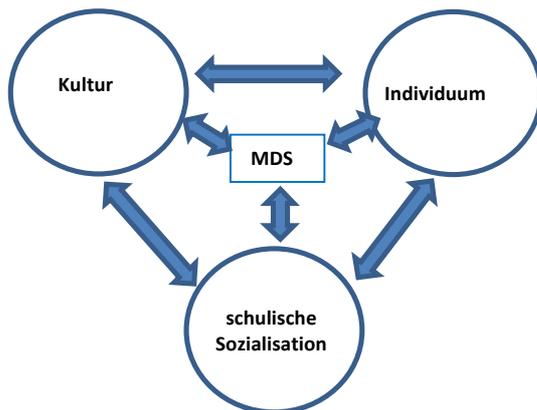


Präferenzen oder Fähigkeiten? – Mathematische Denkstile im Spannungsfeld von Persönlichkeit, Kultur und schulischer Sozialisation

1. Das (Spannungs-) Feld öffnen

Das (Spannungs-) Feld zu öffnen bedeutet gleichzeitig zentrale Entwicklungsschritte der Theorie der Mathematischen Denkstile (in der Grafik und im Folgenden: MDS) darzulegen.



In diesem Beitrag wird kurz die Theorie der MDS beschrieben sowie die rekonstruierten MDS von Individuen beschrieben. Weitere entscheidende Einflussfaktoren, die auf die MDS einwirken und hier aufgegriffen werden, sind schulische So-

zialisierung und Kultur. Interessant ist die Beleuchtung der Zusammenhänge bzw. die Frage nach den Auswirkungen des „matching“ oder „mismatching“, gemeint ist die Übereinstimmung oder nicht Übereinstimmung von MDS von Lernenden und Lehrenden beispielsweise auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler. Spannend ist ebenfalls die Frage nach kulturellen Unterschieden der MDS von Individuen. Weitere Aspekte fallen darunter, wie etwa die kulturelle Auffassung von Bildung, die Rolle der Lehrenden und Lernenden in verschiedenen Systemen, curriculare Besonderheiten etc., die hier aber nicht in der notwendigen Tiefe aufgegriffen werden können. Wie viel „Freiraum“ bleibt aber für ein Individuum, um seine präferierte Art und Weise Mathematik zu durchdenken und zu verstehen, wenn es kulturelle, curriculare sowie (schulische) sozialisationsbedingte Rahmenbedingungen gibt? Einige Antworten können auf der Basis bereits durchgeführter Studien gegeben und sollen hier in Kürze dargelegt werden.

2. Mathematische Denkstile (MDS)

Ausgangsfragestellungen der ersten Studie im Jahr 2001 waren unter anderem, welche theoretisch tragfähigen und empirisch rekonstruierbaren Erklärungsmuster/Phänomene zu finden sind, die den Erfolg bzw. Misserfolg beim mathematischen Lernen nicht vorrangig, wie es traditionell von Pädagogen und Psychologen vertreten wurde und wird, durch individuelle

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 13–20).
Münster: WTM-Verlag

