise nicht, dass auch in der passenden Grundvorstellung gerechnet wird – einige Kinder wählen passend, andere wiederum nicht.

Man kann vermuten: Der Kontext verliert zunehmend an Bedeutung, inzwischen haben die Kinder möglicherweise erkannt, dass es nicht um Erkenntnisse über das Kino, sondern um das Herauslesen der implementierten Subtraktionsaufgabe geht. Diese Subtraktionsaufgabe kann man – so geht es aus den Reflexionsphasen hervor – beliebig in beiden Grundvorstellung rechnen (eine Zuordnung der Grundvorstellung zum Kontextproblem wird nie hinterfragt), so demonstrieren es die dort vorgestellten Beispiele, die als Anregungen immer stärker werden als Auslöser für die Grundvorstellungswahl. Ein Kommentar zum Kontext könnte also möglicher Weise kein Indiz mehr dafür sein, ob und wie stark der Kontext auch die Wahl der Grundvorstellung beeinflusst hat.

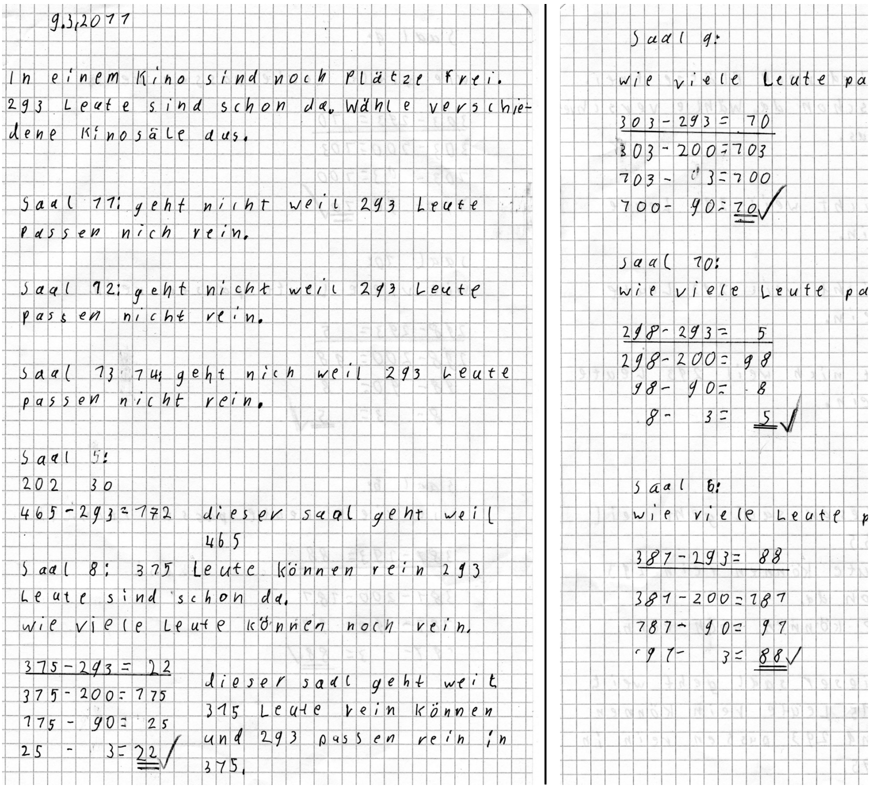
4.4.2 Zahlenwerte

In Kap. 2.3.3 wurde vorgestellt, dass bestimmte Zahlenwerte in der Aufgabe als Auslöser für komplementbildendes Rechnen gelten können. Unter dem Stichwort „kleine Differenz“ sind dort verschiedene Definitionen dieser diskutiert worden, die den Grundvorstellungswechsel begünstigen sollen: Zum einen die absolute Nähe der Zahlen (hier „kleinste Differenz“ genannt, Beispiel: 623-617, nach Padberg & Benz, 2011), zum anderen die Nähe des Subtrahenden zum Hunderter, der gerundet werden muss (Beispiel 623-587, nach Torbeyns, De Smedt, Stassens, u. a., 2009), aber auch, wenn sich mehrere Hunderterstellen dazwischen befinden (hier „erweiterte kleine Differenz“ genannt, obwohl die Differenz selbst nicht mehr klein ist, Beispiel 623-287, nach Peltenburg u. a., 2011). Über den Minuenden werden divergente Aussagen gemacht, zum Teil auf die Endziffern bezogen, wohl aber, dass auch dieser eine gewisse Nähe zum Hunderter haben muss (sofern dieser überschritten wird, nicht bei „kleinster Differenz“).

Die Häufigkeiten und Verteilungen der kleinen Differenz als Auslöser komplementbildenden Rechnens werden hier nicht detailliert ausgezählt und dargestellt, da zum einen die unpräzise Definition der kleinen Differenz schon Schwierigkeiten macht, Aufgabenstellungen dieser zuzuordnen, darüber hinaus hätte die Auswertung nicht mehr nur dokument-, sondern aufgabenbezogen sein müssen, und drittens – der wesentliche Grund – ist, wie bereits vorangehend bei den Ausführungen zum Kontext beschrieben – eine klare Trennung zwischen einzelnen Auslösern für komplementbildendes Rechnen nicht möglich: Trotz vorhandener kleinen Differenz könnte der Kontext, die Anregungen, oder die Vorlieben stärker bei der Grundvorstellungswahl sein, so dass Kinder diese kleine Differenz möglicherweise gar nicht wahrgenommen haben. Daher folgt die Analyse der Rolle der kleinen Differenz hier an aussagekräftigen Dokumenten und einer Transkriptstelle.

Beispiele mit einer kleinen Differenz ohne Wechsel zur Komplementbildung

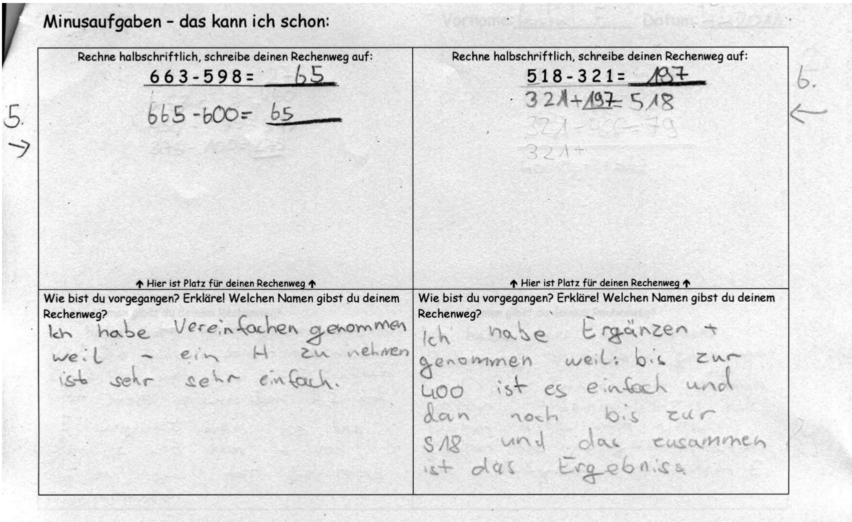
Häufig konnte beobachtet werden, dass (auch) die kleine Differenz in Aufgabenstellungen nicht den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung auslöst, wie etwa im Dokument von Yannick (Abbildung 4.51, S. 221): Er sucht zunächst alle nicht lösbaren Aufgaben aus dem Aufgabenpool der Stunde 01-3 heraus, um dann vier Aufgaben mit kleiner Differenz in W-Schrittweise zu rechnen. Isabel_F (Abbildung 4.52, S. 222) rechnet im Posttest die Aufgabe 663-598 w-vereinfachend, die eine kleine Differenz enthält, dagegen die Aufgabe daneben komplementbildend, die per Definition keine kleine Differenz enthält. Lasse (Abbildung 4.53, S. 222) dagegen rechnet im Posttest die eine kleine Differenz enthaltende Aufgabe 426-387 komplementbildend, aber die Aufgabe 763-498 (mit erweiterter kleiner Differenz) w-vereinfachend.



In der rechten Abbildung fehlt durch Zuschnitt 3x die Äußerung „passen noch rein“.

Abbildung 4.51: Yannick, Stunde 01-3, Arbeitsphase, zugeschnittene Vorder- und Rückseite

Dass die kleine Differenz nicht den Wechsel zur Komplementbildung auslösen muss, zeigt sich auch in den Pre-, Post- und Retentiontests (vgl. Tabelle A.2, S. 263): Die in allen Tests vorhandene Kernaufgabe 426-387, die den Definitionen zufolge eine typische kleine Differenz enthält, wird im Pretest nie, im Post- und Retentiontest gerade je zweimal komplementbildend gerechnet. Die zweite Kernaufgabe 763-498, die eine „erweiterte kleine Differenz“ darstellen könnte, wird nur im Posttest einmal in der Grundvorstellung Komplementbildung gerechnet, dagegen zunächst (im Pretest) häufig mit W-Schrittweise, später dann mehr (im Posttest) bis nahezu ausschließlich (im Retentiontest) mit W-Vereinfachen gerechnet.



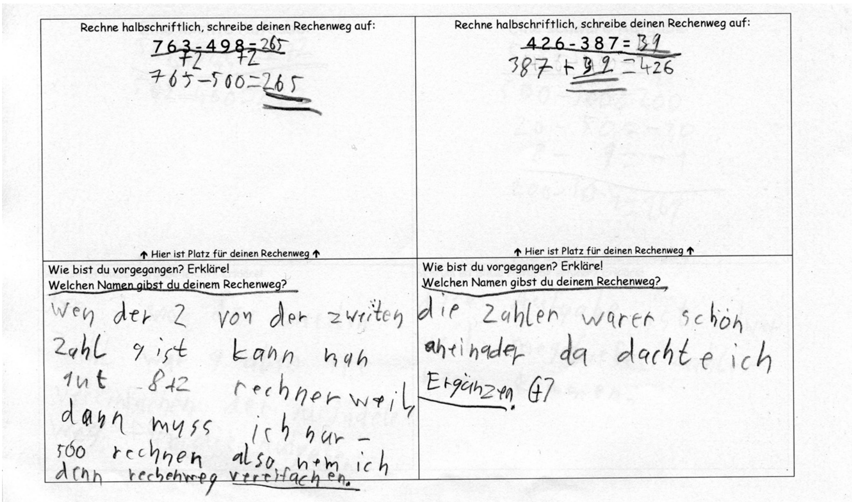
Minusaufgaben – das kann ich schon:

Rechne halbschriftlich, schreibe deinen Rechenweg auf:	Rechne halbschriftlich, schreibe deinen Rechenweg auf:
663 - 598 = 65 665 - 600 = 65	518 - 321 = 197 321 + 197 = 518
↑ Hier ist Platz für deinen Rechenweg ↑	↑ Hier ist Platz für deinen Rechenweg ↑
Wie bist du vorgegangen? Erkläre! Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg? Ich habe Vereinfachen genommen weil - ein H zu nehmen ist sehr sehr einfach.	Wie bist du vorgegangen? Erkläre! Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg? Ich habe Ergänzen + genommen weil: bis zur 400 ist es einfach und dan noch bis zur 518 und das zusammen ist das Ergebniss

5. →

6. ←

Abbildung 4.52: Isabel_F, Post-Test, Ausschnitt



Rechne halbschriftlich, schreibe deinen Rechenweg auf:	Rechne halbschriftlich, schreibe deinen Rechenweg auf:
763 - 498 = 265 +2 +2 765 - 500 = 265	426 - 387 = 39 387 + 39 = 426
↑ Hier ist Platz für deinen Rechenweg ↑	↑ Hier ist Platz für deinen Rechenweg ↑
Wie bist du vorgegangen? Erkläre! Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg? Wen der 2 von der zweiten Zahl 9 ist kann man mit 8+2 rechnen weil dann muss ich nur - 500 rechnen also nem ich denn rechenweg vereifachen.	Wie bist du vorgegangen? Erkläre! Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg? die Zahlen waren schon aneinader da dachte ich Ergänzen. 47

Abbildung 4.53: Lasse, Post-Test, Ausschnitt

Deutung der Beispiele ohne Wechsel zur Komplementbildung

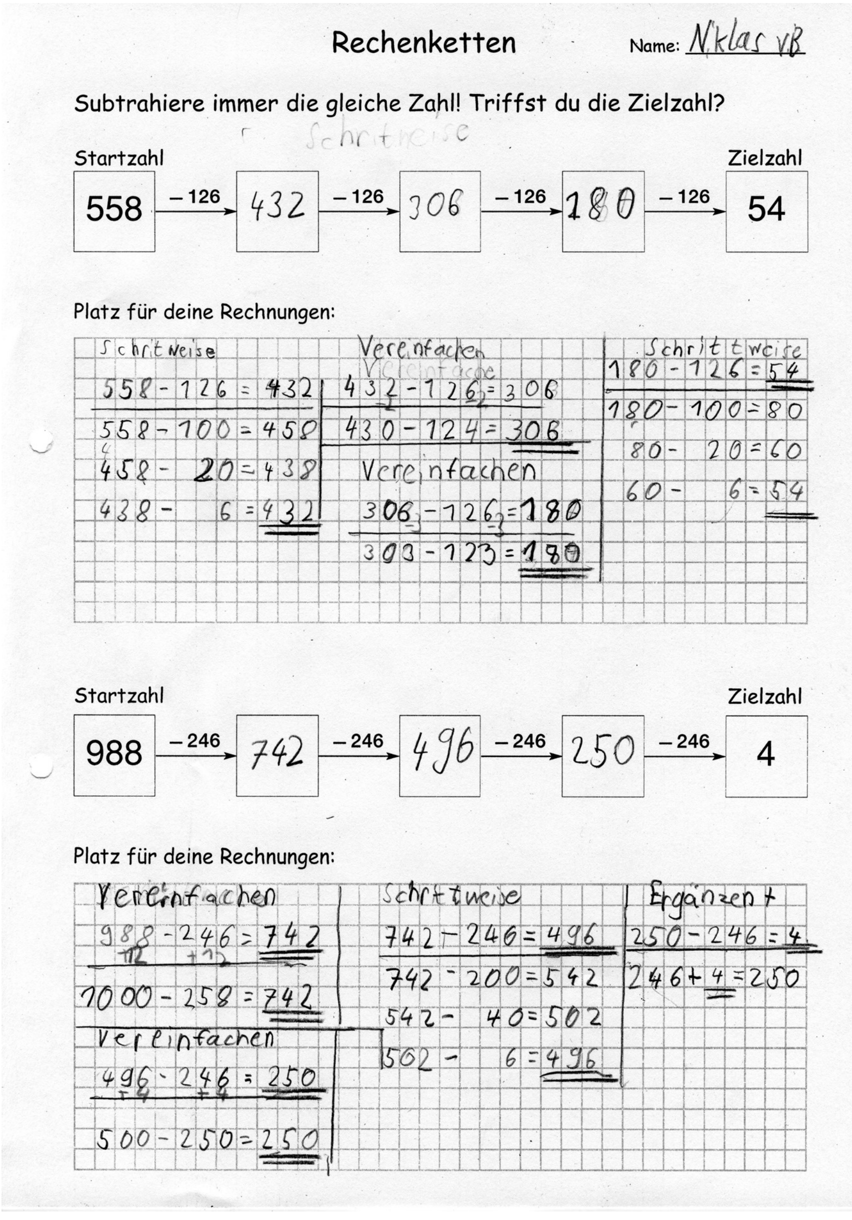
Nach dem er zunächst die nicht lösbaren Aufgaben als einfachste Tätigkeit aufgelistet hat, wählt Yannick vermutlich die danach vermeintlich einfachsten Aufgabenstellungen aus dem Aufgabenpool aus, bei denen ein kleiner Abstand zwischen Minuend und Subtrahend existiert. Er rechnet diese allerdings alle umständlich stellenweise wegnehmend, nicht nur die Aufgaben mit kleiner Differenz, sondern sogar die Aufgabe 298-293, die man dem Typ „kleinste Differenz" zuordnen könnte. Man kann vermuten, dass Yannick sehr wohl die Zahlenwerte als kleine Differenzen bemerkt, diese aber nicht im Sinne adaptiver Expertise (vgl. Kap. 2.2.1) nutzt, eine günstigere Strategie zu erzeugen, sondern lediglich vermeintlich zur Reduktion des Arbeitsaufwands.

Am Beispiel von Isabel_F und Lasse kann man vermuten, dass die Kinder die Zahlenwerte der Aufgaben unterschiedlich wahrnehmen: Isabel argumentiert in der rechten Rechnung „bis zur 400 ist es einfach", und kennzeichnet damit ein (hier per Definition eigentlich nicht vorhandenes) Element der kleinen Differenz als Auslöser für die Strategiewahl, während das in der linken Aufgabe ebenfalls vorhandene Element dort nicht die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung auslöst. Lasse erkennt zwar die Nähe der Zahlen (siehe Kommentar) in der rechten Aufgabe, und begründet damit die Grundvorstellungswahl, aber nicht das in der rechten Aufgabe ebenfalls relativ einfach mögliche Komplementbilden (65+200), und rechnet dort wegnehmend.

Sowohl an den beiden gerade angeführten Beispielen, als auch an der Strategiewahl bei den Aufgaben mit kleiner Differenz im Pre-, Post- und Retentiontest kann man vermuten, dass die Kinder wohl zunehmend (adaptive Expertise in Entwicklung) die Zahlenwerte der Aufgaben beachten, aber diese nicht immer als Anlass sehen, in die Grundvorstellung Komplementbildung zu wechseln: Sie wählen gegen Ende sehr häufig das W-Vereinfachen (wie Isabel und Lasse in den Beispielen oben auch), dass prinzipiell eine ebenfalls „günstige" Strategie darstellt, Aufgabentypen der kleinen und der erweiterten kleinen Differenz abzuarbeiten, bei denen – und das könnte der Vorteil dieser gegenüber den K-Strategien sein – der Minuend eine unwichtigere Rolle spielt. Es reicht aus, die Nähe des Subtrahenden zum Hunderter zu erkennen und die Ausgangsaufgabe so zu manipulieren, dass anschließend im Kopf einfachstes stellen- oder schrittweises Rechnen stattfinden kann.

Beispiele mit einer kleinen Differenz und Wechsel zur Komplementbildung

Jonas (Abbildung 4.13, S. 134) rechnet die abgedruckte Aufgabe 298-293 komplementbildend (seine einzige komplementbildende Rechnung im beobachteten Unterricht), wechselt dann aber im nichtabgedruckten Teil bei zwei weiteren Aufgaben mit kleiner Differenz in umständliches, schrittweise wegnehmendes Rechnen (ähnlich wie oben bei Yannick, Abbildung 4.51, S. 221).



Rechenketten Name: Niklas vB

Subtrahiere immer die gleiche Zahl! Triffst du die Zielzahl?

Schrittweise

Startzahl 558 –126→ 432 –126→ 306 –126→ 180 –126→ 54 Zielzahl

Platz für deine Rechnungen:

Schrittweise
558 - 126 = 432
558 - 100 = 458
458 - 20 = 438
438 - 6 = 432

Vereinfachen
432 - 126 = 306
430 - 124 = 306

Vereinfachen
306 - 126 = 180
303 - 123 = 180

Schrittweise
180 - 126 = 54
180 - 100 = 80
80 - 20 = 60
60 - 6 = 54

Startzahl 988 –246→ 742 –246→ 496 –246→ 250 –246→ 4 Zielzahl

Platz für deine Rechnungen:

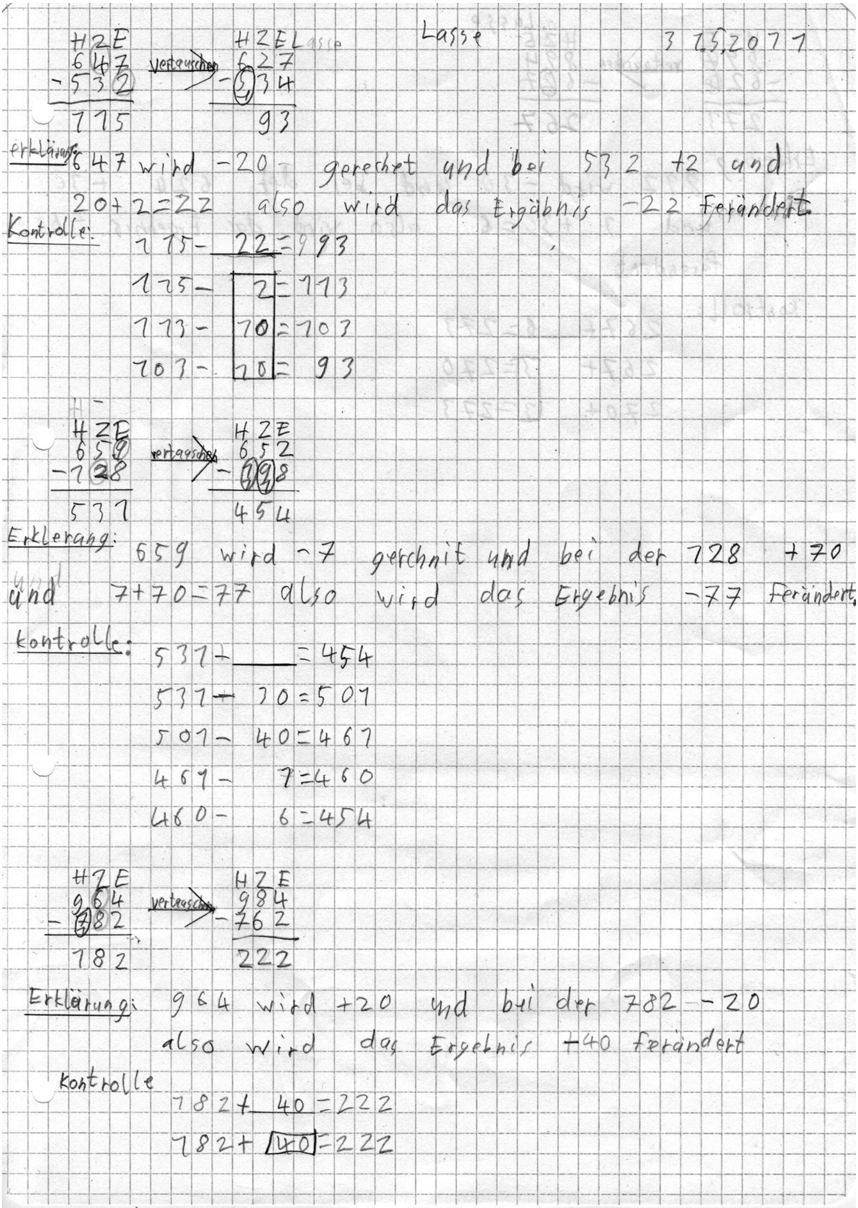
Vereinfachen
988 - 246 = 742
+12 +12
1000 - 258 = 742

Vereinfachen
496 - 246 = 250
+4 +4
500 - 250 = 250

Schrittweise
742 - 246 = 496
742 - 200 = 542
542 - 40 = 502
502 - 6 = 496

Ergänzen +
250 - 246 = 4
246 + 4 = 250

Abbildung 4.54: Niklas_V, Stunde 07-1, Arbeitsphase



Lasse 3 15.2011

H	Z	E
6	4	7
- 5	3	2
1	1	5

vertauschen →

H	Z	E
6	2	7
- 5	3	4
	9	3

Erklärung: 647 wird -20 gerechet und bei 532 +2 und 20+2=22 also wird das Ergäbnis -22 ferändert.

Kontrolle:
115 - 22 = 93
115 - 2 = 113
113 - 10 = 103
103 - 10 = 93

H	Z	E
6	5	9
- 1	2	8
5	3	1

vertauschen →

H	Z	E
6	5	2
- 1	9	8
4	5	4

Erklerung: 659 wird -7 gerchnit und bei der 128 +70 und 7+70=77 also wird das Ergebnis -77 ferändert.

kontrolle:
531 - ____ = 454
531 - 30 = 501
501 - 40 = 461
461 - 1 = 460
460 - 6 = 454

H	Z	E
9	6	4
- 1	8	2
7	8	2

vertauschen →

H	Z	E
9	8	4
- 7	6	2
2	2	2

Erklärung: 964 wird +20 und bei der 782 -20 also wird das Ergebnis +40 ferändert

kontrolle
782 + 40 = 222
782 + $\boxed{40}$ = 222

Abbildung 4.55: Lasse, Stunde 09-4, Arbeitsphase

Niklas_V (Abbildung 4.54, 224) wechselt bei der Aufgabe 250-246 in die Grundvorstellung Komplementbildung (unten), während er die Aufgabe 180-126 (oben) noch W-Schrittweise rechnet. Vier Aufgaben löst er über das W-Vereinfachen, allerdings mit vereinfachtem Minuenden.

Als weiteres Beispiel mag das Dokument von Lasse (Abbildung 4.55, S. 225) dienen. Hier (Stunde 09-4) geht es eigentlich um das Üben der schriftlichen Subtraktion mit Hilfe eines substanziellen Aufgabenformates („Ziffern vertauschen“, vgl. Kap. 3.3), aber Lasse kontrolliert hier seine Hypothesen über die Ergebnisvariation mit Hilfe halbschriftlicher Rechnungen, die in der Grundvorstellung Komplementbildung erfolgen, und Aufgaben mit kleinen Differenzen enthalten.

