

Gabriella AMBRUS, Budapest

## **Varianten von Modellierungsaufgaben für verschiedene Altersgruppen**

Aufgabenvariationen bieten eine gute Möglichkeit nicht nur interessanten Fragen bezüglich der „Originalaufgabe“ nachzugehen, sondern auch dem jeweiligen Thema, dem aktuellen Lerninhalt und der jeweiligen Schülergruppe angemessene Aufgaben zu entwickeln. Variationen zu Modellierungsaufgaben können dabei auch Ideen geben neue Modellierungsaufgaben zu „produzieren“.

*Aus herkömmlicher Aufgabe* können Modellierungsaufgaben formuliert werden, z.B. durch Verallgemeinern (Weglassen von Bedingungen), Kontext ändern, interessant machen, Kritisieren, Variation variieren usw.. Aber es ist auch möglich *aus einer Modellierungsaufgabe* eine weitere Modellierungsaufgabe zu erstellen, z. B. durch Analogisieren, Umorientieren (z.B. aus anderem Standpunkt aus zu betrachten), Veränderung des Kontextes, Anschluss einer Frage, Aktualisieren usw.. Für diese und weitere Typen siehe auch Schupp, 2002. Die Variationen können für dieselbe Altersgruppe - z.B. durch Veränderung des Textes entsteht aus einer Schulbuchaufgabe eine Modellierungsaufgabe,- oder für eine andere Altersgruppe z.B. durch Variation der Komplexität, durch Veränderung des mathematischen Inhaltes erstellt werden. An zwei konkreten Beispielen wird gezeigt, wie diese Variationen aussehen können und wie die so erhaltenen Modellierungsaufgaben auch noch zu relevanten didaktischen Forschungen benützt werden können. Modellierungsaufgaben bedeuten Aufgaben, die mit dem Modellierungskreislauf (Blum und Leiß, 2006)<sup>1</sup> gelöst werden können.

### **1. Erster Ausgangspunkt - märchenhafte Text-Variationen für Grundschul Kinder**

Märchenhafte Situationen können als „Realität des Kinderlebens“ (Freudenthal, 1984) aufgefasst werden und wichtig ist anzumerken, dass Situationen aus dem Alltag der Kinder (reale Situationen) und märchenhafte Situationen „fictitious real situation“ die mathematische Kreativität entwickeln können (D’Ambrosio, 2009).

Die folgende Aufgabe kann schon in den Klassen 3 und 4 gelöst werden.

---

<sup>1</sup> Blum, W./Leiß, D. (2006) Blum, W.- Leiß, D.: „Filling up“- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Guixol (2006)

*Kleider der Königin: Seit die junge Königin in das Schloss eingezogen ist, hat sie sich jede Woche ein neues Kleid nähen lassen. Seit wieviel Tagen wohnt sie im Schloss, wenn sie schon 35 neue Kleider hat?*

Bedingungen und mögliche Lösung: Nehmen wir an, dass sie immer am selben Tag ihr neues Kleid bekommen hat, das erste sofort nach ihrer Ankunft. So ergibt sich, dass sie mindestens seit  $238+1=239$  Tagen und höchstens seit  $239+6=245$  Tagen im Schloss lebt.

Die *Kleider der Königin-Aufgabe* wurde mit Grundschulkindern (Jahrgang 4, 75 deutsche Kinder, - Jahrgang 3, 35 ungarische Kinder und Jahrgang 4, 75 ungarische Kinder) erprobt. Die Kinder hatten keine Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben. Schwerpunkt der Untersuchung war: *Inwiefern können Schüler und Schülerinnen ohne Hilfe der Lehrer mehrere Lösungen finden und damit die Situation offen betrachten?* Es gab nur 9 Lösungen, bei denen der Gedanke über mehrere mögliche Resultate, - also nicht nur  $35 \times 7 = 245$  -, erschien. Es stellte sich auch heraus, dass Textverstehen ein Problem war, überdies hatten die Kinder in den Jahrgängen 3 und 4 zum Teil noch Schwierigkeiten mit dem Ausrechnen von  $35 \times 7$ . Bei den Lösungen blieben Erklärungen oft absolut weg.

*Einige Variationen (Weiterfragen) der Aufgabe für die gleiche Altersgruppe:* 1. Gib weitere mögliche Bedingungen an und berechne die Anzahl der Tage in diesen Fällen! 2. Halte nach solchen Bedingungen Ausschau, unter denen nur eine Zahl das Resultat ist! 3. Seit wie vielen Monaten wohnt die Königin im Schloss? (Mindestens seit 9 Monaten)

*Variationsbeispiel(Textänderung) für höhere Klassen-wo eine märchenhafte Situation eher als langweilig erscheint- mit dem gleichen mathematischen Inhalt- Taschengeld: Seit Pisti und seine Familie in eine neue Wohnung eingezogen sind, bekommt er wöchentlich sein Taschengeld, 1000 Forint, und er legt das seitdem immer beiseite. Seit wieviel Tagen lebt er dort, wenn er schon so 35000 Forint gesammelt hat?*

Nicht nur die Aufgabenstellung, sondern auch die möglichen Lösungsstrategien ändern sich in einer höheren Klassenstufe. Ab der Klasse 7-8 werden zum Beispiel die Bedingungen mehr systematisch angegeben und diese ausführlicher z.B. tabellarisch bearbeitet. Eine systematische Angabe der Bedingungen mit Lösung kann die Folgende sein: **A.** Er bekommt immer am selben Tag Taschengeld und er weiß, an welchem Wochentag sie in die neue Wohnung eingezogen sind. So zum Beispiel, wenn am Montag sie eingezogen sind und er immer am Montag Taschengeld bekommt, erhalten wir die schon bekannte Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 245 Tage. **B.** Er bekommt immer am selben Tag Taschengeld und er weiß nicht,

an welchem Wochentag sie in die neue Wohnung eingezogen sind. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 251 Tage. **C.** Er weiß, an welchem Wochentag sie eingezogen sind und er bekommt Taschengeld an einem beliebigen Tag der Woche. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 245 Tage. **D.** Er weiß nicht, an welchem Wochentag sie eingezogen sind und er bekommt Taschengeld an einem beliebigen Tag der Woche. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 233 Tage und höchstens 251 Tage.