Unterschiede in den Fähigkeiten zu begründen. Des Weiteren bestand ein Forschungsdesiderat dahingehend, ob visuelle, analytische und konzeptuelle Denkweisen bzw. Denkstile bei 15- und 16-jährigen Lernenden empirisch rekonstruiert und charakterisiert werden können, da es zwar viele Klassifikationen des Denkens in der Mathematik, Mathematikdidaktik und Psychologie, u.a. nach Klein (1987), Hadamard (1945), Burton (1995), Riding (2001), Skemp (1987) existierten, die jedoch nicht explizit bei Schülerinnen und Schülern untersucht wurden und zudem nicht den Fokus hatten, dass es sich um „mathematische Denkstile“ handeln sollte. Der „Stilbegriff“ ist, ähnlich wie der Begriff der „Intelligenz“, ein schwer zu greifendes Konstrukt und findet sich in unterschiedlichen Charakterisierungen in vielen Wissenschaftsdisziplinen wieder. Der Begriff des *Denkstils*, wie er von dem Kognitionspsychologen Sternberg (1997) entwickelt wurde, bildet die Grundlage für das Konstrukt des *mathematischen* Denkstils. Sternberg definiert den Begriff des „Denkstils“ wie folgt: „A style is a preferred way of thinking. It is not an ability, but rather how we use the abilities we have. (...) People may be practically identical in their abilities and yet have different styles.“ (Sternberg, 1997, 19) Sternberg definiert einen Stil als eine Präferenz bezüglich der Denkweise, die nicht eine Fähigkeit beschreibt, sondern eine Präferenz dafür, wie ein Individuum seine Fähigkeiten nutzt. So können zwei Personen, welche die gleichen Fähigkeiten besitzen, dennoch ganz unterschiedliche Denkstile haben. Nach Sternberg können Denkstile per se nicht als „gut“ oder „schlecht“ bezeichnet werden, hingegen es bei Fähigkeiten um die Erreichung eines hohen Niveaus handelt, mit Fähigkeiten also wirklich eine Qualität beschrieben wird.

Auf der Basis der ersten Studie bzw. weiteren Fallstudien, die zunächst qualitativ angelegt waren, konnten analytische, visuelle und integrierte Denkstile bei 15-19-jährigen Lernenden mit Hilfe des „Dreistufendesigns“ (Busse/Borromeo Ferri 2003) rekonstruiert werden in Verbindung mit der Methodologie der Grounded Theory (Strauss/Corbin 1990). Vor allem sollte ergründet werden, was genau das Konstrukt des mathematischen Denkstils bzw. seiner einzelnen Stilarten charakterisiert. Generell wird ein mathematischer Denkstil beschrieben als „die von einem Individuum bevorzugte Art und Weise, mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge durch gewisse interne Vorstellungen und/oder externe Darstellungen zu repräsentieren und durch gewisse Vorgehensweisen zu verarbeiten, genauer: zu durchdenken und zu verstehen. Demnach basiert ein mathematischer Denkstil auf zwei Komponenten: 1) der internen Vorstellung und der externen Darstellung, 2) der (ganzheitlichen bzw.

zergliedernden) Vorgehensweise.“ (Borromeo Ferri 2004, S. 50). Für die Auswertung und Operationalisierung mathematischer Denkstile wurde ein Modell abduktiv entwickelt, in welchem die Präferenzen für Vorgehensweisen oder internen formalen oder bildlichen Vorstellungen in Kombinationen möglich sind:

		<i>Intern orientierte Typen:</i>			<i>Extern orientierte Typen:</i>				
		kongruent		inkongruent					
2)	1)	bildlich	gemischt	symbolisch	bildlich-bildlich	gemischt	symbolisch-symbolisch	bildlich-symbolisch	symbolisch-bildlich
	ganzheitlich								
kombinierend									
zergliedernd									

(vgl. BORROMEO FERRI 2004, 52)

3. Das Individuum

Das Individuum hat entweder ausgeprägte Präferenzen für einen der jeweiligen mathematischen Denkstile oder vereint mehrere Komponenten in sich, so dass von einem integrierten Denkstil gesprochen wird. Im Folgenden eine kurze Beschreibung der MDS (siehe u.a. Borromeo Ferri 2004): Analytische Denkstile zeichnen sich durch eine Ausprägung von internen formalen Vorstellungen und externen formalen Darstellungen in Kombination mit einem zergliederten Vorgehen aus. Visuelle Denkstile sind durch interne bildliche Vorstellungen und externe bildliche Darstellungen in Kombination mit einer ganzheitlichen Vorgehensweise charakterisiert. Integrierte Denkstile manifestieren sich als gemischt in den Vorstellungen und Darstellungen sowie kombinierend in der Vorgehensweise. Des Weiteren konnten noch sogenannten formultane Denkstile (formal-ganzheitlich) und piktorielle Denkstile (bildlich-zergliedernd) qualitativ und quantitativ erfasst werden. Mathematische Denkstile sind individuumsbezogene Persönlichkeitseigenschaften. Obwohl es sich um eine Präferenz handelt, verknüpft mit positiven Affekten, ist diese dem Individuum oft nicht bewusst. Analytische Denker sind natürlich in der Lage geometrische Aufgaben zu bearbeiten oder Visualisierungen von Inhalten zu folgen, dennoch entspricht dieser Weg nicht unbedingt der präferierten Denk- und Verstehensweise der Person. Fallstudien haben gezeigt (Borromeo Ferri, im Druck), dass sich ein Lehrerwechsel im Fach