Deutung der Beispiele mit Wechsel zur Komplementbildung

Es finden sich also auch Beispiele im Unterricht der Studie, in denen sich die Kinder vermutlich durch eine kleine Differenz in die Grundvorstellung Komplementbildung lenken lassen. In den zwei oben genannten Beispielen von Jonas und Niklas könnte es zumindest die „kleinste Differenz“ sein: Sowohl die Aufgabe 298-293 bei Jonas als auch die Aufgabe 250-246 entsprechen diesem Muster, beide wechseln hier in die Grundvorstellung Komplementbildung. Schon die nicht mehr kleinste, aber immer kleine Differenz von 180-126 löst Niklas dann aber schrittweise. Eine kleine Unsicherheit bleibt hier bei der Interpretation seiner vier vereinfachten und dann internalisiert gerechneten Aufgaben (er notiert die weiteren Schritte nicht), denn hier ist die Variante „glatter Minuend“ gewählt, die sich auch gut komplementbildend im Kopf rechnen lässt, wie bei den Beispielen zum K-Vereinfachen in Kap. 4.2.5 dargestellt wurde (vgl. Abbildung 4.36, S. 179).

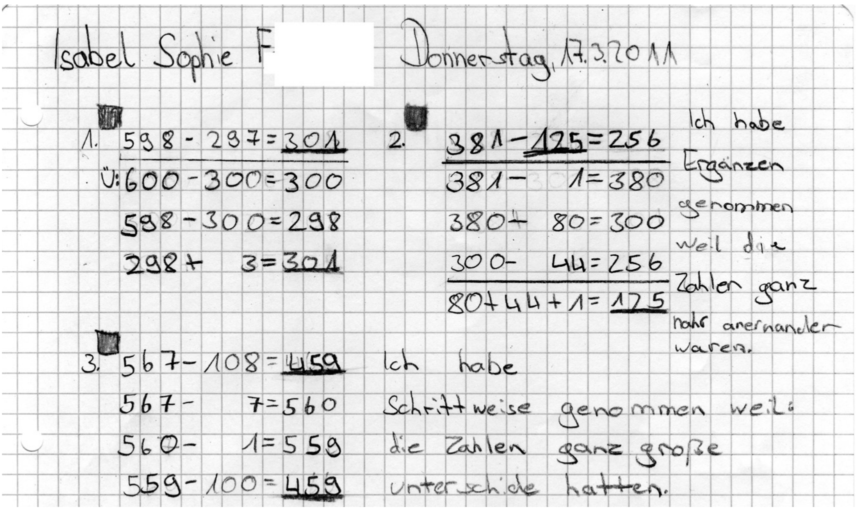
Lasses Beispiel ist deswegen interessant, da es in diesen Stunden gar nicht um strategisches Rechnen geht, sondern um das Üben der schriftlichen Subtraktion, und somit andere mögliche Auslösefaktoren für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung ausscheiden dürften. Denn seine Rechnungen entstehen weit entfernt von Anregungen durch Vorstellungen komplementbildender halbschriftlicher Rechenwege, seine Rechnungen sind durch keinen Kontext motiviert, und vermutlich hat Lasse auch keine besondere Vorliebe für das Komplementbildende Rechnen (vgl. Kap. 4.4.4), so dass es naheliegt, dass hier die Zahlenwerte der Aufgabe ausschlaggebend für die Grundvorstellungswahl sind.

Es gäbe noch weitere Beispiele in den in dieser Arbeit abgedruckten Dokumenten, in denen die Kinder komplementbildend rechnen, und die Aufgaben eine kleine (z.B. Abbildung 4.20, S. 150, links) oder erweiterte kleine Differenz (z.B. Abbildung 4.3, S. 117) haben – allerdings besteht bei diesen Abbildungen das Problem, dass auch andere der genannten Auslöser im Unterricht gerade thematisiert werden, und damit „Zahlenwerte“ nur eine mehrerer Möglichkeiten darstellt.

Beispiele mit Hinweisen auf Elemente der kleinen Differenz

An einigen Stellen geben die Kinder auch auf dem Dokument selbst Hinweise, die Nähe der Zahlen zueinander habe sie veranlasst, „Ergänzen“ zu wählen. Gleich zweimal gibt Isabel_F (Abbildung 4.56, unten, und Abbildung 4.57, S 228) Hinweise, welche Strategie zu welchen Aufgabenwerten passt, in dem sie einordnet, ob Zahlenwerte nah beieinander oder weiter auseinander liegen.

Die aus dem Posttest stammenden Dokumente von Lasse (Abbildung 4.53, S. 222) und Isabel_F (Abbildung 4.52, S. 222) wurden bereits weiter oben als Beispiele für Rechnungen mit kleinen (bzw. erweiterte kleinen) Differenzen dargestellt, die nicht den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung auslösen, sondern die mit W-Vereinfachen gelöst werden. Beide rechnen dort aber auch eine (die jeweils rechte) der Aufgaben komplementbildend, und geben darunter einen Hinweis, dass die Zahlenwerte bei der Grundvorstellungswahl ausschlaggebend sein könnten.



Isabel Sophie F Donnerstag, 17.3.2011

1. 598 - 297 = 301
Ü: 600 - 300 = 300
598 - 300 = 298
298 + 3 = 301

2. 381 - 125 = 256
381 - 1 = 380
380 - 80 = 300
300 - 44 = 256
80 + 44 + 1 = 125

Ich habe Ergänzen genommen weil die Zahlen ganz nahr anernander waren.

3. 567 - 108 = 459
567 - 7 = 560
560 - 1 = 559
559 - 100 = 459

Ich habe Schrittweise genommen weil die Zahlen ganz große unterschide hatten.

Abbildung 4.56: Isabel_F, Stunde 02-3, Arbeitsphase, Ausschnitt

Isabel Sophie F

Mittwoch, 23.3.2011

1. 876 − 532 = 344 ← Ü: 870 − 530 = 340

800 − 500 = 300

70 − 30 = 40

6 − 2 = 4

300 + 40 + 4 = 344 ✓

Ich hab mir Stellweise ausgedacht weil: Die Zahlen bei den Aufgaben so weit auseinander sind.

2. 957 − 635 = 322 ✓ ← Ü: 960 − 640 = 320

1000 − 635 = 365

365 − 43 = 322 ✓

Ich habe Hilsaufgabe genommen weil: Die 900 so nahr an der 1000 ligt aber dann muss ich darauf eingehen das ich dann mit ganz hohen Zahlen rechnen muss.

3. 722 − 267 = 455 ← Ü: 720 − 270 = 450

+8

730 − 275 = 455 ✓

Ich habe Vereinfachen genommen weil wenn ich die acht dazu tue sind bede Zahlen aus der 5er-reihe.

4. 859 − 122 = 981 ✓

859 + 1 = 860

860 + 40 = 900 ← Ü: 980 − 860 = 120

900 + 81 = 981

1 + 40 + 81 = 122 ✓

Ich habe Ergänzen + genommen weil: Die Zahlen so weit anernander waren und da brauchte ich nur 3 Schritte machen.

Du hast die Wahl deiner Rechenstrategie gut begründet!

Abbildung 4.57: Isabel_F, Stunde 03-1, Arbeitsphase

Deutung der Beispiele mit Hinweisen

Isabel_F äußert sich in Abbildung 4.56 (S. 227) und Abbildung 4.57 (S 228) differenziert zur Wirkung der Zahlenwerte auf die Strategiewahl: Sind die Zahlen „weit auseinander“ (876-532) oder haben diese „große Unterschiede“ (567-108), wird W-Schrittweise oder W-Stellenweise gewählt, sind sie „nah beieinander“ (381-256 und 981-859), wählt sie das Ergänzen und die Grundvorstellung Komplementbildung. Beide Aufgaben, die Isabel als „nah beieinander“ bezeichnet, würden aber nicht in die enge Definition der kleinen Differenz passen, da der Subtrahend nicht nah am Hunderter ist. „Nähe“ und „Weite“ könnten also auch sehr subjektiv empfundene Begriffe sein. Anzumerken bleibt, dass sie die Aufgabe 722-267, die man der erweiterten kleinen Differenz zuordnen könnte, mit W-Vereinfachend löst.

Lasse bezieht sich bei der rechten Aufgabe in Abbildung 4.53 (S. 222) mit „die Zahlen waren schön aneinander da dachte ich Ergänzen(+)“ passend auf eine Aufgabe mit einer kleinen Differenz, während Isabel_F (Abbildung 4.52, S. 222, rechts) mit „ich habe Ergänzen + genommen weil: bis zur 400 ist einfach und dann noch bis zur 518 und das zusammen ist das Ergebnis“ auf den Aspekt der „Hunderternähe“ des Subtrahenden hinweist, obwohl diese „Nähe“ hier subjektiv ausgelegt zu sein scheint, denn die Aufgabe würde nicht in die enge Definition der kleinen Differenz passen.

Gerade dieser Aspekt der Hunderternähe des Subtrahenden der kleinen Differenz, mit dem sich gut komplementbildend rechnen lässt, tritt in den genannten Dokumenten als Argument zur Wahl der Grundvorstellung auf, aber eben diese Hunderternähe führt später auch häufig zum W-Vereinfachen, wie bereits oben beschrieben wurde.

Überlegungen zu Zahlenwerten bei anderen Varianten des K-Rechnens

Alle Ausführungen über den Einfluss der kleinen Differenzen gelten aber möglicherweise nur, wenn man komplementbildendes Rechnen, so wie es in den bis hier diskutierten Dokumenten auch vorliegt, als schrittweises Rechnen auffasst.

Wie in Kap. 4.2 deutlich wurde, sind aber auch andere Strategievarianten als schrittweises Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung zu beobachten, z.B. K-Vereinfachen oder K-Stellenweise.

Bei der Aufgabe 609-398 (Abbildung 4.36, S. 179) vereinfacht Isabel_Sch nicht zur 400, sondern zur 600, vermutet, weil man zum glatten Minuenden gut auffüllen kann (wie bereits in Kap. 4.2.5 dargestellt). Während beim schrittweisen Komplementbilden in den vorangegangenen Beispielen die Nähe des Subtrahenden zum Hunderter eine Rolle spielen könnte, so könnte hier für das K-Vereinfachen angenommen werden, dass dagegen der Minuend eine gewisse Nähe zum Hunderter haben sollte, damit zum glatten Minuend vereinfacht und anschließend günstig das Komplement bestimmt werden kann.

Bei stellenweiser Komplementbildung würden vermutlich andere Kriterien gelten, in den in Kap. 4.2.3 vorgestellten Dokumenten ist keine kleine Differenz erkennbar. Dagegen ist zumindest in den vorgestellten Dokumenten bedeutsam, dass keine Überträge stattfinden, und somit gut stellenweise das Komplement gebildet werden kann.

In Kap. 4.3 wurde dargestellt, dass komplementbildendes Rechnen in der Variante „Ergänzen stellengerecht" einen quasi-algorithmischen Charakter haben könnte und möglicherweise dann gewählt wird, wenn auch schriftliches Rechnen nahe liegen würde, also vor allem bei Zahlenwerten, die eben keine der anderen möglichen Strategien beider Grundvorstellungen anregen könnten.

Darstellung einer Interaktion über günstige Zahlenwerte beim Ergänzen

Ein einziges Mal (Stunde 03-2, hier geht es um das Anwenden der erlernten Strategien, also die bewusstere Auswahl) wird im Unterricht über günstige Zahlenkonstellationen bei der Strategiewahl gesprochen, darunter auch über das „Ergänzen", als es um die Frage geht, ob man alle Aufgaben mit jeder Strategie rechnen kann (Transkript 21, S. 279).

Am Beispiel der 2. Aufgabe aus der Stunde 03-1 (957-635, vgl. Abbildung 4.57, S. 228), merkt die Lehrerin an, es hätten Kinder „bei der 2. Aufgabe geschrieben, die Strategie Ergänzen geht nicht" (Z. 008). Zunächst wird allgemein über die Passung von Aufgabe und Strategie gesprochen, Ben etwa merkt an, „es gehen alle Rechenwege mit jeder Aufgabe, nur, ähm, manche sind halt geeigneter dafür, und manche halt nicht" (Z. 015), dann aber argumentiert Prisicilla mit Zahlenwerten: „also zum Beispiel, die erste Aufgabe, bei Vereinfachen, das wäre ein bisschen schwer, weil man da nicht zu nem direkten Hunderter kommt" (Z. 021). Die Lehrerin fokussiert auf „geschicktes" Rechnen im Sinne von „möglichst wenig rechnen" (Z. 024) , aber Yannick bring als Beispiel: „Das geht, 957-335, weil, das habe ich gemacht, Plusergänzen, das geht" (Z. 027).

Deutung der Interaktion zu Zahlenwerten

Yannicks Beispiel, 957-335, ist keine Aufgabe mit einer kleinen Differenz, und somit vermutlich für ein „Ergänzen" zu glatten Zwischenzahlen nicht besonders günstig, dagegen – so hat er die Aufgabe gelöst – sehr wohl mit der Idee des Stelle Herstellens. Dagegen bringt Priscilla mit „weil man da nicht zu nem direkten Hunderter kommt" die bereits weiter oben mehrfach angesprochene Hunderternähe in die Diskussion ein, hier allerdings – und auch dieser Aspekt wurde bereits weiter oben dargelegt – als Argument für die Wahl des W-Vereinfachens.

Die Lehrerin möchte vermutlich vor allem thematisieren, dass zwar alle Aufgaben „gehen", aber nicht alle Strategien bei verschiedenen Zahlenkonstellationen günstig sind. „Gehen" (Kreativität, Flexibilität) und „günstig" (bewusste Adaptivität) sind im Sinne der sich hier vermutlich gerade entwickelnden adaptiven Expertise zwei verschiedene Dinge (vgl. Kap. 2.2.1), was aber „günstig“ im Falle des „Ergänzens“ ist, bleibt weiterhin unausgesprochen.

An keiner Stelle der Unterrichtsdokumentation konnte eine Interaktion identifiziert werden, in der die kleine Differenz oder zumindest Aspekte dieser explizit thematisiert wurde. Die Anregung erfolgt eher implizit: In der Stunde 02-2, in der „Ergänzen“ als Strategiekategorie für komplementbildendes schrittweises Rechnen angeregt werden soll (vgl. Kap. 4.2.2), wählt die Lehrerin als fiktive, explizierende Rechenwege zwei Rechenwege jeweils im Additions- und Subtraktionsformat mit „kleinster Differenz“ an der Tafel, die sie durch zwei real existierende, ebenfalls explizierende Rechenwege ergänzt, deren Zahlenwerte einer erweiterten kleinen Differenz entsprechen würden, ohne diese jedoch weiter zu thematisieren.

4.4.3 Anregungen

Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels erwähnt, spielen Anregungen von Anfang an eine Rolle als mögliche Auslöser für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung, erkennbar etwa daran, dass die Kinder nicht nur einen Kommentar zum Kontext angeben, sondern auch den Namen eines Kindes, dessen Rechenweg vorgestellt wurde, auf den sie sich beziehen – sie sind also nicht trennscharf von den anderen möglichen Auslösern zu diskriminieren.

Die Ambivalenz in der Rolle der Anregungen als Auslöser wird dabei an einem Beispiel deutlich: Zu Stundenbeginn der Stunde 01-2 stellt die Lehrerin sowohl eine erste K-Rechnung von Eric, als auch einen K-Kontext („…293 sind schon da…“) vor, mit Zahlenwerten, die ebenfalls K-Rechnen begünstigen könnten. Jule (Abbildung 4.19, S. 147) wechselt in eben dieser Stunde aus vermutlich mindestens einem der genannten Gründe in die Grundvorstellung Komplementbildung, „erfindet“ dabei das Subtraktionsformat (vgl. Kap. 4.2.1) ohne Anregung, und bezieht sich im Kommentar unter der Aufgabe mit „Ich habe diesmal Kathas weg genommen weil den habe ich gut verstanden“ auf den zu Stundebeginn von Katharina vorgestellten Rechenweg – dieser ist allerdings eine Rechnung in W-Schrittweise.

Jule lässt sich also möglicherweise anregen, vermutlich einzelne Aspekte aus Erics Beispiel, deutlicher aber aus „Kathas Weg“, hier vermutlich das schrittweise Vorgehen, wenn auch in einer anderen Grundvorstellung, in das eigene Vorgehen zu integrieren. Anregungen können also auch nur in Teilaspekten wirksam sein, möglicherweise in anderen, als den von der Lehrerin bei der Auswahl intendierten.

Im Unterricht der Studie, der aufgebaut nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung (vgl. Kap. 3.2.2) naturgemäß viele Anregungen und

Favorisierungen durch die Lehrerin enthält, lassen sich drei Typen von Anregungen als mögliche Auslöser für komplementbildendes Rechnen festmachen:

- Erstens explizite Aufforderungen an alle Kinder, komplementbildend zu rechnen (z.B. in Form von „Ergänzen“ als „Pflichtaufgabe“),
- zweitens implizite Anregungen des K-Rechnens durch Vorstellungen und Reflektionen von ausgewählten (und damit erkenntlich favorisierten, somit appelativen) K-Rechenwegen in Eingangs- und Reflexionsphasen des Unterrichts ebenfalls für alle , und
- drittens explizite oder implizite persönliche Aufforderungen einzelner Kinder zum Komplementbilden in Klein-Interaktionen seitens der Lehrerin.

Beispiele für explizite Anregungen an alle Kinder

Zur ersten Form der Anregungen – explizite Aufforderungen an alle Kinder – sei hier daran erinnert, dass in einigen Stunden keine offene Strategiewahl besteht, sondern die Lehrerin, zumindest für einen Teil der Aufgaben, das Komplementbilden erbittet.

Beispielsweise gibt sie den Arbeitsauftrag zu Beginn der Stunde 01-4, mindestens eine K-Rechnung zu versuchen, „entweder den Weg von Prisci zu nehmen, die Plus-Ergänzungsaufgabe, oder den Weg von Robin, die Minus-Ergänzungsaufgabe“ (Transkript nicht abgedruckt), bevor weitere Aufgaben mit freier Strategiewahl gerechnet werden dürfen.

Weiterhin wird etwa in der Stunde 02-2 „Ergänzen“ als Strategiekategorie thematisiert (vgl. Kap. 4.2.2). In dieser Stunde sollen alle Kinder zwei vorgegebene Pflichtaufgaben entweder mit „Ergänzen(+)“ oder „Ergänzen(-)“ rechnen, bevor weitere Aufgaben mit freier Strategiewahl aus dem Aufgabenpool gerechnet werden dürfen.

Als letztes Beispiel sei die Stunde 08-3 erwähnt, in der die Lehrerin die Kinder bittet, zunächst eine halbschriftliche Rechnung in „Ergänzen stellengerecht“ auszuführen, dann dazu parallel eine schriftliche Subtraktion (vgl. Abbildung 4.47, S. 205, und den Ausführungen dazu in Kap. 4.3.2).

Deutung der Beispiele für explizite Anregungen aller Kinder

In diesen drei Beispielstunden (eine vollständige Liste der Stunden mit erbetener Strategiewahl findet sich im Anhang) rechnen dann auch alle Kinder mindestens eine Aufgabe in der Grundvorstellung Komplementbildung (vgl. Abbildung 4.2, S. 112). Trotzdem – obwohl dies stark plausibel ist – muss diese explizite Anregung durch die Lehrerin nicht allein Auslöser für die Grundvorstellungswahl sein, als Gegenbeispiel sei hier an die Episode aus Stunde 02-3 erinnert, in der eigentlich erbeten ist, in der Grundvorstellung Wegnehmen das Vereinfachen zu probieren, Robin dieses aber zunächst in der Grundvorstellung

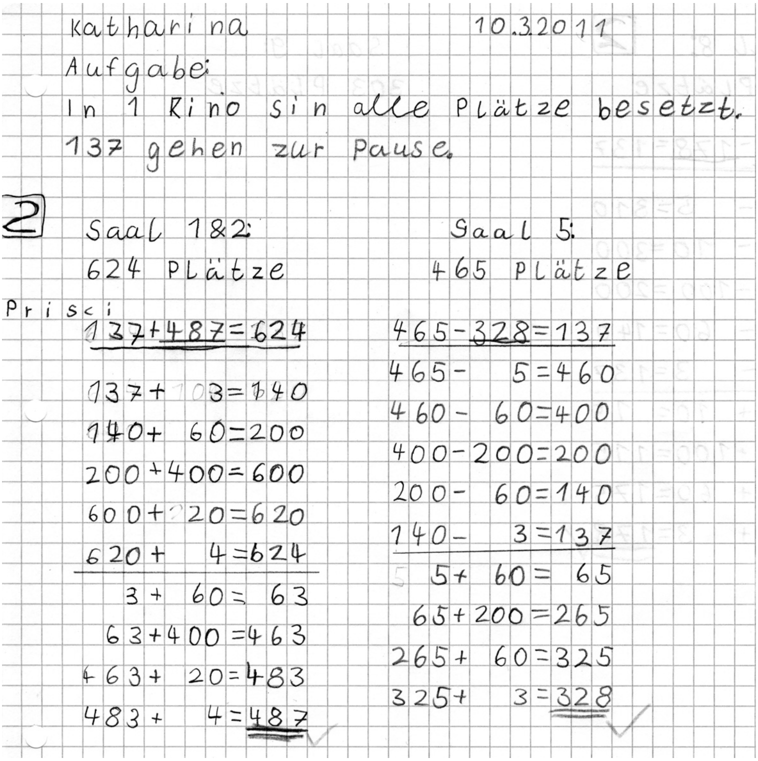


Abbildung 4.58: Katharina, Stunde 01-4, Arbeitsphase

Komplementbildung versucht (vgl. Transkript 15, S. 272), bei ihm also eine andere Anregung aktiver als die explizite Aufforderung durch die Lehrerin gewesen sein muss.

Beispiele für implizite Anregungen an alle Kinder

Als zweite, implizite (und damit schwächere) Form der Anregung als möglicher Auslöser zum Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung wurden bereits Vorstellungen und Reflektionen von ausgewählten K-Rechenwegen genannt, diese Anregungen sind in den vorangegangenen Kapiteln multipel beschrieben und bereits an Jules Dokument (s.o.) angesprochen worden. Hier referenzieren die Kinder auf den Dokumenten mitunter, sich auf solche vorgestellten Rechenwege zu beziehen:

Niklas_V (Abbildung 4.21, S. 151) rechnet zunächst selbst K-Schrittweise im Subtraktionsformat, kennzeichnet dann die folgende Rechnung, die K-

Schrittweise im Additionsformat darstellt, mit „Eric“, und die folgende, dritte Rechnung in W- Vereinfachen mit „Priscilla“

Benedikt (Abbildung 4.43, S. 197) referenziert mit „Ich habe wie Lasse ergänzt“ auf den ebenfalls zu Stundenbeginn der Stunde 01-2 vorgestellten Rechenweg in K-Schrittweise im Additionsformat von Lasse,

Katharina bezieht sich in der Stunde 01-4 (Abbildung 4.58, S. 233) auf die zum Ende der Stunde 01-3 vorgestellten Rechenwege von Priscilla und Robin (vgl. Abbildung 4.20, S. 150), an den dort zum einen die Formatwahl kultiviert wurde, zum anderen aber, vor allem an Robins Dokument, die Idee des Stelle Herstellens. Katharina hat gerade den mit „Prisci“ gekennzeichneten Weg in K-Schrittweise im Additionsformat fertig gestellt, als sie gegenüber der Lehrerin äußert, nun „Robins Trick“ (Transkript 22, S. 280, Z. 003) probieren zu wollen. Die Lehrerin fragt genau nach: „Jetzt möchte ich mal was erzählt bekommen. Du willst jetzt Robins Weg nehmen“ (Z. 008). Katharina wählt einen komplementbildenden Ansatz im Subtraktionsformat: „Und da muss ich dann rechnen, weil es ja 465 Plätze sind, muss ich rechnen: 465 minus wie viel ist 137“ (Z. 013). Die Lehrerin bestätigt ihr implizit, dass dies „Robins Weg“ (Z. 014) sei. Katharina beginnt nun schrittweise im Subtraktionsformat zu rechnen (Z. 015-023), bis die Lehrerin feststellt: „Der Robin hatte ja glaube ich den Trick, dass der versucht, den Hunderter zu kriegen, und dann den Zehner und den Einer, von dem Ergebnis. Und du hast jetzt immer zu glatten Hunderterzahlen gerechnet, das geht auch. Das geht auch“ (Z. 024). Katharina ist von diesem Einwurf der Lehrerin irritiert (Z. 025), aber die Lehrerin bestätigt sie, weiter ihrer Idee zu folgen, den „Trick von Robin“ für sich „umgeändert“ zu haben (Z. 026). Anschließend bringt Katharina dann ihren schrittweisen Weg (ohne die Idee des Stelle Herstellens) mit Hilfe der Lehrerin zu Ende (Z. 027-049).

Deutung der Beispiele für implizite Anregungen aller Kinder

Niklas_V (s.o.) kennzeichnet seinen zweiten und dritten Rechenweg mit „Eric“ und „Priscilla“ – tatsächlich haben beide Kinder zu Beginn der Stunde einen Rechenweg aus dieser Strategiekategorie vorgestellt: Eric (Abbildung 4.18, S. 145) in der gleichen Subform „zu glatten Zwischenzahlen gehen“ mit einem Rechenstrich, der in Niklas‘ zweiter, mit Eric gekennzeichneter Rechnung fehlt, aber in der ersten Rechnung auftritt; Priscilla eine W-Vereinfachung, aber ohne die schrittweise Nebenrechnung, die in Niklas‘ drittem Weg auftritt.