Die *Taschengeld-Aufgabe* wurde auch erprobt, unter anderem mit ungarischen Schülern und Schülerinnen (Teilnehmer an einer Veranstaltung an der Eötvös-Loránd-Universität, Jahrgänge 10-12, 18 Jugendlichen), mit Schülern und Schülerinnen aus einem Gymnasium in Budapest (Jahrgänge 10, 11, 37 Jugendlichen) - insgesamt also mit 45 Schülern und Schülerinnen aus Mittelschulen und überdies mit Studenten (Biologie BSc, 50 Jugendlichen 1. Semester). Auch hier lag der Schwerpunkt an der Frage: *Wie gehen die Probanden mit der offenen Situation um?* Unter den Schülern gab es 12, bei denen die Idee von mehreren möglichen Resultaten erschien, bei den Biologiestudenten betrug diese Anzahl 10. Aus den Resultaten sind weitgehende Schlüsse nicht zu ziehen, aber die Ergebnisse deuten darauf hin, dass eine gezieltere Erprobung mit mehr Teilnehmenden zu interessanten Ergebnissen führen könnte.

## **2. Zweiter Ausgangspunkt- Variationen für verschiedene höhere Jahrgänge**

Es ist bekannt, dass aus einer Situation mehrere Aufgaben formuliert werden können. Hier werden aus einer Situation - Olympisches Stadion, 2012 - drei Varianten zu den Themen: Abschätzungen zum Sprintlauf und Anzahl der Zuschauer angegeben. Die Fragestellung (bezüglich des mathematischen Inhalts und der Komplexität) änderte sich nach Altersgruppen (Jahrgänge 7-8, 9-10, 11). Die Aufgaben wurden im Herbst 2012 mit 124 Schülern und Schülerinnen aus den Klassenstufen 7., 8., 9., 10 und 11. und in jeder Klassenstufe sowohl in Grund- als auch in Leistungskursklassen (in Mathematik) erprobt, die keine Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben hatten. Schwerpunkt war: *Wie viele (und welche) Modellierungsschritte wurden von den Schülern (instinktiv) durchgeführt, da sie den Modellierungsprozess nicht kennen.* Nach dem Modellierungskreislauf (Blum und Leiß, 2006) wurden folgende vier Schritte betrachtet: 1. Übersetzung des realen Problems in mathematisches Problem 2. Lösen des mathematischen Problems 3. Übersetzung des mathematischen Resultats in reales Resultat 4. Die Bewertung des realen Resultats. Aus den Resultaten gab es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Anzahl der verwendeten Model-

lierungsschritte und der Altersgruppe und wie erwartet, in den Leistungskursgruppen haben die Schüler im Allgemeinen mehr Schritte durchgeführt. Dieses letzte Ergebnis führte zu einer anderen Frage: *Wie arbeiten eigentlich leistungsstarke Schüler und Schülerinnen mit Modellierungsaufgaben in der Mathematik?*

Für die Betrachtung dieser Frage wurde die vorige Stadionaufgabe für die Klassenstufe 9/10 verwendet, und Lösungen von vier Schülern (ohne Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben) aufgenommen. Sie wurden gebeten ihre Gedanken laut auszusprechen, während sie am Blatt arbeiteten. Schwerpunkt: *Welche Strategien sind bekannt und werden bei der Lösung benutzt?* Die Methode und die Strategien wurden aufgrund der "selbstberichteten Strategienutzung" (Schukajlow/Leiss, 2011) festgelegt. Weitere Informationen über die Untersuchung (Ambrus, 2014). Aus den Ergebnissen stellte sich heraus, dass diese Schüler relativ viele solche Strategien kennen, die bei der Lösung dieser Aufgabe nützlich sein können, verwendet wurden aber beträchtlich weniger aus diesen. Drei von ihnen fühlten sich während der Lösung unsicher, da diese so „ungewöhnlich“ war und sie bevorzugten eher Schätzungen ohne mathematische Begründung.

### **3. Zusammenfassend**

Das Erstellen von Varianten für Modellierungsaufgaben kann verschiedene sogar gleichzeitig mehrere Ziele haben. Es ist eine mögliche Methode zur „Herstellung“ von neuen Modellierungsaufgaben für verschiedene Unterrichtsziele, wobei sich die Aufgabenkultur der Lehrer und der Schüler entwickelt und ist gleichzeitig kreativitäts- sowie flexibilitätsfördernd. Überdies bietet es gute Möglichkeit für die Untersuchung von verschiedenen Forschungsfragen.

### **Literatur**

- Ambrus, G. (2010). Mathematik im Alltag. In Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 129-132). Münster: WTM Verlag.
- Ambrus, G. (2014). Problemsolving and Modelling-Traditions and Possibilities in the Hungarian Mathematics Education. In *Promath Tagungsband 2014* (in Vorbereitung)
- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. In *Journal of Mathematical Modelling and Application Vol. 1, No. 1*, 89-98.
- Freudenthal, H. (1984). Wie alt ist der Kapitän? *Mathematik lehren*, 5, 38-39.
- Schukajlow, S. & Leiß, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *JMD*, 32, 53-77.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Berlin: Franzbecker Verlag.