Mathematik zum Teil konkret auf die Leistung bzw. vor allem auf das Verständnis der zu vermittelten Inhalte auswirkt. Lukas beispielsweise, der ein ausgeprägter analytischer Denker ist, der zwei Jahre von Herrn S., ebenfalls einem analytischen Denker, unterrichtet wurde beschrieb nach dem Lehrerwechsel zu Frau M., visuelle Denkerin, folgendes: „Herr S. hatte eine andere Art das zu erklären und vielleicht hatten die anderen damit Probleme weil sie anders als Herr S. gedacht haben. Ich hatte so, ich war auf der gleichen Wellenlänge sozusagen wie er.“ Lukas beschreibt in Bezug auf Herrn S., dass seinem Empfinden nach die Passung („matching“) zwischen dessen und seinem eigenen Denkstil optimal war. Ein Lehrer, der seit 5 Jahren zwei Klassen desselben Jahrgangs unterrichtete, fragte sich, warum die eine Klasse durchweg bessere Leistungen erzielte und die andere Klasse nicht. Aus der Sicht der MDS konnte statistisch nachweisbar erfasst werden das der Lehrer, selber analytischer Denker, besser zu der einen Klasse, die aus $\frac{3}{4}$ analytischen Denkern bestand „passte“, als zu den Lernenden der anderen Klasse, die sehr stark visuell ausgeprägt war (Borromeo Ferri, im Druck).

4. Schulische Sozialisation

Der MDS eines Individuums wird nicht ausschließlich als ein stabiles und unveränderliches Persönlichkeitsattribut angenommen, da die schulische (mathematische) Sozialisation einen großen Einflussfaktor auf die Kognitionsprozesse im Mathematikunterricht hat. Darunter fällt bereits die Tatsache, dass Lehrende mit ihrem bevorzugten MDS dementsprechend (und oft unbewusst) ihren Unterrichtstil so ausrichten und somit bestimmte MDS bei Lernenden, die ihren MDS teilen mehr fördern, die restlichen Lernenden jedoch nicht gleichwertig partizipieren können. Veronika Reiss hat sich schon Ende der 70-ziger Jahre mit Sozialisationsphänomenen im Mathematikunterricht auseinandergesetzt und formuliert treffend: „Es kommt im Mathematikunterricht aber nicht nur darauf an, was man weiß sondern auch, wie man es weiß und wie man sein Wissen darstellt.“ (Reiss 1979, 277) Bezogen auf die MDS bedeutet das also, dass im Unterricht nicht nur das Ergebnis eines Kognitionsprozesses, sondern auch der Prozess selbst eine Rolle spielt. Reiss fasst Sozialisationsprozesse weniger als eine Prägung von außen auf, sondern vielmehr als eine Anpassung der Handlungsorientierung an (subjektiv) wahrgenommene Beziehungsgefüge. So „passen“ sich Lernende, die einen anderen MDS als ihr Lehrer bevorzugen den Gegebenheiten (Vermittlung der Inhalte, Aufgabenauswahl, Lehrmaterialien, Klassenarbeiten) an. Spezifischer formuliert bedeutet das: „Interaktionsbeziehungen zwischen Lehrern und Schülern (und der Schüler untereinander) steuern nicht nur den Erwerb spezifisch ‚sozialer‘ Inhalte,