Benedikt (s.o.) bezieht sich auf einen Rechenweg von Lasse, der dort zusätzlich zur halbschriftlichen Rechnung seine Rechnung am Rechenstrich dargestellt hatte, während Benedikt hier „nur“ am Rechenstrich rechnet. Auch übernimmt er zwar von Lasse das schrittweise Auffüllen im Additionsformat, aber die bei Lasse zu findenden „glatten Zwischenzahlen“ nur im ersten Schritt, denn er baut anschließend die Idee des Stelle Herstellens ein (vgl. Kap. 4.3.2).

Schon an diesen Beispielen ist erkennbar, dass die Kinder vermutlich nur Teilaspekte der Anregungen, die sie durch den Kommentar referenzieren, aufnehmen und in ihr eigenes System integrieren, als Auslöser für die Wahl des komplementbildenden Rechnens damit aber weiterhin auch die anderen genannten Faktoren zusätzlich in Betracht kommen.

Besonders deutlich wird dies an der Interaktion der Lehrerin mit Katharina. Aus „Robins Trick" nehmen Katharina und die Lehrerin unterschiedliche Aspekte auf: Katharina sieht vermutlich vor allem den Wechsel in das Subtraktionsformat (Z. 013), die Lehrerin aber vor allem die Idee des Stelle Herstellens (Z. 024) – diese Anregung nimmt Katharina nicht auf, möglicherweise, weil diese Idee noch außerhalb ihrer „Zone der nächsten Entwicklung" (vgl. Kap. 3.2.2) liegt, und sie zunächst das Subtraktionsformat generell adaptieren muss (Katharina gehört zu den eher langsamer Mathematik lernenden Kindern), bevor sie dort weiteren Ideen, wie der des Stelle Herstellens, folgen kann.

Hier wird also insgesamt an den vorgestellten Beispielen deutlich, dass die Kinder vermutlich nur Teile der Anregungen aus den vorgestellten Dokumenten auffassen und umzusetzen scheinen.

Beispiel für eine Anregungen an ein einzelnes Kind

Als dritte und letzte Variante der Anregungen als Auslöser zur Wahl der Grundvorstellung wurden explizite oder implizite persönliche Aufforderungen durch die Lehrerin genannt, eine beider Grundvorstellungen zu wählen. Für die Grundvorstellung Komplementbildung gibt es dabei ein Beispiel in den in dieser Arbeit abgedruckten Interaktionen:

In der Stunde 07-2 (Block „Strategien wiederholen") wendet sich Priscilla an die Lehrerin: „Ich weiß nicht, was ich da für eine Rechenstrategie nehmen soll. Weil Stellenweise und Schrittweise habe ich jetzt schon so oft genommen" (Transkript 13, S. 270, Z. 001). Die Lehrerin antwortet mit „Vielleicht machst du doch mal deinen Trick von vor den Ferien, ähm, Plusergänzen, und […]" (Z. 002), wobei dieses „Plusergänzen" dort aber schrittweises Rechnen war. Priscilla löst die Aufgabe dann in stellenweiser Komplementbildung (vgl. Kap. 4.2.3).

Deutung des Beispiels für eine Anregungen an ein einzelnes Kind

Die Lehrerin fordert Priscilla hier explizit auf („Vielleicht machst […] Plusergänzen"), in die Grundvorstellung Komplementbildung zu wechseln, und dort das Additionsformat zu wählen, und implizit auch damit, schrittweise vorzugehen, denn komplementbildendes Rechen ist zu diesem Zeitpunkt bereits stark als schrittweises Rechnen kultiviert. Priscilla nimmt diese Aufforderung zwar an, aber nur in dem Teilaspekt, komplementbildend zu rechnen, tut dies aber dann in K-Stellenweise. Sie lässt sich also vermutlich nur zum Wechsel in die Grundvorstellung anregen, nicht aber zur Strategie Schrittweise.

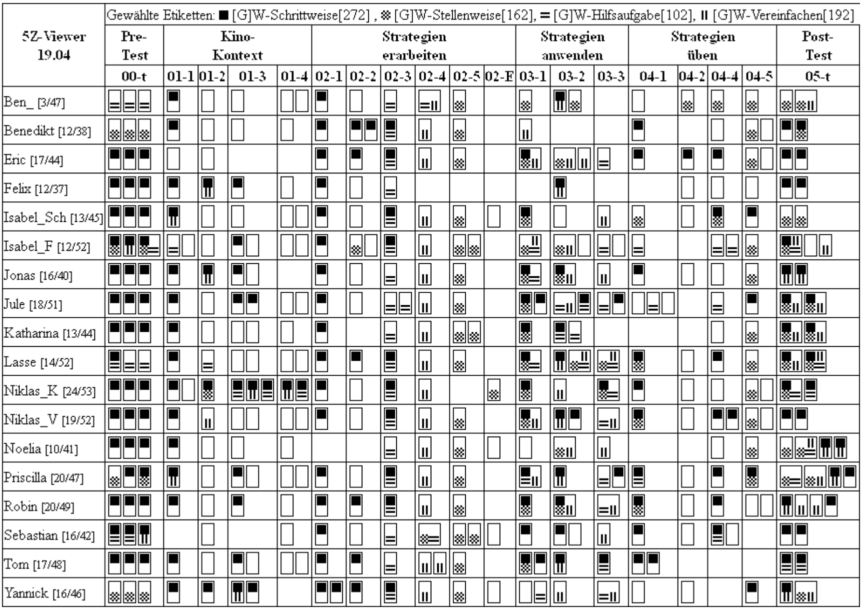


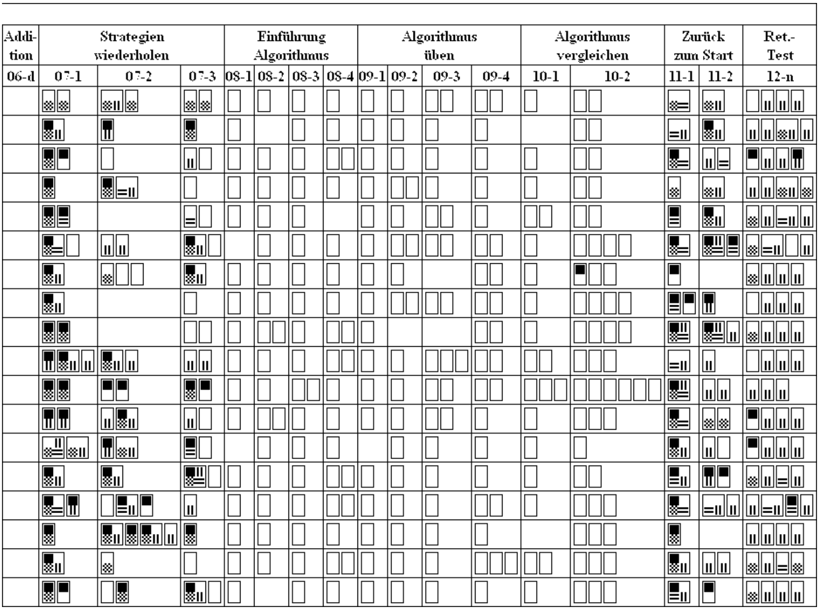
Abbildung 4.59 (beide Seiten, oben): Verteilung der W-Dokumente auf die vier Strategiekategorien

4.4.4 Vorlieben

Als vierter und letzter möglicher Auslöser für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung wurden persönliche Vorlieben genannt, die von besonderer Problematik sind, da sie zum einen nur vage definiert sind, Selter (2000, S. 250, vgl. auch Kap. 2.2.3) beschreibt sie als „recht stabiles Entscheidungsmuster“, bei dem Schüler „in der Regel sämtliche Aufgaben gemäß einer der Hauptstrategien“ rechnen, ohne das die Begriffe „recht stabil“ und „in der Regel“ näher quantifiziert würden.

Vorlieben in Verteilungsdarstellungen

In Abbildung 4.25 (S. 158) ist die Verteilung der Dokumente auf die vier Strategiekategorien innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung in allen Stunden dargestellt, in Abbildung 4.59 (oben) wird diese Verteilung in der Grundvorstellung Wegnehmen dargestellt. Um „stabiles Entscheidungsmuster“ für das komplementbildende Rechnen bei einzelnen Kindern identifizieren zu können, müsste man diese Abbildungen zeilenweise betrachten und parallel



sehen: Selbst wenn in der Verteilung der K-Strategien scheinbar eine Reihung mehrerer K-Dokumente hintereinander vorliegt, die eine Art Vorliebe darstellen könnten, erschließt sich aus der Verteilung der W-Strategien, dass zu dieser Zeit ebenfalls andere Strategien des Wegnehmenden Rechnens dazwischen streuen.

Parallel betrachtet ist kein Kind identifizierbar, bei dem eine stabile Wiederkehr der immer gleichen Strategiekategorie erkennbar wäre, es deutet sich hier eher die Vielfalt des Strategiegebrauchs an.

Allerdings besteht nicht in allen Stunden freie Strategiewahl, in einigen Stunden erbittet die Lehrerin den Gebrauch bestimmter Strategien. Oft bezieht sich diese Bitte aber nur auf die so genannten „Pflichtaufgaben" – in den dann folgenden „Küraufgaben" mit freier Strategiewahl hätten die Kinder auch in diesen Stunden die Chance, ihrer Vorliebe nachzugehen.

Um der Frage nach Vorlieben für K-Strategien nur in den Stunden mit offener Strategiewahl nachzugehen, wurde Abbildung 4.60 (S. 238) erstellt. Hier ist dargestellt, ob ein Dokument mindestens eine K-Strategie, eine in W-Stellenweise, W-Schrittweise, oder W-Variieren enthält (da die Software nur 4 Etiketten gleichzeitig darstellen kann, wurde W-Hilfsaufgabe und W-Vereinfachen zusammengefasst). Selbst bei Kindern, die häufig komplementbildend rechnen, wie Isabel_F oder Lasse, lässt sich hier keine Präferenz für dieses Rechnen feststellen, da es auch in Stunden mit freier Strategiewahl

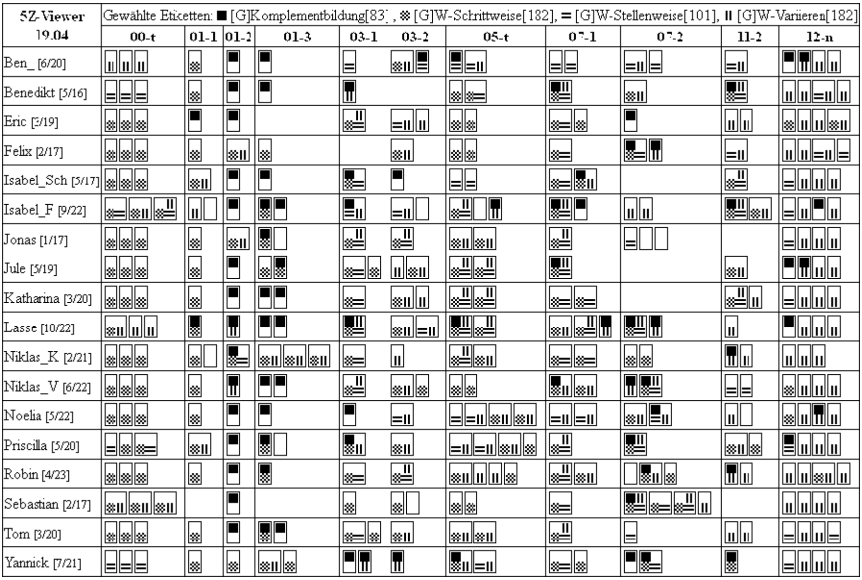


Abbildung 4.60: Verteilung der Dokumente auf Komplementbilden, W-Schrittweise, W-Stellenweise, W-Variieren, eingeschränkt auf Stunden mit freier Strategiewahl Variante 2, vgl. Kap. 3.4.2 und die Auflistung im Anhang

immer wieder mit der Nutzung anderer Strategien variiert. Umgekehrt findet sich auch bei Kindern, die selten komplementbildend rechnen, keine Präferenz für eine Lieblingsstrategie im W-Rechnen, die bei diesen Kindern in Stunden mit offener Strategiewahl das K-Rechnen verdrängen könnte.

Diese Befunde an den genannten Verteilungen zeigen sich auch in den drei Lernstandserhebungen (vgl. Tabelle A.1, S. 262). Auch hier kann kein Kind identifiziert werden, das durchwegs in einer Hauptstrategie rechnet, es streuen immer anderen Strategievarianten ein.

4.4.5 Zusammenfassung

In Kapitel 4.3 wurden Befunde und deren Deutung zu folgendem Forschungsinteresse vorgestellt:

FI4: Welche Rolle spielen mögliche Auslöser der Komplementbildung, wie ...

1. *Aufgaben mit Kontexten, die einen Grundvorstellungswechsel anregen können,*
2. *Aufgaben mit einer kleinen Differenz,*
3. *Anregungen durch Reflexionen über das Vorgehen anderer Kinder, und*

4. *individuelle Vorlieben für bestimmte Varianten komplementbildenden Rechnens?*

In den vorangegangenen Teilkapiteln wurde dazu einzeln die Rolle möglicher Auslöser für die Wahl oder den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung evaluiert. Die Beispiele und Deutungen sind dabei allerdings grundsätzlich mit Vorsicht zu betrachten, da – wie an vielen Beispielen dargelegt – im realen Unterricht des Öfteren mehrere der Auslöser gleichzeitig aktiv sein könnten, und selten Aufschlüsse aus Dokumenten oder Interaktionen möglich sind, was genau die Kinder für die Wahl einer Rechenstrategie oder einer Grundvorstellung veranlasst haben könnte.

Kontexte

Abschließend lässt sich zur Rolle des Kontextes hier festhalten, dass Komplementbildung intendierende Kontexte wohl als Initiator in der explorativen Phase des Unterrichts eine Rolle für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung spielen könnten, es aber schwierig ist, diesen Einfluss nachzuweisen, da auch die anderen Auslöser für Grundvorstellungswechsel mehr und mehr an Bedeutung gewinnen, und im Unterricht diese Faktoren nicht voneinander getrennt betrachtet und auf Wirksamkeit untersucht werden können.

Der Kontext verliert schon in der explorativen Phase mehr und mehr an Bedeutung, da die Passung des Kontextes zu den Grundvorstellungen im Unterricht nicht reflektiert wird, und der Bedeutung der Ergebnisse im Sinne des Kontextes keine Beachtung geschenkt wird. Dies wird deutlich in Transkript 6 (S. 266) aus der Reflexionsphase am Ende der Stunde 01-3, in der an zwei Aufgaben in der Grundvorstellung Komplementbildung die Formatwahl thematisiert werden soll. Zu Beginn bringt Tom mit „Also, die hat, 293 plus wie viel Leute dann noch in dem Kinosaal sitzen können“ (Z. 002) und „Also, die wollte wissen, wie viele Leute noch ins Kino reinpassen“ (Z. 004) den Kontext ins Spiel, die Lehrerin aber fokussiert mit ihren Äußerungen rein auf die rechnerische Ebene („Rechenweg“, Z. 003; „Aufgabentyp“, Z. 006), und signalisiert damit implizit, dem Kontext nicht zu viel Beachtung zu schenken, sofern man daraus die richtige Aufgabe ableiten kann.

Am Ende des Unterrichtsversuchs, als in Block 11 erneut Kontexte benutzt werden, um Aufgaben zu bilden, bei denen die Kinder aktiv im Sinne adaptiver Expertise sich für Rechenarten, Grundvorstellungen und Strategien entscheiden sollen, findet der Kontext bei den Kindern keine Beachtung mehr.

Zahlenwerte

Zusammenfassend lässt sich für Zahlenwerte, speziell für die sogenannte kleine Differenz in dieser Studie festhalten: Die kleine Differenz (einige Kinder scheinen auch nur „kleinste Differenzen“ zu sehen) als Auslöser für komplementbildendes Rechnen scheint weniger stark zu sein, wie sie auf Grund der Befunde anderer Studien (vgl. Kap. 2.2.1) zu erwarten wäre, darüber hinaus ist sie als kausaler Auslöser nur selten nachweisbar.

Da sich Teilaspekte der Zahlenwerte der kleinen Differenzen auch gut für das W-Vereinfachen eignen, wenden die Kinder diese Variante strategischen Rechnens vor allem am Ende der Studie häufiger als das komplementbildende Rechnen bei diesen Aufgaben an, wählen dort aber bei Aufgaben ohne kleine Differenz auch das quasialgorithmische „Ergänzen stellengerecht“ an.

Trotzdem scheinen auch die Zahlenwerte, wie Schüleräußerungen belegen, man habe ergänzt, weil die Zahlen nah beieinander seien, einen Beitrag zum Auslösen der Wahl der Grundvorstellung leisten zu können.

Anregungen

Im Unterricht können verschiedene explizite oder implizite Varianten der Anregungen für komplementbildendes Rechnen beobachtet werden. Zusammenfassend lässt sich für diese als Auslöser für die Wahl der Grundvorstellungwahl Komplementbildung sagen, dass diese zwar häufig starken und plausiblen Einfluss haben, aber von den Kindern mitunter nur in einzelnen Teilaspekten gesehen werden (z.B. im „Weg von Robin“ nur das Subtraktionsformat, nicht aber die Idee des Stelle Herstellens), und sich letztlich auch hier nicht ausschließen lässt, dass die weiteren Auslöser, wie Kontext, Zahlenwerte und Vorlieben, ebenfalls die Entscheidung mit beeinflussen können.

Vorlieben

Ob Vorlieben Auslöser für komplementbildendes Rechnen sein könnten, lässt sich nur mit Hilfe von Verteilungsdarstellungen eruieren, da innerhalb der Studie kein Dokument und keine Interaktion aufgespürt werden kann, in der sich ein Kind, auch nicht implizit, in dem Sinne äußert, bei der Wahl der Grundvorstellungen entsprechend einer Vorliebe vorgegangen zu sein.

Diese Verteilungsdarstellungen lassen wiederum den vorsichtigen Schluss zu, dass die Kinder eher zu abwechslungsreichem Strategiegebrauch tendieren, auch häufiger komplementbildend rechnende Kinder streuen immer wieder verschiedene Strategien des Wegnehmens ein, wie sich auch in den Lernstandserhebungen ablesen lässt.

Letztlich könnte man hier wiederkehrendes komplementbildendes Rechnen eher als Muster im Sinne fortschreitender Mathematisierung auffassen, wenn die Kinder immer wieder ähnliche Ideen in neuen Zusammenhängen und Varianten erproben, unterbrochen von der Beschäftigung mit anderen Aspekten strategischen Rechnens.

5 Diskussion

Im letzten Kapitel dieser Arbeit sollen nun Folgerungen, aber auch offene Fragen aus theoretischen Implikationen und den auf der Grundlage der Forschungsinteressen beobachteten Befunden gezogen und zur Diskussion gestellt werden. Als übergeordnetes Forschungsinteresse dieser Arbeit wurde in Kap. 3.1 formuliert:

> *Welchen Stellenwert hat Komplementbildung im Rahmen eines an fortschreitender Mathematisierung angelehnten Unterrichts zur Subtraktion im Tausenderraum?*

Um dem Forschungsinteresse nachzukommen, wurde eine Langzeitstudie mit kontinuierlicher Datenerhebung geplant und durchgeführt, in welcher der nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung aufgebaute Unterricht zur Subtraktion einer dritten Klasse über das komplette zweite Halbjahr lang begleitet wurde (vgl. Kap. 3). Dabei wurden 35 Unterrichtsstunden mit 1248 Unterrichtsdokumenten aufgezeichnet und unter anderem mit einer eigens dafür programmierten Software strukturiert und ausgewertet. Das in Kap. 3.1 in einzelne Aspekte aufgefächerte Forschungsinteresse wurde zur Strukturierung der in Kap. 4 dargestellten Analyse des Unterrichts benutzt. In Kap. 5.1 werden zentrale Ergebnisse dieser Analyse dargestellt und zur Diskussion gestellt, in Kap. 5.2 dann Folgerungen zur Diskussion gestellt.

Theoretische Implikationen

Noch bevor Ergebnisse aus dem Unterrichtsversuch dargestellt werden, ergibt sich bereits aus der Theorie ein erstes Ergebnis: In dieser Arbeit wurde der Begriff *Komplementbildung* als Bezeichnung der zweiten Grundvorstellung zur Subtraktion definiert, zusätzlich zum Wegnehmen, in Abgrenzung zum in der deutschen Mathematikdidaktik benutzten Begriff *Ergänzen*, der dort gleichsam für diese Grundvorstellung, aber auch für eine Rechenstrategie steht, die – so das Ergebnis der Strukturanalyse – in der Regel nur einen Teil der in dieser Grundvorstellung möglichen Rechenhandlungen beschreibt.

Aus aktuellen Darstellungen wurde daher der Gedanke übernommen, dass Strategiekategorien zur mentalarithmetischen (strategisch halbschriftlich oder internalisiert ausgeführten) Subtraktion ein zweidimensionales System darstellen, wie es in Kap. 2.2.2 (vgl. Tabelle 2.4, S. 43) dargelegt wurde.

Die Matrix der Strategiekategorien zur mentalarithmetischen Subtraktion wurde darüber hinaus im Bereich der Strategien zur Komplementbildung um das Subtraktionsformat erweitert, denn *Ergänzen* wird – einerlei ob als Strategievarianten oder als Grundvorstellung – in der Literatur häufig als additives

Auffüllen zwischen Subtrahend und Minuend betrachtet, als Strategie sogar in der Regel in der Darstellung beschränkt auf schrittweise Varianten. In Kap. 2.1.1 und 2.2.2 wurde aber zumindest als theoretische Implikation die mögliche Existenz des Subtraktionsformates dargelegt, und dieses in das Strategiekategoriensystem dieser Arbeit integriert. Auf diesen Grundlagen wurde der Strukturbaum für mentale Arithmetik II (Abbildung 3.5, S. 103) entwickelt, der gleichsam auch das Kodierungsraster der softwaregestützten Auswertungsmethodik (vgl. Kap. 3.4.2) darstellt.

5.1 Zentrale Ergebnisse der Studie

Zu den in Kapitel 3.1 formulierten Forschungsinteressen FI1 bis FI4 wurden im Kapitel 4 Unterrichtsanalysen und daraus gewonnene Erkenntnisse dargestellt. Die zentralen Ergebnisse werden im Folgenden zusammengefasst.

5.1.1 Anwendung und Erfolg

Hierzu wurde als Forschungsinteresse formuliert:

FI1: 1. *Inwieweit verwenden die Kinder Komplementbildung (zu unterschiedlichen Zeitpunkten) im Unterricht?*
2. *Wenn die Kinder Komplementbildung verwenden: Wie erfolgreich sind sie dabei?*
3. *Gibt es Kinder, die der Komplementbildung eher zusprechen, und solche, die sie eher vermeiden?*

Dazu ergeben sich folgende zentrale Erkenntnisse:

Verwendungshäufigkeit

In Kap. 4.1 wurde deutlich, dass komplementbildendes Rechnen im Unterricht dieser Studie einen hohen Stellenwert innehat: Das Verhältnis von mentalarithmetischen Dokumenten (707 von insgesamt 856), auf denen mindestens einmal in der Grundvorstellung Komplementbildung gerechnet wird (266 Dokumente), beträgt etwa 1:2 verglichen mit denen der Grundvorstellung Wegnehmen (495 Dokumente).

Da die in Kap. 2.1 und 2.2 vorgestellten Studien vom Ansatz her nicht direkt vergleichbar sind, wurde hier vorab ein geringerer Anteil erwartet. Ein starkes Cluster komplementbildenden Rechnens zeigt sich in den explorativen Blöcken 01 (Kino-Kontext) und 02 (Strategien erarbeiten), aber Komplementbildung bleibt auch in anderen Blöcken erkennbar, und wird vor und während der Hinführung zu Algorithmus erneut häufig benutzt.

Darüber hinaus wurde festgestellt, dass auch nach der Einführung der schriftlichen Subtraktion (die durch komplementbildendes halbschriftliches

Rechnen hergeleitet wurde) die Kinder weiterhin stabil die mentale Arithmetik zur Subtraktion nutzen, darin auch weiterhin zu einem erkennbaren Anteil in der Grundvorstellung Komplementbildung.

Erfolg

Wie in Kap. 4.2 dargestellt, sind alle Kinder der Klasse erfolgreich darin, Komplementbildungsprozesse innerhalb des halbschriftlichen bzw. internalisierten strategischen Subtrahierens anzuwenden. Zwar treten hierbei in der explorativen Phase des Unterrichts bei komplexeren Rechnungen noch Teilverständnis- oder Komplexitätsfehler auf, aber nur wenige auf Unverständnis beruhende Fehler in der gesamte Unterrichtsreihe (nur 7 dieser K-Fehler in 266 K-Dokumenten). Dabei kann keine Beziehung zum Leistungsspektrum der Kinder festgestellt werden, ebenso nicht zwischen dem Leistungsspektrum und den Fehlern beim schriftlichen Subtrahieren. Dazu erwies sich der schriftliche Subtraktionsalgorithmus weder als fehleranfälliger noch als fehlerfreier als das mentalarithmetische Rechnen.

Schülerbezogene Häufigkeit und Erfolg

Während in erbetenen Komplementbildungssituationen alle Kinder diese anwenden, so ist erkennbar, dass es durchaus Kinder gibt, die das Komplementbilden von sich aus eher vermeiden („Skeptiker“), wenn die Wahl der Rechenstrategie freigestellt ist, und solche, die auch hier häufig Komplementbildungsstrategien anwenden („Befürworter“). Allerdings lässt sich die Lerngruppe nicht in zwei Lager aufteilen, sondern es ergibt sich eine heterogene Verteilung, die Übergänge zwischen Skepsis und Befürwortung sind fließend. Erneut lässt sich auch hier keine Beziehung zum Leistungsspektrum finden, Skeptiker und Befürworter finden sich in allen Leistungsspektren. Darüber hinaus besteht auch keine Beziehung zur Fehlerhäufigkeit, weder beim mentalarithmetischen Komplementbilden, noch beim schriftlichen Subtrahieren, mit der Reihung der Kinder zwischen Skepsis und Befürwortung.

5.1.2 Varianten

Um Varianten der Komplementbildung feststellen zu können, wurde als Forschungsinteresse benannt:

FI2: Welche Varianten von Komplementbildung lassen sich im Unterricht wann beobachten, wie …

1. Rechnungen im Additions- oder im Subtraktionsformat,
2. Rechnungen in der Strategiekategorie Schrittweise,
3. Stellenweise,
4. Hilfsaufgabe und

5. Vereinfachen, sowie
6. Varianten der Rechenarten und Notationsformen?

Dazu lassen sich die nachfolgenden Erkenntnisse festhalten:

Formate

Deutlich zeigte sich in Kap. 4.2.1, dass das Subtraktionsformat entgegen der aus der didaktischen Literatur erwartbaren Lage vergleichsweise häufig (auf 60 der 266 K-Dokumente), durchaus früh, und originär aus dem Denken der Kinder auftritt (mit einem deutlichen Schwerpunkt in der explorativen Phase, hier beträgt das Verhältnis zwischen Additions- und Subtraktionsformatdokumenten etwa 1:1), und trotz der späteren Fokussierung auf additives Komplementbilden zur Herleitung des Algorithmus immer noch erkennbar bleibt.

Die Lehrerin kultiviert das komplementbildende Rechnen in beiden Formaten, differenziert ihre Strategiekategorie „Ergänzen" in „Ergänzen(+)" und „Ergänzen(-)", und gibt dem Auftreten des Subtraktionsformates Raum.

Nicht erkennbar war, dass komplementbildendes Rechnen im Subtraktionsformat verständnisschwieriger als solches im Additionsformat erscheint, dagegen zeigen einige Dokumente, dass Kinder sowohl auf einem Arbeitsblatt als auch innerhalb einer Aufgabenstellung problemlos zwischen beiden Formaten wechseln können.

Strategiekategorien

Die Verwendungshäufigkeit der einzelnen K-Strategiekategorien wurde eingehend in den Kapiteln 4.2.2 bis 4.2.5 einzeln dargelegt und das Rechnen darin mit beispielhaften Dokumenten und ggf. zugehörigen Interaktionen vertiefend analysiert. An dieser Stelle soll nun ein zusammenfassender Überblick erfolgen:

Komplementbildendes Rechnen – im Unterricht „Ergänzen" genannt – ist in allererster Linie der Strategiekategorie Schrittweise zuzuordnen: 237 der 266 K-Dokumenten enthalten mindestens eine schrittweise Rechnung. Innerhalb des schrittweisen K-Rechnens entstehen verschiedene Varianten, dabei scheint die Idee des Stelle Herstellens (s.u.) eine zentrale Rolle einzunehmen. Im Kategoriensystem der Lehrerin ist „Ergänzen" vermutlich stark mit schrittweisem Rechnen belegt, auf dessen additive Variante sie im Verlauf des Unterrichts zunehmend fokussiert.

Trotzdem sind auch Rechnungen in der Grundvorstellung Komplementbildung zu beobachten, die den anderen drei Strategiekategorien zugeordnet werden können: Den größten Anteil haben hier Dokumente, die innerhalb dieser Grundvorstellung die Hilfsaufgabenidee aufgreifen (26 Dokumente), wobei hier möglicherweise ein enger Zusammenhang zu Stellenwertüberschreitungen bei der Idee des Stelle Herstellens gegeben sein könnte (vgl. Kap. 4.2.4 und Kap. 4.3). Aber auch das Anwenden des Vereinfachens (auf 3 Dokumenten), sowie stellenweises Rechnen (auf 2 Dokumenten) konnte in dieser Grundvorstellung beobachtet werden, letzteres nur aus der Interpretation der das Dokument begleitenden Interaktion.

Zu den Zeitpunkten des Auftretens der drei weiteren Strategiekategorien kann man festhalten, dass sich die Hilfsaufgabenidee in der Grundvorstellung Komplementbildung bereits in der explorativen Phase entfalten kann, noch bevor die Lehrerin „Ergänzen" auf additiv-schrittweise Komplementbildung fokussiert, während die anderen beiden Strategiekategorien erst später (und dort auch die K-Hilfsaufgabe nur noch marginal) im Unterricht auftreten.

Alle vier Strategiekategorien lassen sich also auch in der Grundvorstellung Komplementbildung zumindest aufspüren, und bestätigen somit die Zweidimensionalität des erweiterten Kategoriensystems, das Rechnungen zu strukturgleichen Strategiekategorien innerhalb beider Grundvorstellung zuordnet, wie es in Kap. 2.2.2 aufgestellt wurde.

Rechenarten und Notationsformen

Im Unterricht der Studie rechnen die Kinder überwiegend halbschriftlich, seltener, gegen Ende, auch internalisiert – allerdings gibt die Lehrerin in der Regel in den einzelnen Stunden die zu verwendende Rechenart vor (Kap. 4.2.6).

Auch der Rechenstrich (ebd.) wird von den Kindern vermutlich nur benutzt, weil die Lehrerin dies zu Beginn des explorativen Kino-Blockes erbittet. In der Regel transformieren die Kinder dabei halbschriftliche komplementbildende Rechnungen in die Rechenstrichdarstellung. In dieser explorativen Phase wird der Rechenstrich also weniger als Prozesshilfe, sondern eher als Dokumentations- und Kommunikationsmedium benutzt, mit dem vor allem die Bedeutung von Rechenhandlungen (z.B. bei der Bilanzierung von Rechenschritten, die der K-Hilfsaufgabenidee folgen) kommuniziert werden. Nach den explorativen Blöcken verliert der Rechenstrich mit der Konsolidierung des halbschriftlichen komplementbildenden Rechnens seine Bedeutung.

5.1.3 Entwicklungen

Ein Handlungsbogen bei der Thematisierung komplementbildenden Rechnens könnte sein, über die Idee des Stelle Herstellens zum Algorithmus zu gelangen. Daraus ergab sich als Forschungsinteresse:

FI3:
1. *Inwieweit und ggf. in welchen Varianten tritt die Idee des Stelle Herstellens im Unterricht auf?*
2. *Wie kultiviert die Lehrerin diese Idee verständnisentwickelnd zum Algorithmus?*
3. *Inwiefern wird diese Idee nach der Einführung des Algorithmus zur reflexiven Verständnisentwicklung verwendet?*

Hierzu lassen sich folgende Erkenntnisse formulieren:

Variantenreiches Auftreten

Wie in Kap. 4.3.1 beschrieben, tritt bereits zu Beginn des Unterrichts der Studie die Idee des Stelle Herstellens zumindest in Teilrechenschritten schrittweisen komplementbildenden Rechnens auf: Es werden zunächst umständlicher anmutende Zwischenschritte benutzt, die das Ziel haben, einzelne Stellenwerte der Zielzahl des Komplementbildungsvorganges zu erreichen, und damit gleichsam für den Gesamtprozess entlastend sind.

Dabei können drei Varianten des Stelle Herstellens beobachtet werden: In der Reihenfolge des Herstellens der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer der Zielzahl kann bei Stellenwertübergängen das Problem des Überschreitens der Zielzahl auftreten. Dieses Problem lösen die Kinder zum einen durch das „Fast-Erreichen" der entsprechende Stelle, also in dem sie um 1 unter dem Zielzahlstellenwert bleiben, oder zum anderen durch bewusstes Überschreiten und Kompensieren in Gegenrichtung mit Rechenrichtungswechseln durch Aufgreifen der Hilfsaufgabenidee für das komplementbildende Rechnen. Zusätzlich kann auch die Variante des Stelle Herstellens in der Reihenfolge Einer-, Zehner- und Hunderterstelle originär aus dem Denken der Kinder beobachtet werden, bei der die Stellenwertübergangsproblematik eine geringere Rolle spielt, da Stellenwerte immer direkt ohne Rechenrichtungswechsel erreicht werden können.

Kultivierung und Einführung des schriftlichen Algorithmus

Eben diese Variante, der Idee des Stelle Herstellens zu folgen, und dabei in der Reihenfolge Einer-, Zehner- und Hunderterstelle vorzugehen, dabei immer den kleinstmöglichen Stellenwert zu addieren, der die Zielstelle erreicht, kultiviert die Lehrerin aus den Schülerdokumenten heraus zur so genannten Strategievariante „Ergänzen stellengerecht" (dargestellt in Kap. 4.3.2).

Diese aber ist – bei genauer Betrachtung – eigentlich keine Strategie mehr, sondern bereits ein präalgorithmisches halbschriftliches Rechnen auf Zahlenebene. Sie nutzt das „Ergänzen stellengerecht" dann zur verständigen Einführung der schriftlichen Subtraktion (in der Form des gängig als *Auffüllen mit Ergänzen*, neu als *Überschreiten durch Auffüllen* bezeichneten Algorithmus, vgl. Kap. 2.3.2). Aus den Interaktionen dieser Unterrichtsphase ist erkennbar, dass die Kinder hier strukturähnliche Teilprozesse im Vergleich zwischen „Ergänzen stellengerecht" und dem Algorithmus erkennen können, und Verständnis aus der halbschriftlichen Komplementbildung auf algorithmische Prozesse übertragen.

Reflexives Algorithmusverständnis

Diese Übertragungsprozesse von Verständnis innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung zwischen halbschriftlichem und schriftlichem Rechnen und zwischen verschiedenen Formen schriftlichen Rechnens, die ebenfalls mit dieser Grundvorstellung konnotiert sind (vgl. Kap. 4.3.3), konnten nach der Einführung und Übung des schriftlichen Verfahrens – bei einzelnen Kindern in Teilaspekten, in der Summe dann aber doch ganzheitlich – im Unterrichtsblock der reflexiven Algorithmusbetrachtung beobachtet werden.

5.1.4 Auslöser

Einige der vorgestellten Studien legen nahe, dass bestimmte Faktoren möglicherweise Auslöser dafür sein könnten, dass Kinder in die Grundvorstellung Komplementbildung wechseln. Daher wurde als viertes Forschungsinteresse formuliert:

FI4: Welche Rolle spielen mögliche Auslöser der Komplementbildung, wie ...
1. *Aufgaben mit Kontexten, die einen Grundvorstellungswechsel anregen können,*
2. *Aufgaben mit einer kleinen Differenz,*
3. *Anregungen durch Reflexionen über das Vorgehen anderer Kinder, und*
4. *individuelle Vorlieben für bestimmte Varianten komplementbildenden Rechnens?*

Auch wenn der methodische Ansatz dieser Studie nur bedingt geeignet ist, mögliche Auslöser für den Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung bei der Bearbeitung einer Aufgabe aufzuspüren, so sollte doch im Rahmen der vorliegenden Daten versucht werden, Erkenntnisse hierzu zu erhalten. Zum einen ist dabei problematisch, dass sich im Alltagsunterricht diese Auslöser nicht genug trennen lassen, da alle vier Faktoren gleichzeitig existent sind, zum anderen zusätzlich kritisch, dass sich die Kinder von selbst selten darüber äußern, und auch in den Unterrichtsinteraktionen selten diese Faktoren thematisiert werden. Immerhin ergeben sich aber zu allen vier möglichen Auslösern vorsichtig zu interpretierende Befunde, die im Zusammenhang mit den Aussagen in der didaktischen Literatur dazu diskutiert werden können.

Kontext

Kontexte, die komplementbildendes Rechnen anregen könnte, sind im Unterricht der Studie nur im explorativen Kino-Block 01 und im reflektiven Block 11 („Zurück zum Start“) gegeben (vgl. Kap. 4.4.1). Während die Kinder in letzterem den Kontext ignorieren, und nicht erkennbar wird, dass die Wahl der Grundvorstellung etwa vom Kontext abhängen könnte, so geben einige Kommentare auf Dokumenten aus dem Block 01 Hinweise dahingehend, dass der Kontext ein Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung aktiviert haben könnte, etwa wenn die Kinder im Kommentar das Ergebnis im Sinne des gewählten Kontextes rückinterpretieren. In den meisten Fällen geht hier nach einer Beschäftigung mit dem Kontext auch ein Rechnen in der intendierten Grundvorstellung einher – jedoch können auch Fälle beobachtet werden, in denen trotz Aufgreifen eines Komplementbildung intendierenden Kontextes dann trotzdem wegnehmend gerechnet wird. Immerhin scheint der Kontext zumindest in der explorativen Unterrichtsphase für die Aktivierung der Grundvorstellung Komplementbildung bedeutsam zu sein.

Zahlenwerte

Unter dem Stichwort *kleine Differenz* wurden im Theoriekapitel Studien vorgestellt, die einen Zusammenhang bestimmter Zahlenwerte der Aufgabe und der Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung nahe legen.

Im Unterricht dieser Studie (Kap. 4.4.2) kann sowohl beobachtet werden, dass sich Kinder auf Zahlenwerte der Art der *kleinen Differenz* in ihren Kommentaren zur Rechnung beziehen, aber auch, dass es auch Fälle gibt, in denen selbst kleinste Differenzen diesen Wechsel nicht auslösen können. Stattdessen wählen die Kinder bei Zahlenwerten dieser Art am Ende des Unterrichts der Studie häufig das Vereinfachen in der Grundvorstellung Wegnehmen, das schließlich dort sogar zur vorherrschend angewandten Strategie wird.

Zusätzlich muss hier beachtet werden, dass die Vorteile des Wechsels in die Grundvorstellung Komplementbildung bei kleinen Differenzen nicht bei allen Varianten des Rechnens in dieser Grundvorstellung bestehen. So konnte beobachtet werden, dass Zahlenwerte von Aufgaben, die eher zu schriftlichem Subtrahieren als zu strategischem Vorgehen einladen, halbschriftlich komplementbildend in der präalgorithmischen Variante „Ergänzen stellengerecht" (s.o.) gerechnet werden.

Anregungen

Im Unterricht der Studie geschehen Anregungen zum komplementbildenden Rechnen in drei Varianten (vgl. Kap. 4.4.3): Zum einen erbittet die Lehrerin mitunter direkt alle Kinder zu Stundenbeginn, in dieser Grundvorstellung zu rechnen, zum anderen leitet sie mitunter einzelne Kinder in der unterrichtsbegleitenden Interaktion während der Arbeitsphasen zum Rechnen in dieser Grundvorstellung an. Drittens beziehen sich Kinder aber auch immer wieder auf die komplementbildenden Rechenwege, die in Reflexionsphasen gemeinsam thematisiert werden, erkennbar durch Kommentare neben der Rechnung, die auf das Urheberkind verweisen.

Dass die Kinder diese Anregungen aufnehmen, ist zunächst nicht sonderlich bemerkenswert. Als interessant stellt sich aber heraus, dass die Kinder unterschiedliche Aspekte aus diesen Anregungen aufgreifen: mitunter den intendierten Wechsel in die Grundvorstellung Komplementbildung, ohne dabei gleichzeitig auch die vorgestellte Strategievariante abzubilden, mitunter aber auch das Replizieren der Strategiekategorie des vorgestellten Rechenweges, aber in der Grundvorstellung Wegnehmen. In der Grundvorstellung Komplementbildung kann es dann auch dazu kommen, dass die Kinder zwischen dem Additionsformat und dem Subtraktionsformat im Gegensatz zur Anregung wechseln, oder das in der Anregung enthaltene Format aufgreifen, ohne etwa die enthaltene Strategievariante zu beachten.

Vorlieben

Dieser letzte mögliche Auslöser für die Wahl einer bestimmten Rechenstrategie, also auch die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung, der in der didaktischen Literatur beschrieben wird als recht stabiles Entscheidungsmuster, bei dem ein Schüler in der Regel sämtliche Aufgaben gemäß einer der Hauptstrategien rechnet, konnte im Unterricht dieser Studie nicht beobachtet werden. Alle Kinder wechseln zwischen den im Unterricht thematisierten sechs Strategiekategorien (Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen in der Grundvorstellung Wegnehmen und Ergänzen(+) und Ergänzen(-) in der Grundvorstellung Komplementbildung) in bunter Reihenfolge ab, und äußern sich auch in keiner Weise über eine eventuell vorhandene Vorliebe. Selbst Kinder, die häufiger Komplementbildung wählen, lassen hier keine Vorliebe erkennen, sondern streuen immer wieder andere W-Strategien ein, selbst wenn man diese Betrachtung auf Stunden offener Strategiewahl einschränkt.

Auch der Vergleich der Strategien, die im Pre-, Post- und Retentiontest, also den Lernstandserhebungen, die vor und nach der Thematisierung der halbschriftlichen Strategien und ganz am Ende des Unterrichtsgangs erhoben wurden, zeigt keine erkennbaren Muster – im Gegenteil wird hier deutlich, dass zunächst vorrangiges schrittweises Rechnen in der Grundvorstellung Wegnehmen zunehmend durch andere, auch komplementbildende Strategien ersetzt wird.

5.2 Folgerungen aus den zentralen Ergebnissen

Aus den vorangehend vorgestellten zentralen Erkenntnissen der Studie lassen sich an dieser Stelle nur einige Folgerungen formulieren, die im Folgenden zur Diskussion gestellt werden sollen.

5.2.1 Anwendung und Erfolg

Der deutlich erkennbare hohe Nutzungsgrad komplementbildenden Rechnens ist vermutlich auf mehrere unterrichtliche Bedingungsfaktoren zurückzuführen.

Zum einen mag hier in die Diskussion eingebracht werden, dass vor allem im explorativen Kinoblock mit dem Einstieg über Kontexte, die verschiedene Grundvorstellungen aktivieren können, ein hoher Grad der Nutzung des komplementbildenden Rechnens, aber auch durch die prinzipielle Offenheit dieser Unterrichtsphase eine breite Varietät der Rechenwege ermöglicht werden könnte. Sowohl die Idee des Stelle Herstellens, das Aufgreifen der Hilfsaufgabenidee, als auch die Nutzung des Subtraktionsformates treten in dieser Phase des Unterrichts auf.

Zum anderen mag das klare Ziel der Lehrerin, über Rechenstrategien des „Ergänzens" zur verständigen Einführung des schriftlichen Algorithmus gelangen zu wollen, und im Sinne der *guided reeinvention* (vgl. Kap. 3.2) immer wieder solche Rechenwege zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, eine Ursache des hohen Nutzungsgrades komplementbilden Rechnens sein.

Keineswegs vorhersehbar war die Erkenntnis, dass alle Kinder erfolgreich das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung bewältigen. Es kann aufgrund der Analyse der vorliegenden Daten nicht festgestellt werden, dass etwa die langsamer Mathematik lernenden Kindern größere Verständnisschwierigkeiten oder Fehlerquoten aufweisen, noch dass sie eine Zu- oder Abneigung gegenüber dem komplementbildenden Rechnen offenbaren. Die in Kap. 2.2.3 vorgestellten Vorschläge einiger Autoren, dieser Kindergruppe lediglich das schrittweise Rechnen in der Grundvorstellung Wegnehmen zugänglich zu machen und früh den Algorithmus zu thematisieren, würde in der hier vorliegenden Lerngruppe nicht sinnvoll sein, zumal algorithmisches Rechnen in dieser Klasse nicht fehlerunanfälliger wäre als das halbschriftliche Komplementbilden.

5.2.2 Varianten

Zunächst einmal mag man festhalten, dass das Subtraktionsformat eine stärkere Rolle spielt, als vorab durch die Theorielage zu erwarten war. Dass die Kinder diesen Formatwechsel von sich aus, ohne Anregung von außen in den Unterricht einbringen, sie dabei beide Formate im Unterricht parallel verwenden und mitunter zwischen beiden hin- und herwechseln, zeigt auf, dass dem Subtraktionsformat in zukünftigen mathematikdidaktischen Studien eine größere Aufmerksamkeit gebühren könnte. Neben dem Auffüllen als Kontextvariante könnte demnach auch das Entleeren in kontextuellen Anregungen berücksichtigt werden – etwa wie es im Theorieteil als 4. Variante des Kinokontextes neben denen, die Addieren, Wegnehmen oder Auffüllen intendieren sollen, vorgeschlagen wurde (vgl. Kap. 2.1.1).

Prinzipiell bestätigen die Varianten komplementbildenden Rechnens, die in der Studie ausgemacht werden können, dass auch in der Grundvorstellung Komplementbildung das Rechnen in den Strategiekategorien Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen erfolgen kann. Die theoretische Überlegung, dass sich subtraktives strategisches Rechnen in einem zweidimensionalen Kategoriensystem abspielen könnte, würde also zumindest durch Einzeldokumente bestätigt werden.

Wichtig mag in diesem Zusammenhang sein, dass im Kategoriensystem der Lehrerin „Ergänzen“ auf schrittweises Komplementbilden festgelegt zu sein scheint: Noch bevor sie das Rechnen in dieser Grundvorstellung auf schrittweise Varianten fokussiert, hat die Adaption der Hilfsaufgabenidee aus dem wegnehmenden Rechnen auch in der Grundvorstellung Komplementbildung eine Entwicklungschance. Erst mit der Fokussierung auf schrittweises Vorgehen, vor allem durch die stringente Entwicklung des additiven Auffüllens zum Algorithmus, hat auch die Hilfsaufgabenidee keine Chance mehr, im Unterricht existent zu bleiben. Die Strategien K-Schrittweise und K-Vereinfachen kommen vermutlich zu spät auf – entstünden auch sie in der explorativen Phase, hätten auch sie möglicherweise mehr Beachtung erfahren.

Ein zukünftiges Forschungsinteresse könnte daher sein, zu evaluieren, welchen Erfolg eine bewusste Öffnung für alle vier Strategievarianten innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung haben könnte. Dabei könnte es Ziel von Kategorisierungsprozessen sein, im Gegensatz zum Unterricht der Studie, bewusst über die gewählten Grundvorstellungen (und ggf. Formate) und in beiden über die möglichen strukturähnlichen Strategievarianten zu reflektieren, und dabei die Begriffe Schrittweise, Stellenweise, etc. nicht rein auf wegnehmendes Rechnen zu beschränken. Das bedeutet implizit, das „Ergänzen“ nicht mehr als Strategiekategorie, sondern als Grundvorstellungswechsel zu thematisieren, in dem mehrere Strategievarianten möglich sind. Offen bleibt an dieser Stelle, wie man im Unterricht der Primarstufe diese Grundvorstellung bezeichnen wollte, da Komplementbildung kein geeigneter kindersprachlicher Begriff sein mag, aber Ergänzen zu sehr auf die additive Variante einschränkt. Auffüllen und Entleeren könnten hier brauchbare Begriffspaare sein – ein Oberbegriff hierzu steht noch aus.

5.2.3 Entwicklungen

Zunächst könnte der von der Lehrerin eingeschlagene Weg, über die Kultivierung schrittweiser Komplementbildung und der Idee des Stelle Herstellens einen verständigen Weg zur Einführung des Algorithmus und dessen verständnisvertiefenden Reflexion, als gelungen bezeichnet werden.

Auf der anderen Seite ist es aber vermutlich genau diese Fokussierung auf additives schrittweises Komplementbilden, die der Entwicklung anderer Strategievarianten keinen Raum lässt. Als offene Frage mag hier formuliert werden, ob sich eine Kultivierung der Idee des Stelle Herstellens noch in einem Unterricht nach fortschreitender Mathematisierung realisieren ließe, wenn nicht nur schrittweises Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung, sondern auch die drei weiteren Strategievarianten bewusster angeregt würden, wie zuvor in Kap. 5.2.2 beschrieben.

Darüber hinaus sei darauf hingewiesen, dass auch eine Kultivierung der Idee des Stelle Herstellens in der Variante des subtraktiven Entleerens möglich wäre, und damit die sechste (bzw. achte) Algorithmusvariante, die in Kap. 2.3.1 als *Unterschreitend durch Entleeren* vorgestellt wurde, nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung verständig erarbeitet werden könnte – ein bislang wenig beschriebener und beforschter Bereich der Mathematikdidaktik.

5.2.4 Auslöser

Zunächst soll hier noch einmal festgehalten werden, dass der methodische Ansatz dieser Arbeit nur vorsichtige Interpretationen in diesem Bereich zulässt, und somit auch die daraus getroffenen Folgerungen mit Bedacht formuliert werden müssen.

Kontexte scheinen als Auslöser für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung vor allem im explorativen Teil des Unterrichtes eine Rolle zu spielen, da im Kinoblock 01 Hinweise zu finden sind, dass der Kontext hier den Wechsel in komplementbildendes Rechnen anregen kann. Es scheint also sinnvoll zu sein, einen kontextbezogenen Einstieg in die Subtraktion im Tausenderraum durchzuführen und ggf. weitere Studien zur Wirkung des Kontextseinstiegs in ähnlichen Themenbereichen durchzuführen, z.B. bei der Subtraktion mit negativen Zahlen in der Sekundarstufe.