z.B. sozialer Verhaltensweisen, sondern bestimmen auch scheinbar rein kognitive Lerninhalte in ihrer Qualität mit.“ (Reiss 1979, 277) Die Ergebnisse einer durchgeführten Fallstudie zeigen deutlich die Anpassung der einen Klasse an den durch seinen Denkstil und seine Vor- und Einstellungen geprägten Unterrichtsstil des erwähnten Lehrers Herrn S. Obwohl bei Schüler Lukas⁴ und Herrn S. ein „matching“ der MDS festgestellt wurde, hat Lukas sich trotz seiner starken Präferenz für intern orientierte Verarbeitung mathematischer Sachverhalte an die Erwartungen der Mathematiklehrpersonen angepasst und erstellt daher in geringem Maße auch externe Darstellungen. Der Einbezug der schulischen Sozialisation verdeutlicht einerseits die Schwierigkeit MDS als Konstrukt in Gänze zu fassen, aber andererseits zeigt es auch auf Mikro-Ebene die Einschränkungen von Lernenden ihren präferierten Verstehens- und Denkweisen von Mathematik im Unterricht tatsächlich nachzugehen.

5. Kultur

Die bis 2011 vorwiegend durchgeführten qualitativen Studien ermöglichten einen tiefen Einblick, u.a. wie sich MDS bei Individuen äußern, welchen Einflüssen sie unterliegen oder wiederum welchen Einfluss MDS auf Modellierungsprozesse von Lehrenden und Lernenden im Unterricht haben (Borromeo Ferri 2011). Das führte zum besseren Verständnis des Konstrukts und auch zur Abgrenzung zu anderen Klassifikationen oder Begrifflichkeiten. Viele Forschungsfragen konnten jedoch alleine durch ein qualitatives Vorgehen nicht beantwortet werden. 2012 wurden daher folgende 6 Skalen, die sich bereits in dem Modell von 2004 wiederfinden, mit insgesamt 27 items mit einer 4-stufigen Likertskala entwickelt, um das Konstrukt des MDS quantitativ zu erfassen: bildlich, formal (Arten der Repräsentationen); ganzheitlich, zergliedernd (Art der Vorgehensweise); interne Orientierung; externe Orientierung (Art der Verarbeitung von Informationen). Die Skalen wurden nicht nur für Lernende (Zielgruppe; 15-16 Jahre), sondern auch für Lehrende und Studierende angepasst. Der cronbachs α der Skalen bildlich/formal reichte von .75 bis .90 und ist daher gut bis zufriedenstellend. Drei offene Problemstellungen sowie weitere Skalen u.a. zu beliefs und Selbsteinschätzung wurden zu einem Fragebogen ergänzt. Die quantitative Erfassung ermöglicht es Fragen nach kulturellen Unterschieden von MDS nachzugehen oder Zusammenhänge von MDS und der Mathematiknote oder etwa beliefs herzustellen. Im Projekt MaDenK (Mathematische Denkstile in der Schule und kulturellem Vergleich) nehmen folgende Länder teil: In Deutschland, Süd-Korea, Japan, Türkei ist die Datenerhebung und -analyse von insgesamt 1370 Lernenden und 38 Lehrenden abgeschlossen. Chile, Thailand und die USA befinden

sich noch in der Datenerhebung. Mit dem Wissen um die diversen Auffassungen von Bildung und Lernen in den verschiedenen Kulturen, der unterschiedlichen Ausbildung von Mathematiklehrkräften, der Rolle von Schule und Curricula, können sich die MDS der Individuen durchsetzen oder gibt es kulturell geprägte MDS?