In dieser Studie wird kein entleerender Kontext benutzt, trotzdem tritt gerade in den explorativen Blöcken auch das Subtraktionsformat auf. Zukünftiges Forschungsinteresse könnte also sein, ob auffüllende und entleerende Kontexte hier noch deutlicher die Formatwahl anregen können, als nur der auffüllende Kontext, wie in dieser Studie. Zumindest intendiert das deutliche Auftreten des Subtraktionsformates, in Zukunft auch mit entleerenden Kontexten zu arbeiten.

Zu Zahlenwerten, die Komplementbildung intendieren könnten, wurde festgehalten, dass in dieser Arbeit ihre Wirkung ambivalent ist: Zum einen scheinen Aufgaben mit kleinen Differenzen Komplementbildungsprozesse anregen zu können, oft aber auch vermutlich nicht, selbst wenn kleinste Differenzen vorhanden sind. Darüber hinaus regen Teilkomponenten der kleinen Differenz möglicherweise auch das Vereinfachen an, zudem scheint die Wirkung der kleinen Differenz abhängig von der gewählten Strategie und der dort ausgeführten Variante innerhalb der Grundvorstellung Komplementbildung zu sein. Hier könnte weiterer Forschungsbedarf bestehen, der das Vereinfachen und die Strategievarianten mit einbezieht.

Zu Anregungen wurde festgestellt, dass diese möglicherweise nur in Teilaspekten aufgenommen werden. Die vielfach, auch im Unterricht dieser Studie zu beobachtende Praxis, Anregungen ähnlich „Rechne wie Xy“ zu geben, könnte zumindest mit dem Hintergrundwissen erweitert werden, dass zumindest im Bereich des komplementbildenden Rechnens Kinder hier divergente Teilaspekte für sich übernehmen könnten, z.B. nur die Grundvorstellung Komplementbildung, aber eine andere Strategie; oder nur die Strategiekategorie, aber ausgeführt in der Grundvorstellung Wegnehmen; oder innerhalb der Komplementbildung nur den Wechsel zwischen Additions- und Subtraktionsformat; oder nur Aspekte von Strategievarianten (wie die Idee des Stelle Herstellens in einzelnen Schritten); und viele Aspekte mehr.

Vorlieben spielen im hier beobachteten Unterricht vermutlich keine Rolle, zumindest kann kein Indiz identifiziert werden, das einen entsprechenden Hinweis geben könnte. Da sie in anderen Studien beobachtet wurden, kann hier als offene Frage formuliert werden, wie es zu diesen Unterschieden kommt. Mutmaßlich mag dies mit dem Unterrichtskonzept zu tun haben – hier bestünde ebenfalls noch weiterer Forschungsbedarf.

5.3 Schlussbemerkungen

Leitinteresse dieser Arbeit war, die Rolle des komplementbildenden, hier schwerpunktmäßig halbschriftlichen Rechnens im Tausenderraum zu evaluieren. Diesem Interesse wurde durch die Auffächerung in vier Forschungsinteressen mit vier Ergebnisteilen nachgegangen.

Es konnte dargelegt werden, dass im beobachteten Unterricht, der nach dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung durchgeführt wurde, ein hoher Nutzungsgrad komplementbildenden Rechnens festzustellen war, und alle Kinder dieser Lerngruppe das Rechnen in dieser Grundvorstellung bewältigen konnten.

Das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung geschieht dabei in vielfältigen Varianten, neben dem schrittweisen Rechnen konnten auch Rechenwege den Strategiekategorien Stellenweise, Hilfsaufgabe und Vereinfachen innerhalb dieser Grundvorstellung beobachtet werden. Damit konnte die theoretisch aufgestellte Überlegung bestätigt werden, dass sich subtraktives strategisches Rechnen in einem zweidimensionalen System abbilden lässt, dass sich zum einen durch die Grundvorstellung (ggf. erweitert durch das Format) und zum anderen durch die Strategiekategorie darstellt.

Als zentral im beobachteten Unterricht erwies sich die Idee des Stelle Herstellens, die später zur Variante „Ergänzen stellengerecht" und zum schriftlichen Algorithmus führte, aber vermutlich auch Adaptionen aus dem wegnehmenden Rechnen, wie die Hilfsaufgabenidee, auslösen konnte. Ihre Rolle scheint dabei ambivalent zu sein: Zum einen folgen die Kinder der Lehrerin auf diesem verständnisentwickelnden Weg, zum anderen aber wirkte sich die dadurch gegebene Fokussierung auf schrittweises Komplementbilden möglicherweise nachteilig für die Entwicklung der anderen Strategien in dieser Grundvorstellung aus.

Zu möglichen Auslösern für die Wahl der Grundvorstellung Komplementbildung wurde beobachtet, dass die Rolle der Zahlenwerte, insbesondere die der kleinen Differenzen, weniger stringent zu sein scheint als erwartet wurde, so dass ihre Rolle neu evaluiert werden könnte.

Nachdem das Kapitel 5 mit theoretischen Implikationen begonnen wurde, am Schluss noch ein Wort zur gewählten Methode: Der hohe Aufwand, hier eine Langzeitstudie mit kontinuierlicher Dokumentation durchzuführen, dabei eine softwaregestützte *thick description* nach dem Design Science Ansatz mit am Ende 35 dokumentierten Unterrichtsstunden und 1248 eingescannten Dokumenten zu erstellen, erwies sich retrospektiv als fruchtbar, da viele der gewonnen Erkenntnisse erst durch die ebenfalls softwaregestützte Analyse innerhalb dieser vollständigen Dokumentation festgehalten werden konnten, die in einer Längsschnittstudie mit z.B. drei Erhebungszeitpunkten möglicherweise verlorengegangen wären.

Die Einleitung (Kap. 1) dieser Arbeit beginnt mit Teilen des folgenden Zitates, auf das hier am Ende noch einmal eingegangen werden soll. Ihre Studie zur Nutzung und Effizienz der *subtraction by addition* fassen Peters u. a. (2012, S. 346f.) zusammen:

> *„These results call for the design of more powerful instructional settings, with explicit and systematic attention to the subtraction by addition strategy and to the inverse relation between addition and subtraction. However, a recent intervention study by De Smedt et al. (2010) suggested that subtraction by addition may only be picked up and applied under powerful instructional conditions. Some of the basic features of such instructional conditions should be (see also Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2009b): (a) integrating the development of the conceptual and procedural knowledge about the subtraction by addition strategy, (b) using children's abilities to solve problems presented in addition format by means of subtraction by addition as a starting point for developing this strategy on symbolically presented subtraction problems of the type M−S=. and (c) creating a classroom practice and culture that is directly aimed at the development of positive beliefs and attitudes towards flexible strategy use (instead of beliefs and attitudes that only value perfect mastery of one routine procedure taught by the teacher, i.e. the direct subtraction strategy)."*

Peters u. a. (ebd.) schließen mit den Worten:

> *„However, additional research is definitely needed to evaluate the success of powerful instructional settings based on these basic features. "*

Mit dieser Arbeit könnte ein kleiner Teil dazu beigetragen worden sein, die Verständnisprozesse und -entwicklungen von Kindern zur Komplementbildung in einer diese Grundvorstellung aufgreifenden und kultivierenden Lernumgebung besser zu verstehen.

Anhang

Verzeichnisse

Verzeichnis der Verteilungsdarstellungen

Verzeichnis abgedruckter Schülerdokumente, nach Schülern sortiert

Verzeichnis abgedruckter Schülerdokumente, nach Stunden sortiert

Einschränkung der Stundenanzeige im *5Z-Viewer*

Standardmäßig werden alle dokumentierten Stunden in der Auswertungssoftware angezeigt. Die Anzeigen der Stunden kann mit einem Auswahlschalter aber eingeschränkt werden. Komplementbildung ist hier mit dem im Unterricht verwendeten Begriff *Ergänzen* gekennzeichnet.

Bei allen Einschränkungen fehlen:

09-schrsbueb1 09-schrsbueb2 09-schrsbueb3 09-schrsbueb4 06-schradd	Stunden zur Übung der schriftlichen Subtraktion – hier traten keine Strategien im Sinner mentaler Arithmetik auf. Einzig in 09-schrsbueb4 rechnete Lasse 3 Aufgaben in der Grundvorstellung Differenzbildung zur Kontrolle seiner strukturellen Vermutung. Der eingeschobene Stundenblock zur schriftlichen Addition fehlt ebenso.

Nur Stunden mit »erbetener« Strategiewahl:

01-kino4	Noch in der Kontext-Explorationsphase sollten die Kinder hier versuchen, „mindestens eine Plusergänzungsaufgabe wie Priscilla oder eine Minusergänzungsaufgabe wie Robin“ (Rechenwege sind Ergebnis der Reflexion der Vorstunde) zu rechnen.
02-strat1	Im gesamten Block 02-strat wurde täglich mindestens eine der 6 Strategiekategorien (auf einem Plakat in der Klasse mit idealtypischen Rechnungen publiziert) thematisiert. In der Stunden 02-strat1 sollten alle Kinder die Strategie Schrittweise (in unterschiedlichen Varianten) probieren.
02-strat2	Hier sollten alle Kinder Ergänzen(+) oder Ergänzen(-) an zwei Pflichtaufgaben probieren. Danach (Küraufgaben) war die Wahl der Strategie frei.
02-strat3	In dieser Stunde sollten Hilfsaufgaben probiert werden (eine Pflichtaufgabe), dann freie Strategiewahl, die Auswahl der Strategie sollte aber überdacht werden.
02-strat4	In dieser Stunde sollte Vereinfachen probiert werden (eine Pflichtaufgabe), dann freie Strategiewahl, Vereinfachen wurde aber empfohlen.
02-strat5	In dieser Stunde sollte Stellenweise probiert werden (zwei Pflichtaufgaben), dann freie Strategiewahl, Stellenweise wurde aber empfohlen.
02-strat6FOE	Kinder, die krank waren, wiederholten Stellenweise (1 Kind) und Ergänzen(+) (4 Kinder).
03-strat2-3	Weiterarbeit am Päckchen der Vorstunde(n): Einige Kinder der Klasse (4/7 Kinder, die in der Vorstunde krank waren oder noch nicht zu dieser Aufgabe kamen) bearbeiteten die Aufgabe „Welche Aufgabe ist besonders geeignet für die Rechenstrategie Vereinfachen? Begründe.“, alle anderen Kinder die Aufgaben „Welche Aufgabe ist besonders geeignet für die Rechenstrategie Hilfsaufgabe? Begründe.“

04-ueb5	Hier sollte das Muster (BVB-Zahlen) mit Hilfe der Strategie Stellenweise begründet werden.
07-wdhstrat3	Jede Aufgabe eines schönen Päckchens sollte zweimal gerechnet werden, mit Ergänzen(+) und einer weiteren, beliebigen Strategie.
08-schrsub1	Stellengerechtes Ergänzen in der Reihenfolge E-Z-H sollte an Aufgaben eines schönen Päckchens gerechnet werden.
08-schrsub2 08-schrsub3	Stellengerechtes Ergänzen sollte parallel zum Algorithmus in der Stellentafel gerechnet werden.
08-schrsub4	Es sollte nur noch in der Stellentafel gerechnet werden. Stellengerechtes Ergänzen durfte aber zur Hilfe genommen werden (trat nur bei einem Kind auf).
10-algvgl1	In dieser Stunde verglichen die Kindern den Standardalgorithmus mit Rechnungen des halbschriftlichen stellengerechten Ergänzens, bzw. des stellengerechten Ergänzens am Rechenstrich, bzw. einem schriftlich inversem Verfahren, das ebenfalls mit Ergänzen zu tun hatte.
10-algvgl2	Hier fand der Vergleich des Standard-Algorithmus mit der Computersubtraktion (die auch entfernt mit dem Ergänzen zu tun hatte) statt.
11-zzstart1	Es fand arbeitsteilige Gruppenarbeit statt, die 6 Strategien (je eine Strategie pro Gruppe) sollten in der so genannten Klammernotation als Kopfrechenstrategie ausgeführt werden.

Nur Stunden mit »offener« Strategiewahl (1)

00-pretest 05-posttest 12-retention	Drei Tests einer Testserie wurden durchgeführt: Pre-Tests (vor der Thematisierung der Subtraktion), Post-Tests (nach Thematisierung halbschriftlicher Strategien) und Retention-Tests (nach Einführung der schriftlichen Subtraktion und deren Anwendung). In allen 3 Tests galt: Freier Rechenweg (bzw. freie Strategiewahl), allerdings war die halbschriftliche Notation erbeten (im Retention-Test war zusätzlich auch Kopfrechnen und schriftliches Rechnen möglich).
01-kino1 01-kino2 01-kino3	Die Einführung in subtraktives Rechnen im Tausenderraum erfolgte an Hand des Kino-Kontextes, hier galt freie Rechenstrategiewahl, allerdings war die halbschriftliche Notation erbeten.
02-strat2 02-strat3 02-strat4 02-strat5	Eigentlich besteht in diesen Stunden eine erbetene Strategiewahl bei den Pflichtaufgaben. In den sich anschließenden Küraufgaben war die Wahl der Strategie jedoch frei, auch wenn diese selten von den Kindern genutzt wurde.
03-strat2-1 03-strat2-2	Ein schönes Päckchen mit Aufgaben, die verschiedene Strategien anregen sollten, war Gegenstand dieser Stunden. Die Kinder sollten geschickt (halbschriftlich) rechnen, dabei aufgabenweise passende Strategie auswählen, und die Auswahl begründen.
04-ueb1 04-ueb2 04-ueb4	An einem substanziellen Aufgabenformat (BVB-Zahlen) erfolgte die Übung der halbschriftlichen Subtraktion, dabei war die Wahl günstiger Strategien freigestellt, allerdings eigneten sich die Zahlenwerte der Aufgaben nicht wirklich dafür, die Strategien des Ergänzens (keine „kleinen Differenzen“) anzuregen.

07-wdhstrat1 07-wdhstrat2	An einem substanziellen Aufgabenformat (Rechenketten) erfolgte Wiederholung der Standardstrategien der halbschriftlichen Subtraktion, dabei war die Wahl günstiger Strategien freigestellt, allerdings eigneten sich die Zahlenwerte der Aufgaben nicht gut dafür, die Strategie Ergänzen (keine „kleinen Differenzen“) anzuregen, bzw. waren so trivial (Beispiel: 250 – 246), dass die Rechnungen ohne erkennbare Strategie im Kopf erfolgten.
07-wdhstrat3	Jede Aufgabe eines schönen Päckchens sollte zweimal gerechnet werden, mit Ergänzen(+) und einer weiteren, beliebigen Strategie.
11-zzstart2	Bei den Rechnungen zur ICE-Aufgabe (Kontext-Aufgabenpool analog zum einführenden Kinokontext) sollten die Kinder bei jeder Aufgabe vorher überlegen, ob sie schriftlich, halbschriftlich, oder im Kopf mit Klammernotation rechnen, und in letzten beiden Fällen geschickt zur rechnen, also eine passende Strategie zu wählen. Die Auswahl der Strategie war dabei vollkommen freigestellt.

Nur Stunden mit »offener« Strategiewahl (2)

Wie Stunden mit »offener« Strategiewahl (1), aber ohne die Stunden des Blocks 02-strat (da hier zwar in Küraufgaben die Strategie frei war, aber in den Stunden größtenteils die Pflichtaufgaben mit erbetener Strategie erarbeitet wurden), und ohne die Stunden der Blöcke 04-ueb und 07-wdhstrat, da hier keine echte Chance auf die Auswahl der Strategien Ergänzen(+, -) bestand (oder Ergänzen erbeten war, wie in 07-wdhstrat3). Die zusätzlichen Einschränkungen in der Auswahl offene Strategiewahl (2) schränken also die Ansicht stark auf Stunden ein, in denen eine echte Chance bestand, Aufgrund des Zahlenmaterials oder der Aufgabenvorschrift auch Strategien des Ergänzens frei zu wählen.

Nur Pre-, Post- und Retention-Test

Hier werden nur die 3 Spalten der Tests nebeneinander angezeigt.

Tabellarische Übersicht der Anzeigeeinschränkung

		Strategiewahl		
Stunden	**erbeten**	**offen(1)**	**offen(2)**	**Tests**
00-pretest		X	X	X
01-kino1		X	X	
01-kino2		X	X	
01-kino3		X	X	
01-kino4	X			
02-strat1	X	[1]		
02-strat2	X	X		
02-strat3	X	X		
02-strat4	X	X		
02-strat5	X	X		
02-strat6FOE	X			
03-strat2-1		X	X	
03-strat2-2		X	X	
03-strat2-3	X			
04-ueb1		X		
04-ueb2		X		
04-ueb4		X		
04-ueb5	X			
05-posttest		X	X	X
06-schradd				
07-wdhstrat1		X	X	
07-wdhstrat2		X	X	
07-wdhstrat3	X	X		
08-schrsub1	X			
08-schrsub2	X			
08-schrsub3	X			
08-schrsub4	X			
09-schrsbueb1				
09-schrsbueb2				
09-schrsbueb3				
09-schrsbueb4		[2]		
10-algvgl1	X			
10-algvgl2	X			
11-zzstart1	X			
11-zzstart2		X	X	
12-retention		X	X	X

1) Eigentlich sollte hier nur die Strategie Schrittweise gerechnet werden, 2 Kinder aber wenden versehentlich Ergänzen(-) an.

2) Obwohl hier nur die schriftliche Subtraktion geübt werden sollte, rechnete Lasse 3 Aufgaben in der Grundvorstellung Differenzbildung zur Kontrolle seiner strukturellen Vermutung.

Aufgabenbearbeitungen im Pre-, Post- und Retentiontest

Tabelle A.1: Kernaufgabenvergleich über Pre-, Post- und Retentiontest

Aufgabe	**657-224**			**426-387**			**763-498**		
Test	Pre	Post	Ret	Pre	Post	Ret	Pre	Post	Ret
Ben	Hi	St	*Sch+*	Hi	*Sch-*	*Sch+* kDif	Hi	*Sch+*	Ver
Benedikt	**I**St	Sch	Ver	**I**St	Sch	Ver	**I**St	Sch	Ver
Eric	Sch	Sch	Sch	Sch	Sch	Alg	Sch	Sch	Ver
Felix	Sch	Sch	Ver	Sch	Sch	Alg	Sch	Sch	Ver
Isabel_Sch	Sch	St	St	RS	St	Alg	RS	St	Ver
Isabel_F	Sch	St	Sch	RS	Hi	Hi	Sch Ver	Ver	Ver
Jonas	Sch	St	St	Sch	Sch	Alg	RS	Ver	Ver
Jule	Sch	St	Sch+ stelg	Sch	Sch	Sch+ stelg	Sch	Ver	Ver
Katharina	Sch	St	Sch	Sch	Sch	Ver	Sch	Ver	Ver
Lasse	Hi	St	Sch+ stelg	Hi	*Sch+* kDif	Ver	Hi	Ver	Ver
Niklas_K	Sch	St	Nb	Sch	Sch	Alg	Sch	Ver	Ver
Niklas_V	Sch	Sch	Sch	*Sch*	Sch	Ver	*Sch*	Sch	Ver
*Noelia**	Sch	St	Sch	Sch	St	Ver	Sch	Ver	Ver
*Priscilla**	Sch	St	**I**St+	Sch	St	Alg	*Sch*	Ver	Ver
*Robin**	Sch	Ver, Sch	Ver	*Sch*	Ver	Ver	*Sch*	Ver	Hi
Sebastian	Hi	Sch	Ver	Hi	Sch	Ver	Hi	Sch	Hi
Tom	**I**Sch	Sch	St	**I**Sch	Sch	Alg	**I**Sch	Sch	Ver
Yannick	St	Sch	St	St	Ver	Alg	St	Ver	Ver

Legende (für Tabelle 6.1 und 6.2): Sch = Schrittweise „mit glatten Zahlen“, *Sch* = Schrittweise „zu glatten Zahlen“, St = Stellenweise, Hi = Hilfsaufgabe, Ver = Vereinfachen, grau unterlegt = Grundvorstellung Komplementbildung (mit Format, + und -), stelg = Variante „Ergänzen stellengerecht“, kDif = Hinweis auf kleine Differenz, RS= Schrittweise am Rechenstrichs; **I** = internalisiert, Alg = schriftlich gerechnet, and. = andere Aufgabe außerhalb der Kernaufgaben, die bemerkenswert erscheint; * = Interviewkind

Tabelle A.2: Pre-, Post- und Retentiontest - Kernaufgaben und K-Rechnungen

Test	**Pre**			**Post**				**Ret**			
Aufgabe	657-224	426-387	763-498	657-224	426-387	763-498	and.	657-224	426-387	763-498	and.
Ben	Hi	Hi	Hi	St	*Sch-*	*Sch+*		*Sch+*	*Sch+* kDif	Ver	
Benedikt	**I**St	**I**St	**I**St	Sch	Sch	Sch		Ver	Ver	Ver	
Eric	Sch	Sch	Sch	Sch	Sch	Sch		Sch	Alg	Ver	
Felix	Sch	Sch	Sch	Sch	Sch	Sch		Ver	Alg	Ver	
Isabel_Sch	Sch	RS	RS	St	St	St		St	Alg	Ver	
Isabel_F	Sch	RS	Sch Ver	St	Hi	Ver	**I***Sch+* 518-321 kDif, **I***Sch-* 750-638	Sch	Hi	Ver	***ISch+*** 663-598 kDif
Jonas	Sch	Sch	RS	St	Sch	Ver		St	Alg	Ver	
Jule	Sch	Sch	Sch	St	Sch	Ver		Sch+ stelg	Sch+ stelg	Ver	
Katharina	Sch	Sch	Sch	St	Sch	Ver		Sch	Ver	Ver	
Lasse	Hi	Hi	Hi	St	*Sch+* kDif	Ver		Sch+ stelg	Ver	Ver	
Niklas_K	Sch	Sch	Sch	St	Sch	Ver		Nb	Alg	Ver	
Niklas_V	Sch	*Sch*	*Sch*	Sch	Sch	Sch		Sch	Ver	Ver	
*Noelia**	Sch	Sch	Sch	St	St	Ver	Ver, Sch 567-375	Sch	Ver	Ver	**I**Sch+ stelg 518-321
*Priscilla**	Sch	Sch	*Sch*	St	St	Ver		**I**St+	Alg	Ver	
*Robin**	Sch	*Sch*	*Sch*	Ver, Sch	Ver	Ver		Ver	Ver	Hi	
Sebastian	Hi	Hi	Hi	Sch	Sch	Sch		Ver	Ver	Hi	
Tom	**I**Sch	**I**Sch	**I**Sch	Sch	Sch	Sch		St	Alg	Ver	
Yannick	St	St	St	Sch	Ver	Ver	*Sch+* 453-178	St	Alg	Ver	

Transkripte

Transkript 1, Stunde 01-2, Part 17, 10.25 - 10.26 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.18	
001	(L hängt den Rechenweg von Eric links neben die anderen Rechenwege an die Tafel)
002	L → alle: Vielleicht findet ihr das ja nicht. Das war Eric.
003	L → Eric: Eric, möchtest du selber, oder soll ich es erklären?
004	Eric → L: (kurze Pause) Das ist im Moment [unverständlich].
005	L → Eric: Ja, ich habe ja gerade gesagt, ich habe die Vier ja auch vorhin überfallen, du kannst einen Moment gucken, aber vielleicht sehen die Kinder schon einmal den Unterschied zu den Aufgaben auf der rechten Tafelseite, Eric hat etwas ganz anderes gemacht. Wer sieht den Unterschied. Ähm, Niklas.
006	Niklas V → L: Der hat addiert und nicht subtrahiert, der hat, ähm, nämlich, 389 plus (betont plus) gerechnet, bis er bei der 526 war, und dann hat er glaube ich die Zahlen zusammengerechnet, und dann kam er auf die Zahl der Leute, die noch sitzen.
007	L → alle: Was hat er für eine Aufgabe gemacht? Da haben wir einen Fachausdruck für. Lasse.
008	Lasse → L: Eine Ergänzungsaufgabe hat er gemacht.
009	L → Lasse: Ja.
010	L → alle: Ok.

Transkript 2, Stunde 01-3, Part 05, 08.39 - 08.40 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.19	
001	Jule → alle: Also ich habe hier erst wieder (zeigt auf 624-24=600) zum glatten Hunderter gerechnet, ähm , das war dann zu 600, da habe ich dann die 24 weggenommen, und dann habe ich von der 600 die 300 weggenommen, und dann habe ich noch, dann habe ich, habe ich die erste 5 noch weggenommen, das war dann 295, und dann von der 295 noch minus 2, das sind 293, und dann habe ich das noch unten zusammengerechnet, 300 plus 7 plus 24 gleich 331. Die ich hier weggenommen habe (zeigt auf 24, 300, 5, 2), die habe ich dann noch einmal zusammengerechnet.
002	L → Jule: Warum?
003	Jule → alle: Ähm, damit ich auf das Ergebnis komme, weil, ich habe die ja weggenommen (betont weggenommen), weil, wenn ich das (zeigt auf 24, 300, 5, 2) minus gerechnet hätte, käme da ja viel weniger raus, und deswegen musste ich das plus rechnen.
004	L → Jule: Danke erst mal.
005	(Jule setzt sich wieder).

Transkript 3, Stunde 01-3, Part 06, 08.40 - 08.43 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.19	
001	L → alle: Jetzt sind einige so langsam wieder in der Aufgabe drin. Wer sagt denn mal die Aufgabe, die sich Jule am Anfang überlegt hat, bevor sie angefangen hat zu rechnen, hat sie ja erst mal was sich überlegt, nachdem sie die Aufgabe gelesen hat. Was hat sie sich da für eine Aufgabe ... [Unterbrechung durch Unterrichtsstörung, Noelia wird ermahnt] Welche Aufgabe hatte sich Jule überlegt? Prisci.
002	Priscilla → L: Sie hat als erstes Ergänzen gemacht, weil, ...

003	L → Priscilla: Ich möchte wissen welche Aufgabe sie sich überlegt hat.
004	Priscilla → L: Ach so. 624 minus wie viel gleich 293.
005	L → alle: Hmhm, das ist genau richtig, und die Jule hat das ganz toll gemacht, sie hat die Aufgabe, die sie sich überlegt hat, (zeigt auf 624-331=293) hier oben erst einmal hingeschrieben. Ich schreibe die noch einmal mit blau nach, damit ihr das sehen könnt. Die Aufgabe (schreibt 624 in blau nach) minus wie viel (schreibt - und den Strich unter 331 nach), ist 293 (schreibt = 293 nach), die hatte sie sich überlegt und hat die oben drüber geschrieben. Das fand ich ganz ganz toll. Und dann hat sie an was gedacht, was wir im zweiten Schuljahr schon gelernt haben. Dann hat sie nämlich den Strich drunter gemacht. Warum haben wir immer den Strich drunter gemacht (zeigt auf den Strich unter 624-331=293). Lasse.
006	Lasse → L: Damit man erkennt, dass das die Aufgabe ist, die sie ausrechnen will.
007	L → Lasse: Hmhm.
008	Lasse → L: Und ähm minus wie viel, da muss man ja eigentlich noch mal einen Strich machen, weil, sonst erkennt man ja gar nicht, dass sie ’minus wie viel’ rechnet.
009	L → Lasse: Genau.
010	L → alle: Und dann ist auch hinterher das Ergebnis in der Aufgabe unterstrichen. Das habe ich jetzt leider bei einigen ein bisschen vermisst. Da denkt ihr bitte daran.
011	[kurze Unterrichtsstörung, Geschubse im Theaterkreis]
012	L → alle: Also, Ergebnis unterstreichen ist wichtig, und den Strich machen, wenn deine Nebenrechnung anfängt.

Transkript 4, Stunde 01-3, Part 07, 08.43 - 08.45 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.19	
001	L → alle: Und dann hat Jule noch etwas gemacht, sie hat ja jetzt oben ihren Rechenweg erklärt, ...
002	Ein Kind → L: Sie hat einen Rechenstrich gemacht.
003	L → alle: Ist denn der Rechenstrich genau das, was oben in der Rechnung steht, oder ist das ein anderer Rechenweg? Guck erst genau hin. (wartet ein paar Sekunden) Niklas.
004	Niklas_V → L: Ähm, das ist eigentlich genau der gleiche, weil, Jule nimmt nämlich genau das gleiche weg (L zeigt mit einem Zeigestab auf die Zahlen über den Bögen), bloß, sie rechnet das dann nicht beim Rechenstrich zusammen.
005	L → alle: Aha. Jetzt weiß man noch gar nicht, wo das Ergebnis steht, oder? Beim Rechenstrich?
006	Einige S → L: Doch.
007	Ein S → L: Doch sie hat es doch unterstrichen. Oder.
008	[Gemurmel]
009	L → alle: Nee... Sie hat nur das (zeigt auf die unterstrichene 331 unter der Nebenrechnung) Ergebnis hier unterstrichen, aber hier (zeigt auf die 293 am Rechenstrich), das hat sie ausradiert, das sieht man jetzt zwar nicht, das war nämlich nicht das Ergebnis, das war ja das schwierige.
010	Jule → L: Ja, das habe ich auch hinterher gesehen.
011	L → alle: Wo steht denn jetzt das Ergebnis? Beim Rechenstrich? Katharina?
012	Katharina → L: Das steht ja noch gar nicht da.
013	L → Katharina: Was musste sie denn noch machen?

014	Katharina → L: Da muss sie noch, das, die Zahlen noch zusammenrechnen, die sie minus gerechnet hat.
015	L → Katharina: Welche Zahlen, geh mal nach vorne und zeig...
016	Katharina → L: Die auf dem Bogen.
017	L → Katharina: Ah, ja.
018	L → alle: Die auf dem Bogen stehen (zeigt die Zahlen auf dem Bogen, macht dabei die Bewegung eines großen Bogens). Die müsste sie noch alle zusammenrechnen.
019	L → Lasse: Bitte.
020	Lasse → L: Oder sie kann auch erst mal die Aufgabe noch mal aufschreiben, die sie ausrechnen will, und dann das Ergebnis drunter machen, wie ich das das letzte Mal gemacht habe, und dann noch die Zahlen auf dem Bogen mit rot nachschreiben.
021	L → Lasse: Ja. Das wäre auch noch eine Möglichkeit, damit man erkennt, wo das Ergebnis steht.
022	L → alle: Also, Jule hat jetzt eine Minus (betont Minus, zeigt auf 324-331=293) Ergänzungsaufgabe gemacht. Ganz schön schwer. Fand ich das.

Transkript 5, Stunde 01-3, Part 10, 08.50 - 08.51 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.21	
001	L → alle: So, dann habe ich noch einen Weg, von Niklas V[], der hat den Weg von Eric genommen aus der Stunde davor. Deswegen steht hier Niklas V[], und der hat gesagt, ich habe Erics Weg. Ne, das hatte ich richtig verstanden. Und, der Niklas hat auch seine Aufgabe oben drüber geschrieben (zeigt auf 293+331=624) und den Strich gemacht wie Jule, toll, er konnte sich auch erinnern an das zweite Schuljahr, aber, der hat ja noch was ganz anderes gemacht, der hat ja eine Plusaufgabe gemacht.
002	Einige S: [raunen] Ach so...
003	L → Niklas V: Weißt du wieder, wie du gerechnet hast?
004	Niklas V → L: Ja.
005	L → Niklas V: Ja, lassen, wir erst mal die anderen Kinder fragen, ob die das herausfinden, deine Idee. Isabel F[].
006	Isabel F → L: Der hat auch Ergänzungsaufgabe gemacht, nur, nur die mit plus.
007	L → Isabel F: Hmhm. Und wie hieß dann die Aufgabe am Anfang, die er sich überlegt hat? Bevor er gerechnet hat?
008	Isabel F → L: 293 plus wie viel gleich 624.
009	L → alle: (L schreibt in blau nach) und da mache ich jetzt mal wieder den Strich hin (Strich unter 331), damit man weiß, was ich eigentlich ausrechnen möchte. Tom.
010	[Tom hat es auch so gerechnet]

Transkript 6, Stunde 01-3, Part 27, 10.26 - 10.30. Uhr, Reflexionsphase, zu Abbildung 4.20	
001	L → alle: Gut, jetzt haben 2 Kinder hier einen Weg angeschrieben, ich habe es nochmal oben drüber geschrieben, ich habe es gerade gar nicht selber gesehen, dass Prisci es daneben geschrieben hat, und ich glaube, Robin meint mit der 1 im Kreis, es geht um die Aufgabe 1. Also: In dem Kino sind noch Plätze frei. Ja, und 293 Leute sind schon da. Die Aufgabe hat jetzt die Prisci an die Tafel geschrieben und der Robin. Und wenn ihr euch

	die Aufgabe anguckt, einmal sind die unterschiedlichen Säle, die sie genommen haben, da. Aber die haben auch ganz andere Aufgaben gerechnet. Wer sieht denn den Unterschied bei der Aufgabe. Jetzt nicht mit den Zahlen, sondern nur die Aufgabe. Warum haben die denn was ganz anderes gerechnet. (2 Kinder melden sich) Das sieht keiner sonst? Nur 2 Kinder? Felix, du müsstest zur Tafel gucken, dann könntest du das sehen. Und Yannick tut seine Jacke weg, dann kann er sich konzentrieren. Das müssen aber noch mehr sehen, ich warte noch einen Moment. Tom.
002	Tom → L: Also, die hat, 293 plus wie viel Leute dann noch in dem Kinosaal sitzen können, und dann hat die, äh, dann hat sie erst bis zum Hunderter ergänzt, ...
003	L → Tom: Ja, das, den Rechenweg, gleich.
004	L → alle: Also, was hat Prisci sich für eine Aufgabe überlegt?
005	Tom → L: Also, die wollte wissen, wie viele Leute noch ins Kino reinpassen.
006	L → Tom: Ja, das wollte ja Robin auch wissen. Was für eine Aufgabe hat sie denn gemacht. Was für... Ich frage vielleicht anders. Vielleicht frage ich zu blöd. Welchen Aufgabentyp hat sie genommen. [Eine Störung (Geschubse) im Theaterkreis wird besprochen, ein Kind muss sich umsetzen.] Was hatte ich jetzt gefragt. Ist die Frage weg bei einigen Kindern? Was wollte ich wissen. Ben.
007	Ben → L: Was für ein Aufgabentyp das ist. Bei Prisci ist das jetzt, ähm, plus, und bei Robin ist das fast nur minus und eine Plusaufgabe hinterher.
008	L → Ben: Nimmst du dran.
009	Ben → Katharina: Katha.
010	Katharina → L: Prisci hat sich eine Ergänzungsaufgabe überlegt.
011	Isabel Sch → L: Plus eigentlich.
012	Katharina → L: Ja, plus eigentlich.
013	L → Katharina: Nimmst du dran, es melden sich noch mehr.
014	Katharina → Lasse: Lasse.
015	Lasse → L: Katharina hat eine Plus-Ergänzung und Robin hat eine Minus-Ergänzung. Das ist genau das Gegenteil, nur dass es beide Ergänzungsaufgaben sind.
016	L → alle: Hmhm. Obwohl es genau (zeigt auf Aufgabe 1 an der Tafel) Aufgabe 1 war bei beiden.
017	Lasse → L: Hmhm. Und wir haben auch, ähm, Prisci hat die 293 vorne, als, äh, Anfang von der Rechnung gemacht, und Robin hat sie als Ergebnis genommen, also von der Ergänzungsaufgabe, die er sich überlegt hat.
018	L → alle: Hmhm. [Wieder eine kurze Störung im Theaterkreis]

Transkript 7, Stunde 02-2, Part 23, 09.14 - 09.15 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	[L ruft Jule, Benedikt, Lasse, und Robin in den Fliesenkreis]
002	L → 4: So, ich möchte jetzt mit euch die erste Aufgabe besprechen. Und zwar die 381 minus...
003	Lasse → L: 297.
004	L → 4: 297. Ihr habt jetzt eine Minusergänzungsaufgabe gemacht, ne?
005	Robin → L: Ja.
006	Lasse → L: Ne, ich habe eine Plusergänzungsaufgabe da gemacht.

007	L → Lasse: Oh, dann habe ich dich falsch gerufen. Ist nicht schlimm, dann kannst du ja deinen Rechenweg gleich erklären.
008	Lasse → L: Ich hab...
009	L → 4: Ne, erst mal fängt jetzt mal Benedikt an. Wir legen Benedikts in die Mitte (legt Benedikts Blatt in die Mitte), so dass alle sehen können.
010	L → Jule: Ich glaube, wir beiden müssen den Platz wechseln, sonst kannst du nicht gut gucken (beide tauschen den Platz).

Transkript 8, Stunde 02-2, Part 24, 09.15 - 09.16 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	L → Benedikt: So, was hast du jetzt aus der Minusaufgabe gemacht, Benedikt?
002	Benedikt → 4: Ähm, eine Minusergänzungsaufgabe...
003	L → 4: Ja.
004	Benedikt → 4: ...habe ich jetzt gemacht. Und ich hab hier erst mal 381 minus 81 gemacht, dass ich auf den Hunderter, auf nen glatten Hunderter kam.
005	L → 4: Ja.
006	Benedikt → 4: Und dann habe ich das noch mal minus 3 gerechnet, und dann war ich schon da (zeigt auf sein Blatt).
007	L → 4: Hmhm.
008	Benedikt → 4: Und dann musste ich die zwei Zahlen zusammenrechnen, und dass ich da - und dann wusste ich, 84. Ja. 84.

Transkript 9, Stunde 02-2, Part 25, 09.16 - 09.17 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	L → 4: So, Jule hat auch eine Minusergänzungsaufgabe gemacht (legt Jules Blatt in die Mitte), jetzt gucken wir mal,
002	Jule → 4: Ich habe...
003	L → Jule: Und du hast es aber anders gemacht, ne.
004	Jule → 4: Ja. Ich habe erst den Zehner da weggenommen, dann war ich bei 301, und dann musste ich noch minus 10, weil, dann war ich ja schon bei 291, aber dann war ich ja schon, habe ich ja schon zu viel weggenommen, also musste ich dann noch plus [Tonausfall 1s] 97 und dann a[Tonausfall 1s] 10 gleich 90 [Tonausfall 1s], dann weil ich hier (zeigt auf ihr Blatt) die 6 plus gerechnet habe, muss ich die am Schluss auch wieder minus rechnen, und das ist 84.
005	L → 4: Aber ich möchte jetzt noch einmal wissen: Wer versteht, warum Jule nach der 80 noch die 10 weggenommen hat? Was wollte sie damit erreichen?
006	L → Jule: (deutet Jule, zu schweigen).
007	Lasse → 4: Sie wollte auf die 90 kommen,
008	L → 4: Genau.
009	Lasse → 4: weil das ja auch vom Ergebnis der Zehner ist, erst vorne.
010	L → 4: Genau. Sie wollte den Zehner vom Ergebnis bekommen (guckt Jule an).
011	Jule → 4: (nickt).

012	Lasse → 4: Und dann hat sie halt noch den Hunderter [Tonausfall 1s] weggenommen, und dann hat sie ihm noch die 6 zu [Tonausfall 1s].
013	Jule → 4: musste ich dann aber hinterher noch wieder wegnehmen.
014	L → Jule: Weil, das war ganz schön schwer, ne, musste man ganz schön hin- und her rechnen.

Transkript 10, Stunde 02-2, Part 26, 09.17 - 09.18 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	L → 4: So, jetzt kommt Robin.
002	Robin → 4: Ja, mir ist gerade aufgefallen, dass ich da was falsch gemacht habe, aber das kann ich auch so erklären. Also, ich habe erst 397 minus 100 das ist 297 gerechnet, weil, ich zum nächsten Hunderter kommen wollte, dann habe ich noch... ähm. Äch. Da ist irgendwas falsch.
003	Lasse → Robin: Ja, du hast die 200 und 300 vertauscht. Hier steht 200 und da 300...
004	Jule → Robin: Du musst dann einfach die...
005	L → Robin: Du hast eine Plusergänzungsaufgabe erst gemacht. Und dann hast du eine Minusergänzungsaufgabe mittendrin gemacht. Auf einmal. Ne. [Tonausfall 2s] Wenn man das jetzt (deckt etwas ab auf Robins Blatt) zu[Tonausfall 1s] Ja, da wollen wir mal gucken, warum. Wenn wir das jetzt zuhalten, ...
006	Lasse → 4: 397...
007	L → 4: Ne, das stimmt ja dann auch nicht (guckt fragend)...
008	Benedikt: Doch. Da (zeigt auf sein Blatt) 84. (zeigt auf Robins Blatt) 84.
009	L → Robin: Du hast aber eine Plusergänzungsaufgabe gemacht. Erst hier. Erst bis zur 397, und dann hat er von der 397 noch die Sachen weggenommen.
010	Benedikt → L: Einen neuen Trick gefunden, könnte man sagen.
011	L → 4: Jaha, ein neuer Trick. Das ist ein Trick, oh, der steht aber glaube ich schon da (guckt zum Rechenstrategien-Plakat). Müssen wir gucken, welcher Trick das ist.
012	L → Robin: Weißt du was, Robin, weißt du, was du mal machen kannst? Du kannst ja mal gucken, ob du den Trick, ehm (guckt zum Rechenstrategien-Plakat), bei den Rechenstrategien findest.
013	(Robin steht auf und geht zum Plakat)

Transkript 11, Stunde 02-2, Part 27, 09.18 - 09.18 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	L → 3: So, jetzt kommt noch Lasse (legt Lasses Blatt in die Mitte).
002	L → Jule: Jule, guckst du bitte?
003	Lasse → 3: Ich hatte eine Plusergänzungsaufgabe, da habe ich Dreihun... Das war ja die Aufgabe 381-297, und da habe ich 381 plus - das wusste ich ja noch nicht - und dann ist 297, da musste ich also sozusagen den Unterschied ausrechnen. Aber mir fällt auch gerade auf, dass ich die Zahlen vertauscht habe.
004	L → 3: Jaha, das stimmt so nicht, ne.
005	Lasse → 3: Hmhm, da hätte wenn schon minus hingemusst,
006	L → 3: Hmhm.
007	Lasse → 3: aber die Zahlen [unverständlich] vertauscht [unverständlich].

008	(Robin kommt zurück in den Kreis)
009	L → Lasse: Jaha, dann gehst du mal und verbesserst den nochmal.
010	Lasse → 4: Ich hol eben einen Stift.

Transkript 12, Stunde 02-2, Part 28, 09.18 - 09.18 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.27	
001	Robin → 4: Ich glaube, das ist eine Hilfsaufgabe.
002	L → Robin: Das glaube ich auch, ne. Aber ist dann hinterher schwer, das rauszufinden.

Transkript 13: Stunde 07-2, Part 05, 09.12 - 09.14 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.29	
001	Priscilla → L: (ist bei der Aufgabe 789-167) Ich weiß nicht, was ich da für eine Rechenstrategie nehmen soll. Weil Stellenweise und Schrittweise habe ich jetzt schon so oft genommen.
002	L → Priscilla: Vielleicht machst du doch mal deinen Trick von vor den Ferien, ähm, Plusergänzen, und dass man dann sofort die Zahl, den Einer bekommt, das war doch dein Trick vor den Ferien. Kannst du den noch?
003	Priscilla → L: Glaube nicht.
004	L → Priscilla: Plusergänzen. Wie heißt denn dann die Aufgabe, wenn du eine Plusergänzungsaufgabe schreibst.
005	Priscilla → L: Ähm, 167 plus wie viel gleich 789.
006	L → Priscilla: Ja. Und dann hattest du doch die Idee, den Einer hinzukriegen, weißt du das noch? Schreib mal die Ergänzungsaufgabe auf.
007	(L begibt sich kurz zu einem anderen Kind, kommt zurück).
008	L → Priscilla: Plus wie viel gleich?
009	Priscilla → L: Ach so. 789.
010	L → Priscilla: Und dann hattest du doch die Idee, dass du jetzt so viel dazu tust...
011	Priscilla → L: Ach so.
012	L → Priscilla: Weißt du noch?
013	Priscilla → L: Ja, jetzt muss ich hier 7 plus wie viel = 9, ...
014	L → Priscilla: Ja, dann schreib das mal auf.
015	(L geht kurz zu anderen Kindern, kommt zurück).
016	L → Priscilla: Wie hast du das denn jetzt so schnell rausgekriegt?
017	Priscilla → L: Ich hab...
018	L → Priscilla: Ich möchte bitte die einzelnen Schritte, Zwischenschritte sehen. Prisci.
019	L → F: (F geht herum, beobachtet, und macht sich Notizen zu den Schülerlösungen, kommt gerade an den Tisch von Priscilla.) Guck mal, was Prisci macht.
020	F → L: Was denn. Wo denn (guckt Priscilla über den Rücken, auf Priscillas Blatt).
021	L → F: Die macht Plusergänzen und hat sofort das Ergebnis.
022	L → Priscilla: Schreibst du mir mal bitte, wie du das gemacht hast? Die einzelnen Rechenschritte?
023	(F geht auf die andere Seite des Tisches, beobachtet die Szene von vorn.)

024	L → Priscilla: Die einzelnen Plusaufgaben, die du gerechnet hast. Nicht mit Worten. Sondern mit Zahlen.
025	Priscilla → L: Ach so.
026	L → Priscilla: Du hast ja glaube ich mehrere Schritte gemacht, ne.
027	Priscilla → L: Als erstes 7+2.
028	L → Priscilla: Ja, aufschreiben.
029	Priscilla → L: Ich hab als erstes 7 plus wie viel gleich 9, das war 2, habe ich 2 hingeschrieben, dann habe ich 60 plus wie viel gleich 80, das war 20, habe ich eine 2 hingeschrieben, dann habe ich 100 plus wie viel gleich 700, dann habe ich da ne 6 hingeschrieben.
030	L → Priscilla: Ja. Ok. Gut. Weiter.
031	(L Geht weiter, berät andere S.)

Transkript 14, Stunde 12-n, Part 20, 10.39 - 10.42 Uhr, Interview, zu Abbildung 4.30	
001 – 007	[…] (Interview F ↔ Priscilla (P) beginnt. P schreibt Namen und Datum auf das Blatt.)
008	F: Gut. Hier steht.
009	P: Rechne halbschriftlich und schreiben deinen Rechenweg.
010	F: Ja.
011	P: Hm (überlegt). Da rechne ich... (überlegt). Stellenweise? [unverständlich]
012	F: Hm? Bitte?
013	P: Eigentlich Stellenweise, aber das ist mir ein bisschen zu lang.
014	F: Ist zu lang? Zu viel Arbeit?
015	P: (nickt)
016	F: Ok, dann mach es dir einfacher.
017	P: Ja, Ergänzen plus, man kann halt gut von dem Einer bis zur 7 rechnen.
018	F: Ja, dann versuch es. Mach mal.
019	P: (schreibt 224+433=657, schreibt oben 657 als Ergebnis.)
020	F: So, das ging ja jetzt da blitzartig...
021	P: Ach nein! (radiert die 657 oben weg).
022	F: War die falsch?
023	P: (nickt, radiert weiter). Da kommt die 433 hin (schreibt 433). So, jetzt ist es richtig.
024	F: Hmhm. Jetzt erklär mal, wie du das gerechnet hast.
025	P: Hm. Jetzt hab ich die Zahl hingeschrieben (tippt auf 224), die man minus nimmt, und dann haben ich vom Einer zum Einer und vom Zehner zum Zehner und dann vom Hunderter zum Hunderter.
026	F: Ja, müssen wir noch mal langsam. Von welchem Einer zu welchem Einer?
027	P: Ähm, von, von der 4 (zeigt auf die 224 hinten)
028	F: Ja.
029	P: bis zur 7
030	F: Ja.
031	P: sind 3.

032	F: Sind 3.
033	P: Und dann von der 20 bis zur 50, sind 30, und von der 200 bis zur 600 sind 400.
034	F: Ok. Das ging ja jetzt super einfach, ne.
035	P: Hmhm.
036	F: Ähm, hier steht: Welchen Namen gibst du deinem Rechenweg (zeigt unten)?
037	P: Ähm, Ergänzen plus.
038	F: Ergänzen plus, ok. Kannst du hinschreiben, unten oder oben.
039	P: (schreibt unten „Ergänsen(+)“).
040	F: Jo.
041	P: Ist da nicht irgendwo ein Fehler drin?
042	F: Ja, beim Schreiben. Das kommt von ganz.
043	P: Von ganz? Ach so (radiert das s, schreibt z).
044	F: Jawoll, jetzt stimmt auch sogar das, richtig geschrieben.

Transkript 15, Stunde 02-3, Part 12, 09.14 - 09.15 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.34	
001	Robin → L: Mit der Aufgabe kann man doch gar keine Hilfsaufgabe machen.
002	L → Robin: Du bist wieder ganz durcheinander. Was solltest du wegnehmen.
003	Robin → L: 297.
004	L → Robin: Ja. Und was hast du jetzt weggenommen?
005	Robin → L: Au. Ja. Stimmt.
006	L → Robin: Was hast du zuerst weggenommen?
007	Robin → L: 300.
008	L → Robin: Ja.
009	Robin → L: Damit man auf den Hunderter kommt, dann noch 1, damit man auf den Einer kommt. (Hat vermutlich gerechnet: 598-___=297, 598-300=298 (Hunderterstelle stimmt), 298-1=297 (Einerstelle stimmt), ob daraus dann 598-297=301 oben wurde, lässt sich nicht mehr erkennen).
010	L → Robin: Nein, du bist jetzt wieder bei Ergänzen.
011	Robin → L: Ja...
012	L → Robin: Du wolltest die Hilfsaufgabe nehmen: Ich nehme erst 300 weg.
013	Robin → L: Ja. (Erik, sitzt gegenüber, schaut neugierig zu.)
014	L → Robin: Wie viel solltest du denn nur wegnehmen?
015	Robin → L: 200?
016	L → Robin: Wie hieß denn die Aufgabe?
017	Robin → L: Ach so. 200. Weil man ja...
018	Erik → Robin: Nein, guck doch mal, 297 steht da ja. Und dann wäre der nächste Hunderter ja 300. Und jetzt hast du ja 3 dazu getan (zeigt mit seinem Stift auf das Rechenblatt von Robin, vermutlich auf -300).
019	Robin → L: Ach so, dann muss man ja auch noch 3 wieder dazu tun.
020	L → Robin: Dazu tun, genau. Und du hättest jetzt ja - 301 gerechnet.