Neben dem Ergebnis, dass das Konstrukt des MDS quantitativ messbar ist, liegen einige Ergebnisse der Datenanalyse von Deutschland, Süd-Korea, Japan und der Türkei vor. Beim Vergleich der Mittelwerte bezüglich formalen und bildlichen Denkens wurde eine stärkere Ausprägung in Japan und Türkei erfasst als in Deutschland und Süd-Korea. Andererseits gibt es höhere Mittelwerte für Deutschland und Türkei hinsichtlich der ganzheitlichen Vorgehensweise als in Süd-Korea und Japan. Die Korrelationen der Mittelwerte der bildlichen und formalen Skalen zeigen gleich starke Signifikanzen in Süd-Korea und in Japan, was im Vergleich zu den anderen Ländern für den integrierten Denkstil spricht. In Deutschland zeichnen sich stärker die zwei Pole des analytischen und visuellen Denkstils ab, genauso wie in der Türkei. Die Korrelationen zwischen der Mathematiknote und dem Denkstil zeichnen ein überdenkenswertes Ergebnis ab: Lernende mit Präferenzen für formales Denken haben die besten Schulnoten in Deutschland und Japan (negative Korrelationen ergeben sich bei Japan, Süd-Korea und Türkei durch die Notenskalen in den Ländern, denn dort bedeutet eine hohe Punktzahl eine bessere Note, demnach umgekehrt, wie in Deutschland): Deutschland: $.418^{**}$, Japan: $-.164^{**}$. In Süd-Korea und in der Türkei haben auch die Individuen mit Präferenzen für visuelles Denken Bestnoten: Süd-Korea: $-.293^{**}$, Türkei: $-.106^{*}$ (**Korrelation ist signifikant auf dem Niveau 0.05 (2-seitig)). Die latente Klassenanalyse ergab für Deutschland zwei Klassen, das heißt eine bildliche und eine analytische. Zwischen diesen beiden Gruppen konnten bezüglich der Note keine signifikanten Unterschiede gemessen werden. Für Süd-Korea konnten 3 Klassen im Sinne von Niveaustufen unterschieden werden, d.h. die Individuen, die niedrig, mittel und stark bildlich und formal zustimmen. Das interessante zeigte sich hinsichtlich der Korrelation mit der Note. Diejenigen, die am stärksten beiden Richtungen zustimmten, haben auch die besseren Noten. Dementsprechend werden die Noten schlechter, je weniger Zustimmung gezeigt wird. Das deutet darauf hin, dass die Flexibilität der integrierten Denker sich auf die Noten auswirkt. Hinsichtlich der kulturellen Reflexion war das Ergebnis für die Türkei überraschend. Ohne hier jetzt auf Details eingehen zu können, ist der Mathematikunterricht in der Türkei sehr formal, kleinschrittig und ergebnisorientiert ausgerichtet (Schröder 2010). So kann vermutet werden, dass trotz der Einflussfaktoren

die starke individuelle Präferenz durchschlägt. Betrachtet man Deutschland mit den asiatischen Staaten als Ost-West-Vergleich bezüglich mathematischer Denkprozesse (siehe u.a. Cai 2002), dann ist das Profil des ausgeprägten integrierten Denkstils entgegen der Vermutung einer Ausprägung hin zum analytischen Denkstil tatsächlich überraschend und fordert nach tieferen Erklärungen. Nachdenklich stimmen die Ergebnisse zum Zusammenhang Note und Präferenzen für den analytischen Denkstil. Eine einleuchtende Interpretation ist einerseits der Blick auf die bestehenden und eingesetzten Lehr- und Lernmaterialien, die zum Teil eher eine formale Orientierung aufweisen und andererseits die Konzeptionen Tests und Klassenarbeiten, in denen die formale Bearbeitung gefordert ist und weniger visuelle Aspekte in Vor- und Darstellungen im Fokus sind. Hinzu kommen noch die beschriebenen mathematischen Sozialisationsaspekte im Zusammenhang mit der „Passung“, dem „matching“ von MDS der Lehrenden und Lernenden. Da sich bis auf die Türkei dieser signifikante Zusammenhang zeigte könnte eine Empfehlung für die Schülerinnen und Schüler lauten: „Versuche Mathematik analytisch-formal zu durchdenken, zu verstehen und darzustellen, denn das ist der erfolgreiche Weg.“ Ob es allerdings der verständlichste Weg für einige Individuen mit anderen Präferenzen ist, muss bezweifelt werden.