021	Robin → L: Da hätte man ja 3 dazu tun müssen.
022	L → Robin: Ja. Also müsste dann die Aufgabe heißen (zeigt vermutlich auf die Zeile unter -301)?
023	Robin → L: 298+3.
024	L → Robin: Ja [geht].

Transkript 16, Stunde 07-3, Part 05, 08.49 - 08.55 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.37	
001	(Beratung im Fliesenkreis holen sich Felix, Ben, Katharina und Eric.)
002	[Zunächst wird besprochen, wie man aus 306-286=___ zur Ergänzungsaufgabe 286+___=306 kommt.]
003	L → 4: So, und wenn du dir jetzt die Plusaufgabe, die Ergänzungsplusaufgabe dir überlegt hast,
004	L → Ben: Schreib sie jetzt bitte hin, Ben, heute noch.
005	Erik → L: Kann ich denn jetzt sofort von der 286 zur 300 rechnen?
006	L → Erik: Du kannst das machen wie du das möchtest. Wie du es für günstig hältst. Dann überleg jetzt mal.
007	(Die S rechnen die Aufgabe 286+___=306.)
008	[Die L gibt vor allem Hinweise zur Notationsform.]
009	L → alle: So, jetzt muss ich mal eben gucken, ihr habt alle gleich gerechnet, bis auf Katharina. Legt ihr es mal so hin, dass alle es sehen können. Eric, Ben und Felix. Was habt ihr zuerst gemacht. Oder Katharina. Kannst du das vielleicht erkennen, was die zuerst gemacht haben.
010	Katharina → L: Ja, die haben zuerst bis, bis zu dem Hunderter gegangen,
011	L → Katharina: Ja.
012	Katharina → L: und dann haben die noch plus die 6 gerechnet, weil die 6 dann ja noch gefehlt hat.
013	L → Katharina: Ja, Moment. Und jetzt gucken die anderen sich Katharinas Weg an, was hat Katharina gemacht? Eric?
014	Eric → L: Erst bis zum nächsten Zehner, dann bis zum Hunderter, und dann zu der Zahl.
015	L → alle: Hmhm. Und wenn ihr euch das Ergebnis jetzt anguckt, hättet ihr das vielleicht auch schneller machen können? In weniger Schritten?
016	Katharina → L: Irgendwie schon, weil die 286 so nah an einem Hunderter ist. An 300 ist.
017	L → alle: Ja, das haben ja die anderen gemacht. Die haben 14 ergänzt. Aber jetzt guckt euch doch mal die beiden Zahlen an. 286 und die 306. Fällt euch da nichts auf?
018	Eric → L: Ach ja, das ist ja eigentlich - die Einer sind ja 6 und 6, und der Hunderter ist ja, also hier, um 1 mehr, zu der 300, weil das ist ja 286 bis zur 306, ist ja schon, also über der 300, da braucht man ja eigentlich nur noch 286 bis zur 306 zu rechnen.
019	L → alle: Ja, genau. Was war nämlich bei dieser Aufgabe so leicht, warum konnte man eigentlich in einem Schritt das jetzt sofort machen?
020	Ben → L: Weil der Einer gleich ist.
021	L → alle: Weil der Einer schon bei beiden Zahlen gleich war, der war ja schon 6, da musste man ja eigentlich gar nichts mehr gucken. Nur noch die Zehnerziffern, ne. Ok. Gut.
022	[S sollen die 2. Aufgabe 332-281 probieren.]

Transkript 17, Stunde 01-1, Part 07, 08.50 - 08.51 Uhr, Einführungsphase, ohne Abbildung	
001	L → alle: Du schreibst die Aufgabe noch einmal auf dein Blatt. Und dann überlegst du, was kann man dort rechnen, und wie. Und dann schreibst du alles auf, auch Zwischenergebnisse und Nebenrechnungen, wie du es vom Addieren kennst. Und wichtig ist, wenn du eine Aufgabe gefunden hast, dass du ganz genau deinen Rechenweg aufschreibst. Ganz genau. Und zwar jeden Schritt, [unverständlich], alles was du rechnest. Jeden einzelnen Rechenschritt.
002	L → alle: Und dann, wer sich an den Rechenstrich erinnert, der kann auch an dem Rechenstrich seinen Rechenweg aufschreiben, dann sieht man besser, wie du gerechnet hast. [unverständlich].

Transkript 18, Stunde 01-3, Part 13, 08.56 - 09.03 Uhr, Einführungsphase, zu Abbildung 4.41 und Abbildung 4.42	
001	L → alle: (Legt ein neues leeres Blatt in die Mitte). Wer schafft das, den Rechenweg von Niklas auf dem Rechenstrich vorzumachen. Wer traut sich. Wir helfen. Tom, willst du es mal versuchen? (Tom nickt und kommt in den Kreis) Setzt du dich vielleicht auch so hin wie Katharina, das war glaube ich ganz gut, da konnten alle ganz gut sehen. Wer sagt denn noch einmal die Aufgabe, die Niklas sich überlegt hat? Damit Tom jetzt weiß, wo es los geht?
002	Ein S → L: Äh, welcher Niklas.
003	L → alle: Niklas K[]. Ja, Niklas, die haben ja beide die gleiche Aufgabe sich überlegt. Niklas, sagst du noch mal.
004	Niklas K → Tom: Ähm, du musst jetzt erst mal...
005	L → Niklas K: Ne, sag einfach die Aufgabe.
006	Niklas K → L: Ähm, die erste Aufgabe war 293...
007	L → Niklas K: Die Aufgabe, die du dir überlegt hattest.
008	Ein S → Niklas K: Die unterstrichen ist.
009	Niklas K → L: 293 plus 331...
010	L → Niklas K: Nein (schüttelt den Kopf).
011	Niklas K → L: plus wie viel gleich 624.
012	L →alle: (nickt). Wie nennt man so eine Aufgabe, die er sich überlegt hat? Isabel.
013	Isabel F → L: Ergänzungsplusaufgabe.
014	L → alle: Genau. Eine Ergänzungsplusaufgabe. Was muss der Tom jetzt tun. Prisci.
015	Priscilla → Tom: Als erstes 293 hinschreiben (Tom schreibt 293).
016	L → Priscilla: (Nickt) Das hat Katharina vorhin schon so toll erklärt.
017	Priscilla → Tom: Und dann noch einen Bogen machen.
018	L → Priscilla: Ja (Tom macht den großen Bogen). Und was hat jetzt der Niklas gemacht?
019	Priscilla → L: Ähm, der hat dann erst plus Vierhundert (betont Vier) gerechnet.
020	L → alle: Wer hat denn jetzt eine Idee, warum der Niklas so etwas macht.
021	Robin → Tom: Tom, wir haben ja gleich keinen Platz mehr (Tom schüttelt den Kopf).

022	Einige S: [aufgeregtes Getuschel]
023	Tom → Robin: Da muss ich doch jetzt wieder hier zurück.
024	Ein S → alle: Ach so...
025	L → alle: Wo landet er denn, wenn er 400 dazu getan hat? Benedikt.
026	Benedikt → L: Bei 693. (Tom schreibt die 693)
027	Eine S → alle: Ach so...
028	L → alle: Und der Tom hat das schon gerade überblickt, mit seinem Rechenstrich. Was hat der Tom sofort gemerkt. Niklas.
029	Niklas V → L: Er muss jetzt auch noch minus rechnen.
030	L → Niklas V: Warum (Tom zeichnet - 70, 623 und +1, 624 ein).
031	Niklas V → L: Weil er ja zu viel dazugenommen hat. Weil jetzt sind ja schon über 624 und er will zur 624 kommen.
032	L → alle: Ja. Isabel. (gibt Tom einen roten Stift, der unterstreich die 624)
033	Isabel F → L: Er hat, Niklas hat ja, ähm, erst plus den Einer gerechnet, aber dann hat Nik erst plus den, ähm, Zehner, ähm, Hunderter gerechnet, um zur 624 zu kommen, und dann waren ja schon zu viel, und dann hat er noch wieder zurückgenommen, die er da noch wieder zurücknehmen braucht, und dann hatte er dann einen zu wenig, weil er hat ja dann auf einen Zehner minus genommen, und dann hatte er einen zu wenig, und dann hat er noch einen dazu getan.
034	L → alle: Ja, das machen wir aber der Reihe nach. Die 400 (zeigt auf die Ziffer 6 in 293+400=693 in Niklas Ks Rechnung an der Tafel) meinst du hat er genommen, damit er erst mal den Hunderter hatte. Stimmt das?
035	Niklas K → L: Hmhm.
036	L → alle: Ok, und jetzt, was hat er als nächstes gemacht?
037	Yannick → L: Minus gerechnet.
038	L → Yannick: Was denn.
039	Yannick - L: Dreih. Ähm Zweihundert. Ähach. 693 minus 70.
040	L → alle: Isabel hat das schon vorhin erklärt. Warum hat er denn jetzt genau minus 70 genommen.
041	Ein S → alle: Ach so...
042	L → Niklas V: Niklas.
043	Niklas V → L: Weil er auf die 20 gekommen ist...
044	L → Niklas V: Auf die Zehnerzahl (zeigt auf die Ziffer 2 in 693-70=623 in Niklas Ks Rechnung an der Tafel.).
045	Niklas V → L: Auf die Zehnerzahl, wo er hinkommen möchte, und jetzt fehlt ihm ja nur noch einer, und deswegen hat er nur noch plus einen gerechnet.
046	Robin → alle: Plus.
047	Priscilla → alle: Das ist ja jetzt irgendwie ganz...
048	Ben → alle: Das geht doch.
049	Lasse → alle: [unverständlich]
050	Einige S → alle: [aufgeregtes Lachen]
051	L → alle: Ja. Aber jetzt weiß ich überhaupt nicht, wo das Ergebnis steht.
052	Einiges S → alle: [aufgeregtes Gemurmel]

053	L → alle: Wie kriegt man denn jetzt das Ergebnis raus. Das kann ich hier (zeigt auf Niklas Ks Rechenweg an der Tafel) auch nicht erkennen, das Ergebnis.
054	L → Niklas K: Niklas, wie hast du denn jetzt das Ergebnis herausgefunden?
055	Niklas K → L: Da muss ich jetzt erst mal selber noch mal überlegen.
056	Ben → alle: Hat er doch schon unterstrichen.
057	L → Tom: (Blickt in Richtung Toms Blatt, der gerade - nicht erkennbar - auf eine Zahl zeigt, vermutlich auf die rot unterstrichene 624) Das ist nicht das Ergebnis.
058	Einige S → alle: [aufgeregtes Getuschel]
059	L → alle: Wo finde ich jetzt das Ergebnis. Tom.
060	Tom → L: [unverständlich, murmelt etwas]
061	L → Niklas V: Niklas.
062	Niklas V → L: Er muss die Zahlen immer plus und minus gerechnet haben, ähm, also erst die 400 minus die 70, sind ähm 330, und dann 330 plus 1 sind 331.
063	L → Tom: Kannst du die Aufgabe mal in rot da drunter schreiben.
064	L → alle: Wer kann das nochmal wiederholen. Ist ganz schön schwer. Prisci.
065	Priscilla → L: Weil ja jetzt erst 400, da muss man 400 minus 70, das ist 330, (Tom schreibt 400-70=330) und dann 330 (Tom schreibt 330) minus, äh.
066	Ein S → Priscilla: Plus.
067	Priscilla → L: Ach so. Plus...
068	Niklas V → Priscilla: Steht doch da oben.
069	Priscilla → L: ... eins, und das ist 331 (Tom schreibt +1=331).
070	L → alle: Ja, so findet man dann das Ergebnis.
071	Priscilla → Tom: (zeigt auf das Blatt) Kannst du [unverständlich].
072	L → Priscilla: Ja, das ist [unverständlich].
073	L → alle: Ok. Ganz schön kompliziert (Tom setzt sich wieder).

Transkript 19, Stunde 01-3, Part 28, 10.30 - 10.35 Uhr, Reflexionsphase, zu Abbildung 4.20	
001	L → alle: Wer kann den jetzt Priscis Weg erklären, was Prisci gemacht hat. Und Prisci darf dran nehmen und helfen zur Not.
002	Prisci → Jule: Ähm, Jule.
003	Jule → L: Also, Prisci hat eine passende Ergänzungsaufgabe ausgesucht, 293 plus wie viel gleich 381, und dann hat sie erst zum nächsten Zehner gerechnet, äh, zum nächsten Hunderter, 293+7=300, und dann hat sie noch, weil sie ja zu 381 kommen will, hat sie da noch 300+80=380 schon mal gerechnet, und dann 380+1, dann hatte sie das, da hat sie nur das Gleichzeichen vergessen.
004	L → Jule: Ja, das ist nicht schlimm (ergänzt das bislang noch fehlende = in der Zeile 380+1=381 an der Tafel)
005	Einige S → alle: Au, hm.
006	Jule → L: Dann hat sie noch hinterher die Zahlen in der Mitte, die, wo, die sie plus gerechnet hatte, hat sie dann noch zusammengerechnet, 7 plus 1 gleich 80 plus 8 gleich 88. Und dann hatte sie 293+88=381.
007	L → Jule: Ja.

008	Lasse → L: Aber ich sehe noch einen Fehler.
009	L → Lasse: Ja. Lasse.
010	Lasse → L: Man darf glaub ich eigentlich nicht 7 plus 1 gleich 80 plus 8 gleich 88, das soll man in zwei Schritten rechnen.
011	Isabel F → L: (Ruft parallel zu Lasse in die Klasse) Da muss man dann eine neue Aufgabe anfangen.
012	Lasse → L: Das ist dann eher so siebtes Schuljahr oder so.
013	L → alle: Ja, sonst würde ja hier stehen (zeigt auf die benannte Zeile an der Tafel) 7 plus 1 ist 88, ne Prisci?
014	Priscilla → L: Joa.
015	L → Priscilla: Müsstest du dann eigentlich noch eine neue Aufgabe -
016	L → alle: Aber wir wissen, was Prisci gemeint hat, lassen wir jetzt einfach mal auch falsch stehen. Ok? Gut, dass du es gemerkt hast, Lasse. Aber ich möchte noch mal wissen. Die Jule hat das nur ansatzweise gesagt. Ich möchte noch mal wissen, wie Prisci ergänzt hat, nicht welche Zahlen sie jetzt da hingeschrieben hat, sondern, was wohl in ihrem Kopf da passiert ist. Was hat sie überlegt. Warum hat sie denn zuerst die 7 dazu getan. Da hat sie sich ja bei was gedacht. Yannick.
017	Yannick → L: Dass sie auf 300 kommt.
018	L → Yannick: Warum denn. Warum will sie denn auf 300 kommen.
019	Yannick → L: Weil dann...
020	L → Niklas V: Niklas.
021	Niklas V → L: Weil das ne glatte, also ne gerundete Zahl ist, und mit gerundeten Zahlen kann man dann besser weiter rechnen.
022	L → alle: Das glaube ich nicht, dass das Priscis Grund war.
023	Ein S → alle: Wollte ich auch erst sagen.
024	L → alle: Das glaube ich nicht. Ich gebe dir noch einen Tipp.
025	L → Ben: Kannst du einen Tipp geben?
026	Ben → L: Ähm, ich denke schon.
027	L → Ben: Ja, dann gib einen Tipp.
028	Ben → L: Ähm, dann ist es ein glatter Hunderter, also...
029	L → Ben: Ja, das hat ja Niklas schon gerade gesagt.
030	Ben → L: Ja, nur, damit kann man hinterher besser was dazurechnen.
031	L → alle: Ja, das glaube ich aber nicht, dass das der Grund war. Tom.
032	Tom → L: Man kann vom glatten Hunderter besser ergänzen, als wenn jetzt, ähm, 306 oder so wäre.
033	L → alle: Ja... Dann lassen wir das erst mal so stehen.
034	Lasse → L: [macht mit Lauten auf sich aufmerksam]
035	L → Lasse: Lasse.
036	Lasse → L: Sie wollte erst mal auf den Hunderter kommen, auf den sie bei dem Ergebnis kommen wollte.
037	Ein S → alle: Ah...
038	Lasse → L: Weil 293+7 ist 300, und sie hat, die Ergänzungsaufgabe hieß ja, die sie sich ausgedacht hat, 293 plus hmhmhm ist 381, und dann ist sie erst mal auf den Hunderter

	gegangen, dann wollte sie auf den Zehner, und dann auf den Einer. Und das wollte sie so in Schritten rechnen.
039	L → Priscilla: Stimmt das, Prisci?
040	Priscilla → L: Ja, das war auch so.
041	L → Priscilla: Aha.
042	Priscilla → L: Weil, ich hab mir erst die Zahl von vorne angeguckt, und dann nochmal vom Zehner, und dann vom Einer.
043	L → Priscilla: Und dann hast du also die Zahl (zeigt auf die 381 oben) immer im Blick gehabt, die hinten stand.
044	Priscilla → L: Hmhm.
045	L → alle: [Erneute Störung (Geschubse) im Theaterkreis] Ok. Priscis Trick verstanden, was sie, was ihr Ziel war? Wer kann das noch mal sagen, mit seinen Worten? Was war Priscis Ziel? Yannick?
046	Yannick → L: Dass sie auf den Hunderter vom Ergebnis kommt.
047	L → Yannick: Ja, da wo sie hin ergänzen wollte, erst auf den Hunderter, dann auf den Zehner, und dann auf den Einer.

Transkript 20, Stunde 01-3, Part 29, 10.35 - 10.38 Uhr, Reflexionsphase, zu Abbildung 4.20	
001	(In Robins Weg fehlt zu diesem Zeitpunkt noch der Strich über 300+5=305)
002	L → Robin: So, Robin, nimmst du mal dran, wer sich an deinen Weg traut? [Erneut Störung im Theaterkreis].
003	L → alle: Wir sind jetzt bei Robins Weg. Der hat jetzt den Saal 3 genommen, der hat einen anderen Saal genommen, der hatte den (zeigt auf die Aufgabe, die noch an der Tafel hängt) den Saal.
004	Robin → Lasse: Lasse.
005	Lasse → Robin: Du wolltest das wieder genauso machen wie Prisci, du wolltest auch auf den Hunderter, den Zehner, und auf den Einer kommen.
006	Robin → Lasse: (nickt)
007	Robin → Isabel F: Isabel.
008	Isabel F → L: Ähm, Robin hat auch erst mit dem Hunderter angefangen, weil der hat auch dann bis zur, 300, äh, bis zur 200 gerechnet. Und dann war das ja zu wenig, und dann hat, dann musste er da noch, ne, dann waren das zu viele, und dann hat er 5 minus genommen, weil das einfach ging, weil, der Einer Acht hat ja, also, ähm.
009	Einige S → alle: Hm. Ähm.
010	Robin → Lasse: Ja, Lasse.
011	Lasse → L: Ich glaube, Robin wollte das genauso wie Prisci machen, nur, dass er Minus rechnet.
012	L → alle: Hmhm. Und die Prisci hat ja hier noch einen zweiten Strich gezogen.
013	Priscilla → L: Ja, da mit man weiß, dass das eine andere Aufgabe ist.
014	L → Priscilla: Warum?
015	Priscilla → L: Damit man weiß, dass das, also 7+1, also die falsche Aufgabe, eine andere Aufgabe...
016	L → alle: Könnte man bei Robin so einen Strich auch noch ziehen?

017	Einige S→ alle: Hmhm. Öhm.
018	L → alle: Alle gucken noch mal zur Tafel. Und schauen sich genau den Weg von Robin an.
019	Robin → alle: Ach so. Ja, stimmt. Eh. Noelia.
020	Noelia → L: Ja, das könnte man schon machen, weil, der müsste dann eigentlich hier hin (zeigt über die 5 der 305 in der letzten Zeile von Robins Nebenrechnung).
021	L → Noelia: Machst du es mal, und sagst, warum?
022	Noelia → L: Also weil, äh (zieht den Strich) ah (gerät aus der Zeile).
023	L → Noelia: Geh einen Schritt zurück, dann kannst du es besser sehen. So. (Noelia zeichnet weiter) Und jetzt erklärst du noch mal, warum.
024	Noelia → L: Ja, weil da (zeigt auf die 293 in der Zeile 298-5=293) ist er auf das Ergebnis gekommen, wo er hinwollte, und, ehm, das (zeigt auf 300-5=305) ist ja dann wie bei Prisci hier (zeigt auf 7+1=8+80=88) aah (wirft den Zeigestab von der Tafelkannte).
025	Einige S → alle: [lachen, Kommentare]
026	Noelia → L: Und da (zeigt wieder auf die letzte Zeile in Priscillas Rechnung), dass sie dann weiß, hier (zeigt auf 7, 80 und 1 in den Zeilen darüber) rechne ich wieder zusammen, ...
027	L → Noelia: Und bei Robin?
028	Noelia → L: Und bei Robin ist das jetzt auch so. Oh (steht vor Robins Rechnung, geht zur Seite) Und bei Robin ist das auch so. Also, da unter dem Strich (zeigt auf 300+5) rechnet er das so, deswegen musste man genau da (zeigt den Strich) den Strich machen. Ja, weil, wie bei Prisci, das ist die Nebenrechnung, dass er dann, äh, ja. Hier wäre ja dann noch (zeigt auf 300+5), ähm, ja, dass er die (zeigt auf -300, -5 darüber) dann auch noch zusammenrechnet.
029	L → Noelia: Genau. Ok. [Noelia wirft bei Weggehen etwas zu Boden, Gelächter, Gespräch über das Gelächter]

Transkript 21, Stunde 03-2, Part 3, 08.41 - 08.48 Uhr, Einführungsphase, ohne Abbildung	
001 – 005	[…] (L lobt die Ergebnisse der Kinder aus der Vorstunde und erteilt den Arbeitsauftrag)
006	L → alle: Dann noch mal bitte immer genau überlegen, welche Strategie passt. Es haben jetzt 2 oder 3 Kinder mir einmal drunter geschrieben, die und die Strategie geht nicht. Kann das richtig sein?
007	Einige S → alle: Nein, nein.
008	L → alle: Erst überlegen. Die haben mir zum Beispiel bei der 2. Aufgabe geschrieben, die Strategie Ergänzen geht nicht. Was sagst du dazu. Robin.
009	Robin → L: Ja, das kann ja nicht stimmen, weil, Herr Schwätzer und du hast ja gesagt, dass alle Tricks mit diesen Aufgaben gehen. Aber. Ähm. Aber.
010	L → alle: Nur weil Herr Schwätzer und ich das gesagt haben, ist das so?
011	Robin → L: Aber. Das kann nicht, genau ge... Das muss ja nicht unbedingt geeignet sein für die Aufgabe. Also.
012	Ben → L: Ich weiß, was Robin sagen möchte.
013	L → Robin: Nimm mal...
014	Robin → Ben: Ben.

015	Ben → L: Robin wollte damit sagen, also, es gehen alle, also, es gehen auch alle Aufgaben, es gehen alle Rechenwege mit jeder Aufgabe, nur, ähm, manche sind halt geeigneter dafür, und manche halt nicht.
016	L → Lasse: Lasse.
017	Lasse → L: Nur, dass dann, sozusagen, dass die dann schwerer ausfallen, als bei einer anderen Aufgabe. Dass die dann schwerer sind. Dann ist der eine Rechenweg besser für die geeignet, aber dass die dann gar nicht gehen, das geht nicht. Der ist dann nur ein bisschen schwer.
018	L → alle: Aber warum geht denn jetzt jede Strategie für jede Aufgabe. Nur weil Herr Schwätzer und ich das sagen?
019	Lasse → L: Nein, es ist dann ja nur ein bisschen schwerer, und wir sollten es uns ja leichter machen. Und...
020	L → alle: Die Begründung gefällt mir noch nicht so ganz. Prisci.
021	Priscilla → L: Ja, weil, ähm, also zum Beispiel, die erste Aufgabe, bei Vereinfachen, das wäre ein bisschen schwer, weil man da nicht zu nem direkten Hunderter kommt. Weil, das braucht man, da muss man ein bisschen, mehr, da braucht man vielleicht eine andere Aufgabe. Also. Ne andere Rechenstrategie.
022	L → Priscilla: Hmhm. Aber es wäre möglich?
023	Priscilla → L: Ja, man kann das machen, aber das wäre ein bisschen schwer.
024	L → alle: Hmhm. Das war ja auch gestern noch die Frage, mit geschickt. Was geschickt bedeutet. Und da haben Kinder noch verschiedene Begründungen geschrieben. Ich würde noch mal sagen, geschickt ist auch, wenn ich möglichst wenig rechnen muss. Wenn ich aber 10 Zwischenschritte ausrechnen muss, um zur Lösung zu gelangen, ist das dann geschickt? Jonas?
025	Jonas → L: Nein, das ist gar nicht geschickt, weil, dann dauert es ja viel länger. Eigentlich müsste es man ja kurz rechnen, wenn es geschickt sein.
026	L → alle: Das ist auch noch einmal ein gutes Argument. Yannick.
027	Yannick → L: Das geht, 957-335, weil, das habe ich gemacht, Plusergänzen, das geht.
028	L → alle: Das ist ja jetzt die Frage: ...
029	Yannick → L: Das geht mit Plusergänzen.
030	L → alle: Gehen alle Aufgaben mit Plusergänzen?
031	Einige S → alle: Ja, ja.
032	L → alle: Was haben wir denn gerade festgestellt? Ich glaube, das ist noch ganz schön kompliziert. Wie war das mit den Strategien. Und den Aufgaben. Ist glaube ich noch nicht so klar. Ich würde einfach sagen: Probiert es aus. Vielleicht kriegen wir das später raus. Wenn wir das jetzt noch nicht ganz endgültig rausfinden. Weiß jetzt jeder, wo er weitermachen soll? Wer weiß das nicht?
033	(L wendet sich einem einzelnen Schüler zu)

Transkript 22, Stunde 01-4, Part 10, 10.39 - 10.46 Uhr, Arbeitsphase, zu Abbildung 4.58	
001	(L beobachtet Katharina zunächst eine ganze Weile)
002	L → Katharina: Was machst du jetzt?
003	Katharina → L: Jetzt versuche ich mal Robins Trick.

004	L → Katharina: Und welche Aufgabe nimmst du?
005	Katharina → L: Hm. Die hier.
006	L → Katharina: Aufgabe 2. Hmhm.
007	Katharina → L: Ja.
008	L → Katharina: [lässt sich vom F kurz ablenken]. So. Jetzt möchte ich mal was erzählt bekommen. Du willst jetzt Robins Weg nehmen.
009	Katharina → L: Jaha.
010	L → Katharina: Hmhm. Und wie bist du jetzt auf die Aufgabe gekommen?
011	Katharina → L: Ähm also. Ich möchte ja rausfinden, wie viele Leute noch im Raum sind.
012	L → Katharina: Hmhm.
013	Katharina → L: Im Saal sind. Und da muss ich dann rechnen, weil es ja 465 Plätze sind, muss ich rechnen: 465 minus wie viel ist 137.
014	L → Katharina: Aha, jetzt bin ich mal gespannt, wie du mir den Weg jetzt erklärst. Robins Weg.
015	Katharina → L: ich rechne zuerst minus den Einer. 465-5 (schreibt) Weil ich zuerst auf eine glatte Zehnerzahl kommen wollte (schreibt).
016	L → Katharina: Aha.
017	Katharina → L: Und dann rechne ich das minus den Zehner. Vierhunderf... 460 minus 60 (schreibt) Und das ist 400.
018	L → Katharina: → Robin (der gegenüber sitzt und mit seinem Stift auf dem Tisch herumtippt): Robin. Das stört.
019	Robin → L: Ja, ich überlege.
020	L → Robin: Ja, das stört trotzdem.
021	Katharina → L: Und dann 400 minus 200 (schreibt).
022	L → Katharina: Hmhm. Und warum nimmst du jetzt 200 weg.
023	Katharina → L: Weil ich ja noch. Ähm. Die 40. Irgendwie hab ich das noch nicht richtig verstanden. Den Rechenweg.
024	L → Katharina: Der Robin hatte ja glaube ich den Trick, dass der versucht, den Hunderter zu kriegen, und dann den Zehner und den Einer, von dem Ergebnis. Und du hast jetzt immer zu glatten Hunderterzahlen gerechnet, das geht auch. Das geht auch.
025	Katharina → L: [unverständlich] lieber Priscis Trick nehmen sollen.
026	L → Katharina: Jaha, aber du hast ja jetzt den Trick von Robin für dich umgeändert. Das ist ja auch ok. Du willst jetzt lieber mit glatten Zehner und Hundertern rechnen.
027	Katharina → L: (nickt)
028	L → Katharina: Dann mach mal weiter. Ich bin gespannt, wie es weiter geht.
029	Katharina → L: Dann rechne ich noch 200 minus 40...
030	L → Katharina: Äh stopp. Warum rechnest du denn jetzt 200 minus 40.
031	Katharina → L: Weil ich dann noch minus 3 rechnen kann (tippt auf die 137 oben), zu der 137.
032	L → Katharina: Wenn du jetzt aber 200 minus 40 gerechnet hast, was ist denn 200-40?
033	Katharina → L: Oh. Null.
034	L → Katharina: Ne. 200-40.
035	Katharina → L: 140.

036	L → Katharina: (runzelt die Stirn)
037	Katharina → L: 100 weg.
038	L → Katharina: Von 200 Vierzig wegnehmen.
039	Katharina → L: Ach so (überlegt) 160. Dann muss ich 200-60 rechnen.
040	L → Katharina: Warum.
041	Katharina → L: Weil das ja das Liebespaar zur 40 ist.
042	L → Katharina: Ah, ja. Hmhm.
043	Katharina → L: (schreibt) Und dann muss ich noch 140-3 rechnen.
044	L → Katharina: Hmhm.
045	Katharina → L: (schreibt) Und dann 137.
046	L → Katharina: Und dann bist du endlich bei der 137 angekommen, ne. Aber jetzt hast du ja immer noch nicht das Ergebnis.
047	Katharina → L: Ja, ich hab, jetzt muss ich noch die Zahlen (zeigt mit dem Stift auf die Subtrahendenkolumne der Nebenrechnung) hier nehmen, die ich minus gerechnet hab.
048	L → Katharina: Die musst du alle noch zusammenzählen. Ok. Dann mach mal einen Strich, dass wir wissen, dass jetzt die neue Rechnung anfängt, um das Ergebnis herauszufinden.
049	(Katharina zeichnet und rechnet weiter, L geht weiter und lässt sie den Rest allein rechnen.)

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, *2*(3), 213–236.

Baroody, A. J. (1984). Children's Difficulties in Subtraction: Some Causes and Questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 203–13.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of Basic Number Combinations: Internalization of Relationships or Facts? *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(2), 83–98.

Baroody, A. J. (1999). Children's Relational Knowledge of Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction Cognition and Instruction*, *17*(2), 137–175.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1–33). Mahwah, (N.J.); London: Lawrence Erlbaum.

Baroody, A. J., & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, (N.J.); London: Lawrence Erlbaum.

Baroody, A. J., Ginsburg, H. P., & Waxman, B. (1983). Children's Use of Mathematical Structure. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 156–168.

Baroody, A. J., & Lai, M. (2007). Preschoolers' Understanding of the Addition-Subtraction Inverse Principle: A Taiwanese Sample. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(2), 131–171.

Baroody, A. J., Lai, M., Li, X., & Al. Baroody, A. (2009). Preschoolers' Understanding of Subtraction-Related Principles. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 41–60.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young Children's Understanding and Application of Subtraction-Related Principles. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 2–9.

Bass, H. (2003). Computational Fluency, Algorithms, and Mathematical Proficiency: One Mathematician's Perspective. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6), 322–327.

Bedürftig, T., & Koepsell, A. (1995a). Ergänzen beim schriftlichen Abziehen. Erfahrungen, Versuche, Ansichten (2. Teil). *Grundschule*, *12*, 50–52.

Bedürftig, T., & Koepsell, A. (1995b). Ergänzen beim schriftlichen Abziehen. Erfahrungen, Versuche, Ansichten (1. Teil). *Grundschule*, *11*, 53–55.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 294–323.

Beishuizen, M. (1997). Development of Mathematical Strategies and Procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Hrsg.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (S. 127–162). Utrecht: CD-ß Press.

Beishuizen, M., Van Putten, C. ., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, *7*(1), 87–106.

Bender, P. (1994). Einige didaktische Probleme bei der (halb-)schriftlichen Subtraktion und Division. *Mathematische Unterrichtspraxis*, *15*(2), 7–23.

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Substraktion im Zahlenraum bis 100*. Franzbecker, Hildesheim.

Bisanz, J., Watchorn, R. P. D., Piatt, C., & Sherman, J. (2009). On understanding children's developing use of inversion. *Math. Think. Learn. Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 10–24.

Blöte, A. W., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental Computation and Conceptual Understanding. *Learning and Instruction*, *10*(3), 221–47.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 627–638.

Breidenbach, W. (1957). *Rechnen in der Volksschule : eine Methodik*. Berlin [u.a.]: Schroedel.

Brownell, W. A., & Moser, H. E. (1949). *Meaningful vs. mechanical learning; a study in grade III subtraction*. Durham, N.C.: Duke Univ. Press.

Bruder, R. (2009). Langfristige fachdidaktische Forschungsprojekte zur mathematischen Unterrichtsentwicklung in der Sekundarstufe I. In M. Neubrand (Hrsg.), *Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 02.03. bis 06.03.2009 in Oldenburg* (S. 23–30). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's Understanding of the Relation between Addition and Subtraction: Inversion, Identity, and Decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 194–212.

Buchheim, W. (1984). *Komplementarität nach Niels Bohr: Physikgeschichtliche Episode oder universale Kategorie von Ergänzung?* Berlin: Akademie-Verlag.

Buijs, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children learn mathematics : a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (S. 121–146). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University : National Institute for Curriculum Development.

Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen.* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.

Campbell, J. I. D. (2008). Subtraction by addition. *Memory & Cognition*, *36*(6), 1094–1102.

Campbell, J. I. D., & Agnew, H. (2009). Retrieval savings with nonidentical elements: The case of simple addition and subtraction. *Psychonomic bulletin & review*, *16*(5), 938–944.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 3–20.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The Effect of Instruction on Children's Solutions of Addition and Subtraction Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 55–72.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179–202.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2011). Participating in Classroom Mathematical Practices. In A. Sfard, K. Gravemeijer, & E. Yackel (Hrsg.), *A Journey in Mathematics Education Research* (S. 117–163). Dordrecht: Springer Netherlands.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction*, *20*(3), 205–215.

Eccles, W. J. (2007). Subtraction and 2's-Complement. In *Pragmatic Logic* (S. 26–28). San Rafael, California: Morgan & Claypool.

Fast, M. (2012). BzMU12_0155_Fast.pdf. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (Bd. 1, S. 241–244). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Fast, M. (2013). Typische Entwicklungsverläufe Von Lösungswegen beim Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis 4. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A Longitudinal Study of Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403–434.

Fielker, D. (2007). Addition and Subtraction, and Algorithms in General. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, *204*(204), 3–5.

Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An Experimental Research on Error Patterns in Written Subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 323–331.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht; Boston; Hingham, MA, U.S.A.: Reidel Pub. Co. ; Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Boston.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht u.a.: Kluwer.

Fuson, K. C. (1984). More complexities in subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 214–225.

Fuson, K. C. (1986). Teaching children to subtract by counting up. *Journal for Research in Mathematics Education*, 172–189.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. *Cognition and Instruction*, *7*(4), 343–403.

Fuson, K. C. (2003). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws & National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 243–275). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuson, K. C., & Burghardt, B. H. (2003). Multidigit addition und subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills* (S. 267–304). Mahwah, (N.J.); London: Lawrence Erlbaum.

Fuson, K. C., & Fuson, A. M. (1992). Instruction Supporting Children's Counting on for Addition and Counting up for Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 72–78.

Fuson, K. C., & Li, Y. (2009). Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking. *ZDM*, *41*(6), 793–808.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., … Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130–162.

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1988). Subtracting by counting up: More evidence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 402–420.

Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren : Diagnose und Therapie*. Freiburg [etc.]: Herder.

Gilmore, C. K. (2006). Investigating children's understanding of inversion using the missing number paradigm. *Cognitive Development*, *21*(3), 301–316.

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, *76*(2), 309–331.

Gilmore, C. K., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of Individual Differences in Conceptual Understanding and Arithmetical Skill: A Meta-Analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 25–40.

Gilmore, C. K., & Spelke, E. S. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, *107*(3), 932–945.

Gravemeijer, K. (1994a). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443–471.

Gravemeijer, K. (1994b). *Developing realistic mathematics education = ontwikkelen van realistisch reken/wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental Researach as a Research Method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity : an ICMI study* (S. 277–298). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perpective. In J. Van den Akker, J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research* (S. 45–85). London, New York: Routledge.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 429–438.

Grüßing, M., Schwabe, J., Heinze, A., & Lipowsky, F. (2013). Adaptive Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben: Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Hasegawa, J. (2002). Case Studies on the Symbolism of Difference-Finding Problems in First Grade. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 21–28.

Hasemann, K. (2003). *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Hatano, G. (1982). Cognitive consequences of practice in culture specific procedural skills. *Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *4*, 15–18.

Heinze, A., Marschick, F., Grüßing, M., & Knopp, E. (2011). Fostering the adaptive strategy use of German 3rd-graders: The case of indirect addition. *PME CONFERENCE*, *1*(Conf 35), 1–358.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM*, *41*(5), 591–604.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443–463.

Hengartner, E., & Studer, C. (1999). Strategien beim Subtrahieren dreistelliger Zahlen (3. Klasse). In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht.* (S. 103–108). Zug: Klett und Balmer Verlag.

Höhtker, B., & Selter, C. (1998). Von der halbschriftlichen zur schriftlichen Multiplikation? *Die Grundschulzeitschrift*, *12*(119), 17–19.

Johnson, J. T. (1938). *The relative merits of three methods of subtraction : an experimental comparison of the decomposition method of subtraction with the equal additions method and the Austrian method*. New York: Teachers College, Columbia University.

Jungwirth, H., Voigt, J., Steinbring, H., & Wollring, B. (2001). Interpretative Classroom Research in Teacher Education. In H.-G. Weigand, E. Cohors-Fresenborg, A. Peter-Koop, H. Maier, K. Reiss, G. Törner, … K. Houston (Hrsg.), *Developments in mathematics education in Germany: selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Regensburg, 1996*. Franzbecker.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Klein, A. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base : the empty number line in a realistic versus gradual program design*. Utrecht: CD-Beta Press.

Klein, A., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(4), 443.

Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *14*(3-4), 189–219.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. München: Elsevier Spektrum Akad. Verl.

Labinowicz, E. (1985). *Learning from children : new beginnings for teaching numerical thinking : a Piagetian approach*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit : een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100- een onderwijsexperiment*. Utrecht: CD-[beta] Press [etc.].

Miller, P. H. (1993). *Theorien der Entwicklungspsychologie*. Heidelberg [etc]: Spektrum, Akad Verl.

Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalens. (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.

Mosel-Göbel, D. (1988). Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschülern. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, *12*, 554–559.

Moser Opitz, E., Schmassmann, M., & Hansen, R. (2003). *Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 3: Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten*. Zug: Klett und Balmer.

Müller, G. N., & Wittmann, E. C. (1977). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe : Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele*. Braunschweig: Vieweg.

Müller, G. N., & Wittmann, E. C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe : Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele* (3., neubearbeitete Auflage.). Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., & Barros, R. (2012). Teaching children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 371–388.

Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D., & Evans, D. (2009). Teaching Children About the Inverse Relation Between Addition and Subtraction. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 61–78.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule : (2. - 4. Schuljahr.) Didaktisch-method. Uberlegungen u. Hinweise f.d. tägl. Unterrichtsarbeit* (4. Aufl.). Hannover; Berlin; Darmstadt: Schroedel.

Padberg, F. (1994). Schriftliche Subtraktion - Ä□nderungen erforderlich!

Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (3. erweiterte, völlig überarbeitete Auflage.). München: Elsevier, Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage.). Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Peltenburg, M., Robitzsch, A., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100—A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 351–369.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 335–349.

Plunkett, S. (1987). Wie weit muessen Schueler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen? *Mathematik lehren*, *5*(21), 43–46.

Putnam, R. T., de Bettencourt, L. U., & Leinhardt, G. (1990). Understanding of Derived-Fact Strategies in Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction*, *7*(3), 245–285.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Radatz, H., & Schipper, W. (1997). Eine Möglichkeit zur Öffnung des Mathematikunterrichts: Freigabe des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion. *Sache-Wort-Zahl*, *25*(8), 46–47.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Bd. 1. Schuljahr). Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Bd. 2. Schuljahr). Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Bd. 3. Schuljahr). Hannover: Schroedel.

Rasmussen, C., Ho, E., & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *85*(2), 89–102.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen : eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 257–283.

Ratz, C. (2009). *Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht bei Schülern mit geistiger Behinderung: eine qualitative Studie am Beispiel von mathematischen Denkspielen*. Oberhausen: ATHENA-Verlag.

Ratz, C., & Wittmann, E. C. (2011). Mathematisches Lernen im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In C. Ratz (Hrsg.), *Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung: Fachorientierung und Inklusion als didaktische Herausforderungen*. Oberhausen, Rheinl.: ATHENA.

Reiss, K., & Schmieder, G. (2007). *Basiswissen Zahlentheorie: eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche* (2. Auflage.). Berlin [u.a.]: Springer.

Reiss, K., & Ufer, S. (2010). Fachdidaktische Forschung im Rahmen der Bildungsforschung. Eine Diskussion wesentlicher Aspekte am Beispiel der Mathematikdidaktik. In *Handbuch Bildungsforschung* (S. 199–213). Springer.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The Development of mathematical thinking* (S. 109–151). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (S. 373–429). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The Development of mathematical thinking* (S. 153–200). New York: Academic Press.

Robinson, K. M., & Dubé, A. K. (2009). Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 532–545.

Robinson, K. M., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 409–428.

Robinson, K. M., Ninowski, J. ., & Gray, M. . (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, *94*(4), 349–362.

Rowland, T. (2004). The discourse of „subtraction as difference". *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *24*(2).

Rowland, T. (2006). Subtraction — Difference or Comparison? *Mathematics in School*, *35*(2), 32–34.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Winter, Programm Ed. Schindele.

Scherer, P., & Wember, F. B. (2005). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen* (Bd. 1–3). Leipzig [u.a.]: Klett-Grundschulverl.

Schindler, M., & Hußmann, S. (2012). „Plus ist gut, minus ist schlecht“ – Eine Lernprozessstudie zur Rolle des Kontextes und des Transfers im Bereich der negativen Zahlen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (Bd. 2, S. 745–748). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Schneider, M., & Stern, E. (2009). The Inverse Relation of Addition and Subtraction: A Knowledge Integration Perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 92–101.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *25*(2), 130–148.

Schwätzer, U. (2014). 5Z-Viewer - Entwurf und Realisierung einer Software zur Dokumentation und Auswertung von Langzeitstudien. (in Planung).

Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr.* DUV, Dt. Univ.-Verl., Wiesbaden.

Selter, C. (1997). Argumente für das Rechnen auf eigenen Wegen. *Grundschulzeitschrift*, *110*, 54–55.

Selter, C. (1998). Building on Children’s Mathematics - A Teaching Experiment in Grade Three. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(1), 1–27.

Selter, C. (1999). Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren! Adri Treffers zum 65. Geburtstag. *Die Grundschulzeitschrift*, *13*(125), 6–11.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(3-4), 227–258.

Selter, C. (2001a). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children’s success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 145–173.

Selter, C. (2001b). Zur rechnerischen Flexibilität von Grundschülern - Analysen am Beispiel der Aufgabe 701-698. In S. Schmidt, W. Weiser, & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primärstufe : Festschrift für Siegbert Schmidt* (S. 217–231). Hamburg: Kovac.

Selter, C. (2003a). Rechnen - im Kopf und mit Köpfchen. In H.-W. Henn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003* (S. 33–40). Hildesheim.

Selter, C. (2003b). Flexibles Rechnen - Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. *Sache-Wort-Zahl*, *57*, 45–50.

Selter, C. (2004a). Rechnen auf eigenen Wegen. *Schule Heute*, (4), 9–11.

Selter, C. (2004b). *SINUS-Transfer Grundschule Mathematik. Modul G7: Interessen aufgreifen und weiterentwickeln.* Kiel: IPN.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 619–625.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 389–408.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig [etc.]: Klett Grundschulverlag.

Selter, C., & Sundermann, B. (1995). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 165–178). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundsch.

Seyler, D. J., Kirk, E. P., & Ashcraft, M. H. (2003). Elementary Subtraction. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *29*(6), 1339–1352.

Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General Journal of Experimental Psychology: General*, *127*(4), 377–397.

Stern, E. (1992). Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology*, *17*(3), 266–277.

Streefland, L. (1991). *Realistic mathematics education in primary school : on the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht: Utrecht University.

Sugarman, I. (2007). The Same Difference. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, *202*(202), 16–18.

Sundermann, B., & Selter, C. (1995). Halbschriftliche Addition und Subtraktion im Tausenderraum. I.: Die Rechenmethoden der Schueler. *Grundschulunterricht*, *42*(1), 22–25.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (Hrsg.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*. Buckingham; Philadelphia: Open University Press.

Thompson, I. (2007). Deconstructing Calculation Methods Part 2: Subtraction. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, *204*(204), 6–8.

Thompson, I. (2010). Subtraction in key stage 3: Which algorithm? *Mathematics in school.*, *39*(1), 29.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 29–47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 541–555.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2008). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(1), 1–17.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009a). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: influence of task, subject, and instructional factors. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(2), 1–30.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009b). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM*, *41*(5), 581–590.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Solving Subtraction Problems by Means of Indirect Addition. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 79–91.

Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction*, *19*(1), 1–12.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2005). Simple Addition Strategies in a First-Grade Class With Multiple Strategy Instruction. *Cognition & Instruction*, *23*(1), 1–21.

Treffers, A. (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen : (1) : overzicht en achtergronden*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.

Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. Ein natuerlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *Mathematik lehren*, (1), 16–20.

Treffers, A. (1987a). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas project*. Dordrecht [u.a.]: Reidel.

Treffers, A. (1987b). Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 125–145.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In *Realistic mathematics education in primary school : on the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (S. 21–56). Utrecht: Utrecht University.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1), 89–108.

Treffers, A. (2001). Numbers and number relationships. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children learn mathematics : a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (S. 101–120). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University : National Institute for Curriculum Development.

Treffers, A., & de Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tillburg: Zwijsen.

Treffers, A., Notteboom, A., & de Goeij, E. (2001). Column calculation and algorithms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children learn mathematics : a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (S. 147–172). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University : National Institute for Curriculum Development.

United States. National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success the final report of the National Mathematics Advisory Panel.* United States. Dept. of Education.

Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In D. de Bock, B. D. Søndergaard, A. B. Goméz, C. C. L. Cheng, & International Congress on Mathematical Education (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 - Topic Study Group 10 : Research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic* (S. 11–16). Leuven: ICME.

Usiskin, Z., & Bell, M. (1983). *Applying arithmetic : a handbook of applications of arithmetic*. Chicago: University of Chicago.

Van de Craats, J. (2007). Onderwijs - Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. Mythen in de rekendidactiek. *Nieuw archief voor wiskunde.*, *8*(2), 132.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25*(2), 2–9.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *Hoe rekent Nederland?* Utrecht: Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (FIsme).

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack–Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Bd. 1, S. 1–25).

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathe-Didactical Reflections on Young Children's Understanding and Application of Subtraction-Related Principles. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1), 102.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. C. Hiebert & M. Behr (Hrsg.), *Number concepts and operations in the middle grades* (S. 141–162). Hillsdale, N.J.: Erlbaum/NCTM.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94.

Vergnaud, G. (2012). Commentary 1. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 439–445.

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 327–334.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, & C. Laborde (Hrsg.), *International handbook of mathematics education* (S. 99–138). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In *Second handbook of research on mathematics teaching* *and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, *24*(2), 16–27.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction?: Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, *17*(3–4), 1365–1383.

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(4), 345–364.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum, Akad. Verl.

Vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *Mathematik lehren*, *78*, 4–8.

Vom Hofe, R. (2003). Grundvorstellungen und Grundbildung (Basisartikel). *Mathematik lehren*, *118*, 4–8.

Vygotskij, L. S. (2002). *Denken und Sprechen: psychologische Untersuchungen* (Überweiterte Neuübersetzung druch Joachim Lompscher und Georg Rückriem.). Weinheim [u.a.]: Beltz.

Wartha, S. (2010). Aufbau von Grundvorstellungen: ein Förderkonzept. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. [4 S.]).

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. [Kurzfassung]*. Kiel: IPN.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, *2*, 4–16.

Winter, H. (1988). Lernen durch Entdecken? *Mathematik lehren*, (28), 6–13.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1982). Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *2*(1), 3–20.

Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen* (1. Auflage., Bd. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.). Stuttgart; Düsseldorf: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science". *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(1), 55–70.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a „design science". *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355–374.

Wittmann, E. C. (1997). Zur schriftlichen Subtraktion. *Sache, Wort, Zahl*, *25*(10), 44–46.

Wittmann, E. C. (1998). Mathematics Education as a „Design Science". In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity : an ICMI study* (S. 87–104). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Wittmann, E. C. (1999). Die Zukunft des Rechnens im Grundschulunterricht: Von schriftlichen Rechenverfahren zu halbschriftlichen Strategien. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht.* (S. 88–93). Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 1–20.

Wittmann, E. C. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In H. Wielpütz & M. Baum (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule : ein Arbeitsbuch* (S. 18–46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. C. (2010). Begründung des Ergänzungsverfahrens der schriftlichen Subtraktion aus der Funktionsweise von Zählern. In *Mathematik im Denken der Kinder Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 34–41). [Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (1. Auflage., Bd. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.). Stuttgart; Düsseldorf: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.). Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (2. überarbeitete Auflage., Bd. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.). Stuttgart; Düsseldorf: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 3* (Schülerbd.). Stuttgart; Leipzig: Klett.

Woods, S. S., Resnick, L. B., & Groen, G. J. (1975). An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction. *Journal of Educational Psychology*, *67*(1), 17–21.

Ziegenbalg, J., Ziegenbalg, O., & Ziegenbalg, B. (2010). *Algorithmen: von Hammurapi bis Gödel* (3. überarbeitete Auflage.). Frankfurt am Main: Harri Deutsch.