6. Präferenzen oder Fähigkeiten?

Mathematische Denkstile sind auf der Basis der empirisch rekonstruierten Phänomene und statistisch erfassten Ergebnisse sowie auch von der theoretischen Auslegung her in Anlehnung an Sternbergs Theorie der Denkstile keine Fähigkeiten, sondern Präferenzen, wie wir unsere Fähigkeiten nutzen. Dennoch zieht sich die über das ganze Spannungsfeld grundlegende Frage: Wann und in welchem Kontext handelt es sich bei MDS tatsächlich mehr um Präferenzen, wann mehr um Fähigkeiten? Übertragen wir die Frage zunächst auf den alltäglichen Mathematikunterricht. Vorausgesetzt die Lehrenden kennen ihren MDS und haben reflektiert, wie sich der MDS auch auf ihren Unterrichtsstil auswirkt, dann sind sie in der Lage, da sie ihre Schülerinnen und Schüler kennen, nicht nur deren MDS im Blick zu haben, sondern gezielt auf die verschiedenen Präferenzen einzugehen, um die Fähigkeiten der Lernenden zu nutzen. Denn wenn beispielsweise die Passung zwischen Aufgabenstellung und Denkstil nicht gegeben ist, werden, so nach Sternberg, Fähigkeiten und Denkstile häufig verwechselt: “Often, the tasks people face could be arranged better to fit their styles, or they could modify their styles to fit the tasks.” (Sternberg 1997, 19) Daher ist nicht immer zu erkennen, wozu das Individuum wirklich fähig wäre. Daher fordert er, dass, wenn die Fähigkeiten eines Individuums beurteilt

werden sollen, die Aufgabe auch dem Denkstil entsprechen sollte, da sonst nicht die Fähigkeit, sondern die Passung zwischen Stil und Aufgabenstellung beurteilt würde. Die signifikante Korrelation zwischen Bestnoten in Mathematik und dem analytischen Denkstil verdeutlicht, neben den erwähnten Interpretationen, dass genau bei diesen Individuen die Passung zwischen MDS und Fähigkeiten vorhanden scheint. Sternberg (1997, 80) beschreibt ebenfalls dass eine Person, deren persönliche Vorlieben zu ihren Fähigkeiten passen, weit mehr leisten kann als eine, deren Fähigkeiten zwar die gleichen sind, die aber einen nicht passenden Denkstil bevorzugt. Genauso sind die Leistungen einer Person natürlich auch von ihren Fähigkeiten abhängig, da der Denkstil nur eine Vorliebe für Verarbeitungsweisen ist.

Das Lernen und Lehren von Mathematik aus dem Blickwinkel der MDS zu betrachten bedeutet die Vorlieben, das „gerne Tun“, die Präferenzen der Lernenden für bestimmte Vorstellungen und Vorgehensweisen zu erkennen, aufzugreifen, mit ihnen in den Diskurs treten und somit die Lernenden bestmöglich zu fördern und zu fordern.

Literatur

- Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.
- Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. - Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Borromeo Ferri, R. (im Druck). Mathematical Thinking Styles in School and Across Cultures. Regular Lecture, ICMI-12, Seoul, Süd-Korea.
- Burton, L. (1995). Moving towards a Feminist Epistemology of Mathematics. In *Educational Studies in Mathematics*, 28 (2) 275-291.
- Busse, A. & Borromeo Ferri, R. (2003). Methodological reflections on a three step design combining observation, stimulated recall and interview. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35 (6), 257-264.
- Cai, J. (2002). Assessing and Understanding U.S. and Chinese Students' Mathematical Thinking: Some Issues from Cross-National Studies. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (6), 278-290.
- Schröder, R. (2010). A comparison of upper secondary school mathematics between Germany and Turkey. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 53, 4-7.
- Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale NJ: Erlbaum.
- Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. New York: Cambridge University Press.
- Strauss, A. & Corbin J. (1990). *Basics of Qualitative Research*. London: Sage.